ویرایش هشتم سال ۲۰۰۸

راهنمای حل مسائل

مبانی فیزیک

جلد دوم: الکتریسیته و مغناطیس

دیوید هالیدی - رابرت رزنیک - جرل واکر

طراحیpdf (مظاهری)

پل ارتباطی 09130676392

کانال ارتباطی @T_A_F_gut

آیدی ارتباطی @T_a_fizik_96

تألیف:
محمد رضا جلیلیان نصرتی

Scanned by CamScanner

بسم الله الرحمن الرحیم

ویرایش هشتم سال ۲۰۰۸

راهنمای حل مبانی فیزیک

جلد دوم: الکتریسیته و مغناطیس

طراحیpdf (مظاهری)

پل ارتباطی 09130676392

کانال ارتباطی @T_A_F_gut

آیدی ارتباطی @T_a_fizik_96

تألیف:

محمدرضا جلیلیان نصرتی

Scanned by CamScanner

مقدمه

این کتاب راهنما برای استفاده با کتاب درسی مبانی فیزیک ویرایش هشتم که به وسیلهٔ دیوید هالیدی، رابرت رزنیک و جرل واکر نگاشته شده است. نخستین هدف این کتاب نشان دادن چگونگی حل انواع مختلف مسئله‌های داده شده در پایان فصل‌های کتاب به دانشجویان است.

بسیاری از پاسخ‌ها از تعرایف یا روابط بنیادی شروع می‌شوند و معادله‌های پایانی به دست می‌آیند. این روش مبانی را تشکیل می‌دهد و در عین حال فرصتی را برای بازنگری مرحله‌های ریاضی مورد نیاز برای به دست آوردن یک پاسخ به دانشجویان می‌دهد. هدف صرفاً قرار دادن عدد در معادله‌های به دست آمده در متن نیست. امیدوارم دانشجویان آزمودن هر فرضیه‌ای را که برای وضع و حل هر مسئله انجام می‌شود یاد گیرند.

Scanned by CamScanner

فهرست

فصل ۱۷

بار الکتریکی ۵

فصل ۱۸

میدان‌های الکتریکی ۲۳

فصل ۱۹

قانون گاؤس ۵۰

فصل ۲۰

پتانسیل الکتریکی ۷۴

فصل ۲۱

ظرفیت ۱۰۵

فصل ۲۲

جریان و مقاومت الکتریکی ۱۲۶

فصل ۲۳

مدارهای الکتریکی ۱۴۰

فصل ۲۴

میدان‌های مغناطیسی ۱۷۲

فصل ۲۵

میدان‌های مغناطیسی ناشی از جریان‌ها ۱۹۳

فصل ۲۶

القایش و القاییدگی ۲۲۱

فصل ۲۷

نوسان‌های الکترومغناطیسی و جریان متناوب ۲۴۹

فصل ۲۸

معادله‌های ماکسول؛ خواص مغناطیسی داده ۲۷۴

فصل ۲۹

موج‌های الکترومغناطیسی ۲۹۶

Scanned by CamScanner

۱۷ بار الکتریکی

Scanned by CamScanner

بخش ۱۷-۴ قانون کولن

●۱- برای آنکه بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان دو بار نقطه‌ای $q_1 = 26.0\,\mu C$ و $q_2 = -47.0\,\mu C$ برابر با $5.70\,N$ باشد، فاصلهٔ بین آنها باید چقدر باشد؟ SSM

حل:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{k q_1 q_2}{F}}$$

$$= \sqrt{\frac{(9\times10^9)(26\times10^{-6})(47\times10^{-6})}{5.7}} = 1.39\,m$$

●۲- دو ذره با بار یکسان در فاصلهٔ $3.2\times10^{-3}\,m$ از یکدیگر نگه داشته شده و سپس از حال سکون رها می‌شوند. مشاهده می‌شود که شتاب اولیهٔ ذرهٔ اول $7.0\,m/s^2$ و شتاب اولیهٔ ذرهٔ دوم $9.0\,m/s^2$ است. اگر جرم ذرهٔ اول $6.3\times10^{-7}\,kg$ باشد، (الف) جرم ذرهٔ دوم و (ب) بزرگی بار هر ذره چقدر است؟ ILW

حل: (الف) می‌دانیم نیرویی که این دو ذره به یکدیگر وارد می‌کنند با هم برابر ولی در جهت مخالف است.

$$F_1 = F_2 \Rightarrow m_1 a_1 = m_2 a_2 \Rightarrow m_2 = \frac{m_1 a_1}{a_2} = \frac{(6.3\times10^{-7})(7)}{9}$$

$$= 4.9\times10^{-7}\,kg$$

(ب)

$$F_1 = m_1 a_1 \;,\; F_1 = k\frac{q_1 q_2}{r^2} = k\frac{q^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow q^2 = \frac{r^2 m_1 a_1}{k} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{(3.2\times10^{-3})^2(6.3\times10^{-7})(7)}{9\times10^9}}$$

$$= 7.1\times10^{-11}\,C$$

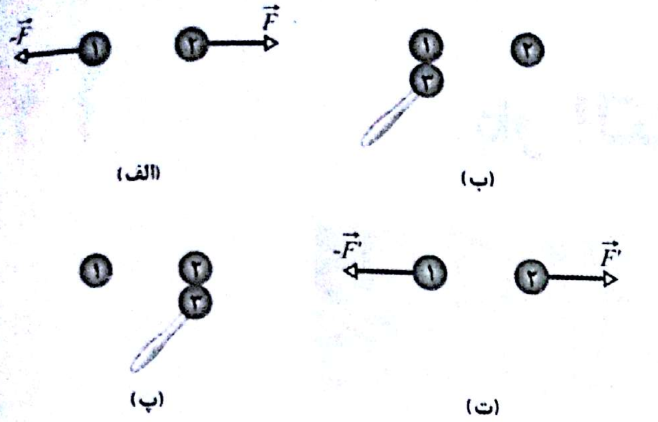
●۳- ذره‌ای با بار $+3.00\times10^{-6}\,C$ در فاصلهٔ $12.0\,cm$ از ذرهٔ دیگری با بار $-1.50\times10^{-6}\,C$ قرار دارد. بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان دو ذره را محاسبه کنید.

حل:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \Rightarrow F = 9\times10^9\,\frac{(3\times10^{-6})(1.5\times10^{-6})}{(12\times10^{-2})^2} = 2.8\,N$$

چون بار دو ذره مخالف هم است، بنابراین نیرو جاذبه است.

●۴- کره‌های رسانای منزوی مشابه ۱ و ۲ بارهای یکسانی دارند و در فاصله‌ای از هم قرار گرفته‌اند که در مقایسه با قطر آنها زیاد است، (شکل ۱۷-۲۲ الف). نیروی الکتروستاتیکی که از سوی کرهٔ ۱ بر کرهٔ ۲ وارد می‌شود $\vec{F}$ است. حال فرض کنید که کرهٔ مشابه سوم ۳، که دارای دستگیره‌ای عایق و در ابتدا خنثی است، نخست با کرهٔ ۱ (شکل ۱۷-۲۲ب)، سپس با کرهٔ ۲ (شکل ۱۷-۲۲پ) تماس پیدا کند، و سرانجام برداشته شود (شکل ۱۷-۲۲ ت). بزرگی نیروی الکتروستاتیکی F' که اینک بر کرهٔ ۲ وارد می‌شود چقدر است؟ نسبت F'/F چیست؟



شکل ۱۷-۲۲ مسئلهٔ ۴

حل: وقتی کره‌ی ۳ با کره‌ی ۱ تماس می‌یابد. بار این دو کره با یکدیگر برابر می‌شود. بنابراین کره‌ی ۱ بعد از جدایی از کره‌ی ۳ دارای بار $\frac{q}{2}$ است. بار کره‌ی ۳ نیز $\frac{q}{2}$ است. هنگامی که کره‌ی ۳ با بار $\frac{q}{2}$ با کره‌ی ۱ با بار q تماس پیدا می‌کند، این دو کره بعد از تماس دارای بارهای مساوی هستند که اندازه‌ی آن برابر است با:

$$q'_1 = q'_2 = \frac{q + q/2}{2} = \frac{3}{4}q$$

بنابراین نیروی بیان کره‌ی ۱ و ۲ در حالت نهایی برابر است با:

$$F' = k\frac{q'_1 q'_2}{r^2} = k\frac{\left(\frac{3}{4}q\right)\left(\frac{1}{2}q\right)}{r^2} = \frac{3}{8}k\frac{q^2}{r^2} = 3F$$

$$\Rightarrow \frac{F'}{F} = \frac{3}{8} = 0.375 \Rightarrow F' = 0.375F$$

●۵- از بار Q که در ابتدا روی کرهٔ کوچکی است، یک جزء q به کرهٔ دیگری که در نزدیکی آن واقع است منتقل می‌شود. هر دو کره را می‌توان به صورت ذره در نظر گرفت. نیروی الکتروستاتیکی میان دو کره به ازای چه مقداری از q/Q بیشینه است؟ SSM ILW

حل:

$$F = k\frac{q(Q-q)}{r^2} = \frac{k(qQ - q^2)}{r^2}$$

بیشینه F از رابطه زیر حاصل می‌گردد.

$$\frac{dF}{dq} = 0 \Rightarrow Q - 2q = 0 \Rightarrow \frac{q}{Q} = \frac{1}{2}$$

●۶- در ضربهٔ برگشتی حاصل از تخلیهٔ یک آذرخش نوعی، جریان $2.5\times10^{4}\,A$ به مدت $20\,\mu s$ به وجود می‌آید. در این رویداد چقدر بار منتقل می‌شود؟ [redacted]

حل:

$$q = It = (2.5\times10^{4})(20\times10^{-6}) = 0.5\,C$$

●●۷- دو کرهٔ رسانای مشابه، که در جایی ثابت شده‌اند، هنگامی که فاصلهٔ جدایی مرکز به مرکز آنها برابر $50.0\,cm$ است، با نیروی الکتروستاتیکی $0.108\,N$ یکدیگر را می‌ربایند. سپس کره‌ها توسط سیم رسانای نازکی به هم متصل می‌شوند.

Scanned by CamScanner

وقتی که سیم برداشته شود، کره‌ها یکدیگر را با نیروی الکتروستاتیکی ۰/۰۳۶۰N می‌رانند. از بارهای اولیهٔ روی کره‌ها، که مجموع آنها مقدار مثبتی است، (الف) چه مقدار بار منفی روی یکی از آنها و (ب) چه مقدار بار مثبت روی دیگری قرار داشته است؟ SSM WWW

حل: بار کره‌ی اول q_1 و بار کره‌ی دوم q_2 است. بعد از تماس بار دو کره با یکدیگر برابر می‌شود. در این حالت داریم:

$$q_1' = q_2' = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$$

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r_2} \quad , \quad F' = k\frac{q_1' q_2'}{r^2}$$

با استفاده از نیروی F' ، $(q_1 + q_2)$ را می‌یابیم.

$$0/036 = 9\times10^9 \frac{(q_1+q_2)^2}{4(0/5)^2} \Rightarrow (q_1+q_2) = \pm 2\times10^{-6}\ C \qquad (1)$$

می‌توان دو حالت $q_1+q_2>0$ و $q_1+q_2<0$ را در نظر گرفت. برای حالت $q_1+q_2>0$ داریم:

$$q_1+q_2 = 2\times10^{-6}\ C \Rightarrow q_2 = 2\times10^{-6} - q_1 \qquad (2)$$

از طرفی می‌توانیم مقدار q_1q_2 را از نیروی F بیابیم:

$$F = k\frac{q_1q_2}{r^2} = 9\times10^9 \frac{q_1q_2}{(0/5)^2} = 0/108$$

$$\Rightarrow q_1q_2 = -3\times10^{-12}\ C^2$$

از آنجا که بار دو کره در حالت اول مخالف هم است، علامت منفی برای حاصل بالا در نظر گرفته شد. اگر این شرط را با روابط ۱ و ۲ با هم در نظر بگیریم، به معادله‌ی درجه دوم زیر می‌رسیم:

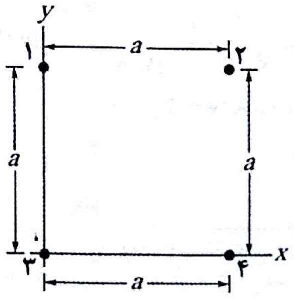
$$q_1^2 - 2\times10^{-6}\, q_1 - 3\times10^{-12} = 0$$

$$\Rightarrow q_1 = 3\times10^{-6}\ C \ , \ q_1 = -1\times10^{-6}\ C$$

اگر $q_1 = 3\times10^{-6}\ C$ باشد، آنگاه $q_2 = -1\times10^{-6}\ C$ و اگر $q_1 = -1\times10^{-6}\ C$ باشد، آنگاه $q_2 = 3\times10^{-6}\ C$ است.

برای حالتی که $q_1+q_2<0$ باشد، حل به همین گونه است.

●●۸- در شکل ۱۷-۲۳، چهار ذره مربعی را تشکیل داده‌اند. بارها عبارت‌اند از $q_1 = q_4 = Q$ و $q_2 = q_3 = q$. (الف) اگر نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذره‌های ۱ و ۳ برابر صفر باشد، نسبت Q/q چقدر است؟ (ب) آیا هیچ مقداری از q وجود دارد که نیروی الکتروستاتیکی وارد بر هر چهار ذره را برابر صفر کند؟ توضیح دهید. GO



شکل ۱۷-۲۳ مسئله‌های ۸، ۹ و ۶۲.

حل: (الف) برآیند نیروهای وارد بر ذره‌های ۱ و ۳ صفر است.

$$\vec F_{net} = 0 \Rightarrow (F_{net})x = 0$$

$$(F_{net})y = 0$$

$$(F_{net})_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1 q_4}{2a^2}\cos(45°) + \frac{q_1 q_2}{a^2}\right] = 0$$

$$\frac{Q^2}{2a^2\sqrt{2}} + \frac{qQ}{a^2} = 0 \Rightarrow \frac{Q}{q} = -2\sqrt{2}$$

(ب) خیر. می‌توان نشان داد اگر چنین باشد، آنگاه مقدار $\frac{Q}{q}$ برای هر رابطه متفاوت است که خلاف فرض سؤال و منطق است.

●●۹- در شکل ۱۷-۲۳، بارها عبارت‌اند از $q_1 = -q_2 = 100nC$ و $q_3 = -q_4 = 200nC$، و فاصلهٔ بارها $a = 5/0cm$ است. مؤلفه‌های (الف) x و (ب) y نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذرهٔ ۳ چقدر است؟ ILW

حل: (الف)

$$F_{3x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_3 q_2}{2a^2}\cos(45) + \frac{q_3 q_4}{a^2}\right)$$

$$= 9\times10^9\left[\frac{(200\times10^{-9})(100\times10^{-9})}{2(25\times10^{-4})}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{(200\times10^{-9})(200\times10^{-9})}{25\times10^{-4}}\right]$$

$$= 0/17N$$

(ب)

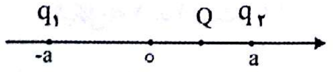
$$F_{3y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_3 q_2}{2a^2}\cos(45) - \frac{q_3 q_1}{a^2}\right)$$

$$= 9\times10^9\left(\frac{(200\times10^{-9})(100\times10^{-9})}{2(25\times10^{-4})} - \frac{(200\times10^{-9})(100\times10^{-9})}{25\times10^{-4}}\right)$$

$$= -0/046N$$

●●۱۰- سه ذره روی محور x ثابت شده‌اند. ذرهٔ ۱ با بار q_1 در $x = -a$ و ذرهٔ ۲ با بار q_2 در $x = +a$ قرار دارند. نسبت q_1/q_2 باید چقدر باشد تا در هنگامی که ذرهٔ ۳ با بار $+Q$ در (الف) $x = +0/500a$ و (ب) $x = +1/50a$ قرار دارد، نیروی الکتروستاتیکی وارد بر آن برابر با صفر باشد؟

حل: (الف)

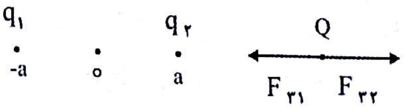


$$F_{31} = F_{32} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 Q}{(1/5a)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 Q}{(0/5a)^2}$$

$$\frac{q_1}{(1/5)^2} = \frac{q_2}{(0/5)^2} \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \left(\frac{1/5}{0/5}\right)^2 = 9$$

Scanned by CamScanner

(ب) در این حالت باید نیروهای وارد بر ذره‌ی ۳ به صورت زیر باشد تا ذره ساکن باشد

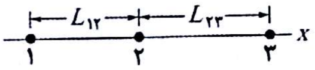


$$F_{31} = F_{32} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3 q_1}{(2/5a)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_3}{(0/5a)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \left(\frac{2/5}{0/5}\right)^2 = 25$$

کاملاً روشن است که q_1 و q_2 در این حالت دارای علامت‌های مختلف هستند.

●●۱۱- در شکل ۱۷-۲۴ سه ذرهٔ باردار روی محور x قرار دارند. ذره‌های ۱ و ۲ در مکان خود ثابت‌اند. ذرهٔ ۳ می‌تواند حرکت کند، ولی نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر آن از طرف ذره‌های ۱ و ۲ در جایی برابر صفر است. اگر $L_{23} = L_{12}$ باشد؛ نسبت q_1/q_2 چقدر است؟



شکل ۱۷-۲۴ مسئله‌های ۱۱ و ۵۶

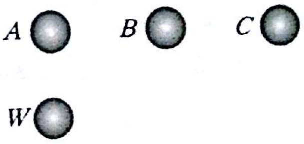
حل:

$$F_{31} = F_{32} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3 q_1}{(L_{12}+L_{23})^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_3}{(L_{23})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \left(\frac{2L_{12}}{L_{12}}\right)^2 = 4$$

کاملاً روشن است که بار q_1 و q_2 مختلف‌العلامت هستند.

●●۱۲- شکل ۱۷-۲۵ چهار کرهٔ رسانای مشابه را نشان می‌دهد که در فاصله‌ای از یکدیگر قرار گرفته‌اند. کرهٔ W (با بار اولیهٔ صفر) با کرهٔ A تماس داده شده و سپس از آن جدا می‌شود. پس از آن، کرهٔ W با کرهٔ B (با بار اولیه $-32e$) تماس داده شده و سپس از آن جدا می‌شود. سرانجام، کرهٔ W با کرهٔ C (با بار اولیهٔ $+48e$) تماس داده شده و از آن جدا می‌شود. بار نهایی روی کرهٔ W برابر $+18e$ است. بار اولیهٔ روی کرهٔ A چقدر بوده است؟ GO



شکل ۱۷-۲۵ مسئلهٔ ۱۲

حل: در تماس اول بار کره‌ی A نصف شده و بار کره‌ی W برابر $\frac{1}{2}q_A$ می‌شود که q_A بار اولیه‌ی کره‌ی A است. در تماس با کره‌ی B داریم:

$$q'_W = \frac{1}{2}(q_W + q_B) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}q_A - 32e\right)$$

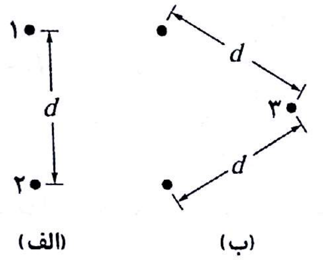
در تماس با کره‌ی C داریم:

$$q''_W = \frac{1}{2}(q'_W + q_C) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{19}{2}A - 32e\right)\right] = 18e$$

از حل بدست می‌آوریم:

$$q_A = 16e$$

●●۱۳- در شکل ۱۷-۲۶ الف، ذره‌های ۱ و ۲ هر کدام بار $20/0\,\mu C$ دارند و در فاصلهٔ $d = 1/50\,m$ از یکدیگر ثابت شده‌اند. (الف) بزرگی نیروی الکتروستاتیکی وارد بر ذرهٔ ۱ ناشی از ذرهٔ ۲ چقدر است؟ در شکل ۱۷-۲۶ ب، ذرهٔ ۳ با بار $20/0\,\mu C$ به گونه‌ای قرار گرفته است که یک مثلث با ضلع‌های مساوی ایجاد می‌شود. (ب) بزرگی نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذرهٔ ۱ ناشی از ذره‌های ۲ و ۳ چقدر است؟

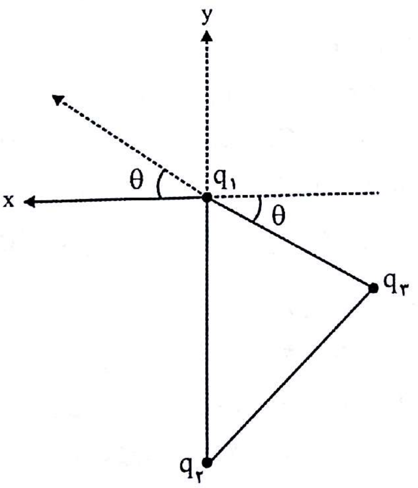


شکل ۱۷-۲۶ مسئلهٔ ۱۳

حل: (الف)

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{d^2} = 9\times10^9\frac{(20\times10^{-6})^2}{(1/5)^2} = 1/6\,N$$

(ب) از شکل پیداست $\theta = 30°$ است.



$$F_{13x} = F_{13}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(20\times10^{-6})^2\cos(30°)}{(1/5)^2} = 1/4\,N$$

$$F_{13y} = F_{13}\sin\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(20\times10^{-6})^2}{(1/5)^2}\sin(30°) = 0/8\,N$$

$$(F_{net})_y = 1/6\,N + 0/8\,N = 2/4\,N$$

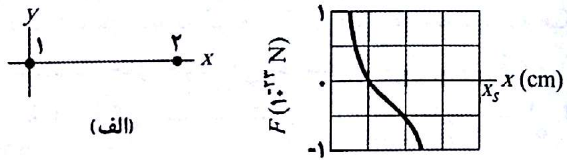
$$(F_{net})_x = 1/4\,N$$

برآیند نیروها برابر است با:

$$F_{net} = \sqrt{(2/4)^2 + (1/4)^2} = 2/78\,N$$

Scanned by CamScanner

●●۱۴- در شکل ۱۷-۲۷ الف، ذرهٔ ۱ (با بار $q_۱$) و ذرهٔ ۲ (با بار $q_۲$) در مکانی روی محور x ثابت شده‌اند و از یکدیگر ۸/۰۰cm فاصله دارند. می‌خواهیم ذرهٔ ۳ (با بار $q_۳=+۸/۰۰\times۱۰^{-۱۹}$ C) به گونه‌ای روی خط میان ذره‌های ۱ و ۲ قرار گیرد که آنها نیروی الکتروستاتیکی خالص $\vec{F}_{۳,net}$ را بر آن وارد کنند. شکل ۱۷-۲۷ ب، مؤلفهٔ x این نیرو را برحسب مختصهٔ x مکانی که ذرهٔ ۳ در آن واقع شده است، نشان می‌دهد. مقیاس محور x با $x_s=۸/۰$cm مشخص شده است. (الف) علامت بار $q_۱$ و (ب) نسبت $q_۲/q_۱$ چیست؟



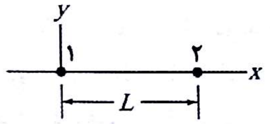
شکل ۱۷-۲۷ مسئلهٔ ۱۴

حل: **(الف)** هنگامی که بار $q_۳$ به $q_۱$ نزدیک می‌شود، نیروی بین آنها دافعه است، بنابراین این دو بار هم علامت هستند. $(q_۱>۰)$

(ب) به ازای $x=۲$cm ، نیروی برآیند صفر است. بنابراین:

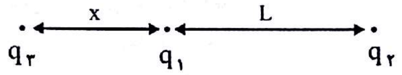
$$\frac{q_۱}{۴\pi\varepsilon_۰x^۲}=\frac{q_۲}{۴\pi\varepsilon_۰(d-x)^۲}\Rightarrow\frac{q_۲}{q_۱}=\frac{(d-x)^۲}{x^۲}=\left(\frac{۸-۲}{۲}\right)^۲=۹$$

●●۱۵- در شکل ۱۷-۲۸، ذرهٔ ۱ با بار $+۱/۰\,\mu C$ و ذرهٔ ۲ با بار $-۳/۰\,\mu C$ به فاصلهٔ $L=۱۰/۰$ cm روی محور x ثابت شده‌اند. اگر ذرهٔ ۳ با بار نامعلوم $q_۳$ به گونه‌ای قرار داده شود که نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر آن از طرف ذره‌های ۱ و ۲ صفر باشد، مختصهٔ (الف) x و (ب) y ذرهٔ ۳ باید چقدر باشد؟



شکل ۱۷-۲۸ مسئله‌های ۱۵، ۱۹، ۳۲، ۶۴ و ۶۹

حل: **(الف)** ذره‌ی $q_۳$ باید خارج میان دو بار $q_۱$ و $q_۲$ باشد تا نیروی برآیند وارد بر آن صفر شود.

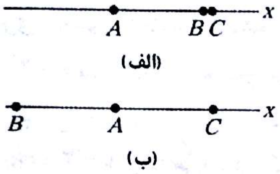


$$\frac{q_۱q_۳}{۴\pi\varepsilon_۰(x^۲)}=\frac{q_۲q_۳}{۴\pi\varepsilon_۰(L+x)^۲}\Rightarrow\left(\frac{L+x}{x}\right)^۲=\left|\frac{q_۲}{q_۱}\right|$$

$$\left(\frac{۱۰+x}{x}\right)^۲=\left|\frac{۳}{۱}\right|\Rightarrow x=۱۳/۶\text{cm}$$

(ب) تعادل روی محور x برقرار می‌شود و $y=۰$ است.

●●۱۶- در شکل ۱۷-۲۹ الف، سه ذرهٔ باردار مثبت روی محور x ثابت شده‌اند. ذره‌های B و C به حدی به یکدیگر نزدیک‌اند که می‌توانیم فاصلهٔ آنها از ذرهٔ A را یکی بگیریم. نیروی خالص وارد بر ذرهٔ A از طرف ذره‌های B و C برابر با $۲/۰۱۴\times۱۰^{-۲۳}$ N و در جهت منفی محور x است. در شکل ۱۷-۲۹ ب، ذرهٔ B در طرف مخالف نسبت به A جابه‌جا شده است ولی هنوز در همان فاصله از A است. اکنون نیروی خالص وارد بر A برابر با $۲/۸۷۷\times۱۰^{-۲۴}$ N و در جهت منفی محور x است. نسبت q_C/q_B چقدر است؟



شکل ۱۷-۲۹ مسئلهٔ ۱۶

حل: از داده‌های سؤال پیداست که q_C با q_A هم علامت هستند و q_A و q_B علامت مخالف دارند.

$$F_۱=\frac{q_Aq_B}{۴\pi\varepsilon_۰x^۲}+\frac{q_Aq_C}{۴\pi\varepsilon_۰x^۲}=\frac{q_A(q_B+q_C)}{x^۲}$$

$$F_۲=\frac{q_Aq_B}{۴\pi\varepsilon_۰x^۲}+\frac{q_Aq_C}{۴\pi\varepsilon_۰x^۲}=\frac{q_A(-q_B+q_C)}{x^۲}$$

$$\frac{F_۱}{F_۲}=\frac{q_B+q_C}{-q_B+q_C}\Rightarrow\frac{۲۰/۱۴}{-۲/۸۷۷}=\frac{q_B+q_C}{q_C-q_B}\Rightarrow\frac{q_C}{q_B}=۱/۳۳$$

●●۱۷- بارها و مختصات دو ذرهٔ باردار که در صفحهٔ xy ثابت شده‌اند عبارت‌اند از $q_۱=+۳/۰\,\mu C$ ، $x_۱=۳/۵$ cm ، $y_۱=۰/۵۰$ cm ، و $q_۲=-۴/۰\,\mu C$ ، $x_۲=-۲/۰$ cm ، $y_۲=۱/۵$ cm ، (الف) بزرگی و (ب) جهت نیروی الکتروستاتیکی وارد بر ذرهٔ ۲ از طرف ذرهٔ ۱ را بیابید. در چه مختصهٔ (پ) x و (ت) y ذرهٔ سوم با بار $q_۳=+۴/۰\,\mu C$ باید قرار گیرد تا نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذرهٔ ۳ از طرف ذره‌های ۱ و ۲ صفر شود؟

حل: **(الف)**

$$r_{۱۲}=\sqrt{(x_۱-x_۲)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}=\sqrt{(۳/۵+۲)^۲+(۰/۵-۱/۵)^۲}=۵/۶\text{cm}$$

$$F_{۲۱}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q_۱q_۲}{r_{۱۲}^۲}=۹\times۱۰^۹\frac{(۳\times۱۰^{-۶})(۴\times۱۰^{-۶})^۲}{(۰/۰۵۶)^۲}=۳۴/۵\text{N}$$

نیرو جاذبه است.

(ب)

$$\theta=\tan^{-۱}\left(\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}\right)\Rightarrow\theta=-۱۰/۳^\circ$$

(پ) و (ت) فرض می‌کنیم ذره‌ی ۳ در مختصات $x_۲,y_۲$ قرار دارد. نیروی کولنی را به صورت برداری می‌نویسیم.

$$\vec{F}_{۳۱}=\frac{q_۱q_۳}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{\vec{r}_{۳۱}}{|r_{۳۱}|^۳}$$

$$\vec{r}_{۳۱}=(x_۱-x_۲)\hat{i}+(y_۱-y_۲)\hat{j}=(۳/۵\times۱۰^{-۲}-x_۲)\hat{i}+(۰/۵\times۱۰^{-۲}-y_۲)\hat{j}$$

Scanned by CamScanner

$$\vec F_{32}=\frac{-q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec r_{32}}{|r_{32}|^3}$$

$$\vec r_{32}=(x_2-x_3)\hat i+(y_2-y_3)\hat j$$
$$=(-2\times10^{-2}-x_3)\hat i+(1/5\times10^{-2}-y_3)\hat j$$

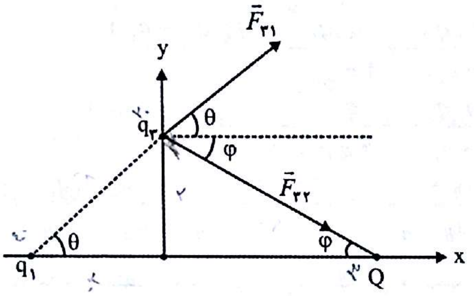
$$\vec F_3=\vec F_{31}+\vec F_{32}=0\Rightarrow\frac{q_1q_3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec r_{31}}{|r_{31}|^3}-\frac{q_2q_3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec r_{32}}{|r_{32}|^3}=0$$

$$\Rightarrow q_1\frac{\vec r_{31}}{|r_{32}|^3}=+q_2\frac{\vec r_{32}}{|r_{32}|^3}$$

اگر این معادله‌ی برداری را حل کنیم، بدست می‌آوریم
$y_3=2/66\times10^{-2}$ m و $x_3=-8/35\times10^{-2}$ m

●●۱۸- دو ذره روی محور x ثابت شده‌اند. ذرهٔ ۱ با بار $40\mu C$ در $x=-2/0$ cm، و ذرهٔ ۲ با بار Q در $x=3/0$ cm واقع‌اند. ذرهٔ ۳ که بزرگی بار آن $20\mu C$ است از حالت سکون روی محور y در $y=2/0$cm رها می‌شود. اگر شتاب اولیهٔ ذرهٔ ۳ در جهت مثبت (الف) محور x و (ب) محور y باشد، مقدار Q چقدر است؟

حل: (الف)



اگر بخواهیم شتاب در راستای محور x باشد، بنابراین نیروی برآیند در راستای محور y صفر است. از شکل پیداست:

$$F_{31}\sin\theta=F_{32}\sin(\varphi)$$

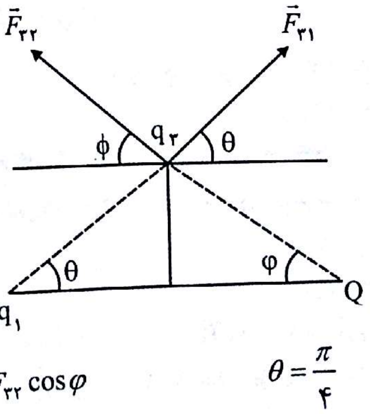
$$\sin\theta=\frac{\sqrt2}{2}\qquad \sin\varphi=\frac{2}{\sqrt{(2)^2+(3)^2}}=\frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{(2^2+2^2)\times10^{-4}}\frac{\sqrt2}{2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3Q}{(2^2+3^2)\times10^{-4}}\frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow\frac{(40\times10^{-6})\sqrt2}{16\times10^{-4}}=\frac{2Q}{13\sqrt{13}\times10^{-4}}\Rightarrow Q=-83\times10^{-6}\text{ C}$$

علامت منفی بدین جهت انتخاب شد که نیروی بین Q و q_3 باید مخالف هم باشد تا نیرو جاذبه باشد.

(ب) در این حالت نیروی افقی وارد بر ذره صفر است.



$$F_{31}\cos\theta=F_{32}\cos\varphi\qquad \theta=\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{(3)^2+(2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{13}}$$

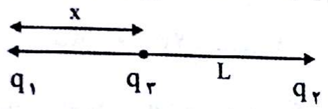
$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{[2^2+2^2]\times10^{-4}}\frac{\sqrt2}{2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3Q}{[3^2+2^2]\times10^{-4}}\frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow Q=55/2\times10^{-6}\text{ C}$$

در این حالت چون نیروی بین q_3 و Q دافعه است، Q و q_3 هم علامت هستند.

●●۱۹- در شکل ۱۷-۲۸، ذرهٔ ۱ با بار $+q$ و ذرهٔ ۲ با بار $+4/00q$ در فاصلهٔ $L=9/00$ cm روی محور x ثابت شده‌اند. اگر ذرهٔ ۳ با بار q_3 به گونه‌ای قرار گیرد که سه ذره به هنگام رها شدن، در جای خود باقی بمانند (الف) مختصهٔ x و (ب) مختصهٔ y ذرهٔ ۳ و (پ) نسبت q_3/q باید چقدر باشد؟ SSM www

حل: (الف) بار q_3 با علامت منفی را میان دو بار قرار می‌دهیم.



$$F_{13}=F_{23}$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{x^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_3}{(L-x)^2}\Rightarrow\frac{49}{(L-x)^2}=\frac{9}{x^2}$$

$$\Rightarrow 3x^2+2Lx-L^2=0$$

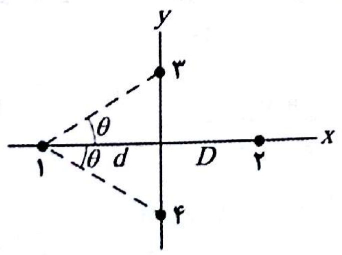
از حل این معادله جواب $x=0/03$m را بدست می‌آوریم. این مقدار را در معادله‌ی زیر قرار می‌دهیم

$$F_{31}=F_{21}\Rightarrow\frac{kq_3q}{9\times10^{-4}}=\frac{kq(4q)}{81\times10^{-9}}\Rightarrow\frac{q_3}{q}=\frac{4}{9}$$

(ب) $y=0$

(پ) $\frac{q_3}{9}=\frac{-4}{9}$

●●●۲۰- شکل ۱۷-۳۰ آرایشی از چهار ذرهٔ باردار را، با زاویهٔ $\theta=30/0°$ و فاصلهٔ $d=2/00$cm نشان می‌دهد. بار ذرهٔ ۲ برابر با $q_2=+8/00\times10^{-19}$ C، و بار ذره‌های ۳ و ۴ برابر با $q_3=q_4=-1/60\times10^{-19}$ C است. (الف) اگر نیروی الکتروستاتیکی وارد بر ذرهٔ ۱ از طرف ذره‌های دیگر برابر صفر باشد، فاصلهٔ D میان مبدأ و ذرهٔ ۲ چقدر است؟ (ب) اگر ذره‌های ۳ و ۴ به محور x نزدیکتر شوند ولی تقارن آنها نسبت به این محور حفظ شود، آیا مقدار مورد نظر D بزرگتر از قسمت (الف) است یا کوچکتر یا مساوی با آن است؟ GO



شکل ۱۷-۳۰ مسئلهٔ ۲۰

Scanned by CamScanner

حل: (الف) برای راستای x داریم:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3\cos\theta}{\left(\frac{d}{\cos\theta}\right)^2}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_4}{\left(\frac{d}{\cos\theta}\right)^2}\cos\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{(d+D)^2}$$

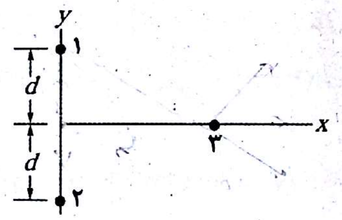
$$(\cos^3\theta)\left[\frac{q_3}{d_2}+\frac{q_4}{d^2}\right]=\frac{q_2}{(d+D)^2}\Rightarrow 2\frac{q_3}{d^2}\cos^3\theta=\frac{q_2}{(d+D)^2}$$

$$\frac{2(1/6\times10^{-19})}{4\times10^{-4}}(\cos 30)^3=\frac{8\times10^{-19}}{(0/02+D)^2}$$

$$\Rightarrow D=1/92\times10^{-2}\ \text{m}$$

(ب) زمانی که q_3 و q_4 به محور x نزدیک می‌شود، فاصله‌ی آنها تا بار q_1 کمتر شده، بنابراین نیروی بین آنها افزایش می‌یابد. بنابراین بار q_2 باید نزدیکتر باشد تا این افزایش نیرو را خنثی کند. بنابراین D کم می‌شود.

۲۱●●●- در شکل ۱۷-۳۱، ذره‌های ۱ و ۲ با بار $q_1=q_2=+3/20\times10^{-19}\ \text{C}$ روی محور y به فاصلهٔ $d=17/0\ \text{cm}$ از مبدأ واقع‌اند. ذرهٔ ۳ با بار $q_3=+6/40\times10^{-19}\ \text{C}$ بتدریج از $x=0$ تا $x=+5/0\ \text{cm}$ حرکت می‌کند. به ازای چه مقدارهایی از x بزرگی نیروی الکتروستاتیکی وارد بر ذرهٔ سوم از طرف دو ذرهٔ دیگر (الف) کمینه و (ب) بیشینه است؟ این بزرگیهای (پ) کمینه و (ت) بیشینه چقدرند؟



شکل ۱۷-۳۱ مسئلهٔ ۲۱

حل: (الف) و (ب) نیروی برآیند وارد بر ذره‌ی q_3 در راستای محور x است.

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{r^2}\cos\theta+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_3}{r^2}\cos\theta$$

$$F=\frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{r^2}\cos\theta$$

$$r^2=x^2+d^2\ ,\ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}}$$

$$\Rightarrow F=\frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3x}{(x^2+d^2)^{3/2}}$$

از این نیرو نسبت به x مشتق می‌گیریم و نقطه‌ی فرین آن را می‌یابیم.

$$\frac{dF}{dx}=0\Rightarrow(x^2+d^2)^{1/2}[(x^2+d^2)-3x^2]=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{d}{\sqrt2}=12\text{cm}$$

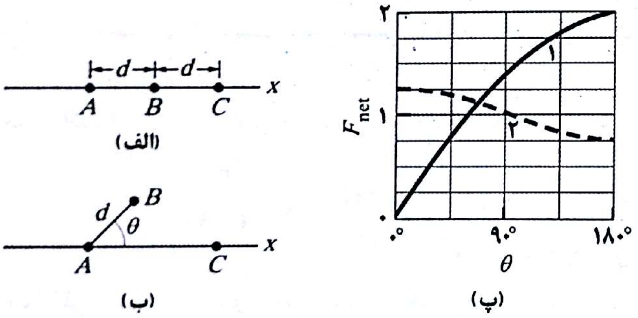
اگر مشتق دوم تابع را در $x=d/\sqrt2$ بدست آوریم، مقدار آن $-16\sqrt{d^2}/9\sqrt3 d^5$ می‌شود. چون این مقدار کوچکتر است صفر است. بنابراین نقطه‌ی فرین یک بیشینه است.

به ازای $x=0$ نیروی برآیند صفر است که کمینه نیرو می‌باشد.

(پ) صفر

(ت)
$$F=2(9\times10^{-19})\frac{(3/2\times10^{19})(6/4\times10^{-19})}{[(0/12)^2+(0/17)^2]^{3/2}}(0/12)$$
$$=4/9\times10^{-26}\ \text{N}$$

۲۲●●●- شکل ۱۷-۳۲ الف آرایشی از سه ذره باردار به فاصلهٔ d را نشان می‌دهد. ذره‌های A و C روی محور x ثابت شده‌اند، ولی ذرهٔ B می‌تواند روی دایره‌ای به مرکز ذرهٔ A حرکت کند. در حین این حرکت، خط شعاعی میان A و B با جهت مثبت محور x زاویهٔ θ می‌سازد (شکل ۱۷-۳۲ ب). منحنیها در شکل ۱۷-۳۲ پ، برای دو وضعیت، بزرگی F_{net} نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذرهٔ A از طرف ذره های دیگر را نشان می‌دهند. این نیروی خالص برحسب تابعی از زاویهٔ θ و برحسب مضربی از مقدار پایهٔ F_0 نشان داده شده است. مثلاً روی منحنی ۱، در $\theta=180°$، در می‌یابیم که $F_{net}=2F_0$ است. (الف) برای وضعیت مربوط به منحنی ۱، نسبت بار ذرهٔ C به بار ذرهٔ B (همراه با علامت) چقدر است؟ (ب) برای وضعیت مربوط به منحنی ۲، این نسبت چقدر است؟



شکل ۱۷-۳۲ مسئلهٔ ۲۲

حل: (الف) دو حالت $\theta=0$ و $\theta=180°$ را در نظر می‌گیریم در این دو حالت نیروهای وارد بر A کمینه و بیشینه است. در $\theta=0$ ، $F_A=0$ داریم:

$$\frac{kq_Bq_A}{d^2}=\frac{kq_Cq_A}{4d^2}\Rightarrow\left|\frac{q_C}{q_B}\right|=4\quad,\quad\frac{q_C}{q_B}=-4$$

(ب) با توجه به نمودار می‌توان مشاهده کرد

$$\theta=0\Rightarrow F_1=\frac{kq_Cq_A}{4d^2}+\frac{kq_Bq_A}{d^2}=1/25F_0$$

$$\theta=0\Rightarrow F_2=\frac{kq_Cq_A}{4d^2}-\frac{kq_Bq_A}{d^2}=0/75F_0$$

اگر دو رابطه را بازنویسی و بر هم تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{q_C+4q_B}{q_C-4q_B}=\frac{1/25}{0/75}\Rightarrow\frac{q_C}{q_B}=16$$

Scanned by CamScanner

●●●۲۳- یک پوستهٔ کروی نارسانا، با شعاع درونی ۴/۰cm و شعاع بیرونی ۶/۰cm دارای باری است که به طور یکنواخت در حجم بین سطحهای درونی و بیرونی آن توزیع شده است. *چگالی بار حجمی* ρ یعنی، بار در واحد حجم دارای یکای کولن بر متر مکعب است. برای این پوسته $\rho = b/r$، که در آن r فاصله برحسب متر از مرکز پوسته و $b = ۳/۰ \mu C/m^۲$ است. بار خالص موجود در پوسته چقدر است؟

حل:

$$q = \int dq = \int \rho dV = \int_{r_۱}^{r_۲} \frac{b}{r} ۴\pi r^۲ dr = ۲\pi b(r_۲^۲ - r_۱^۲)$$

که به ازای مقادیر داده شده خواهیم داشت $q = ۳/۸ \times ۱۰^{-۸}$ C .

بخش ۱۷-۵ بار کوانتیده است

●۲۴- اگر فاصلهٔ یونهای سدیم یک بار یونیده (Na^+، با بار $+e$) و کلر یک بار یونیده (Cl^-، با بار $-e$) در بلور نمک خوراکی $۲/۸۲ \times ۱۰^{-۱۰}$ m باشد، بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان این دو یون چقدر است؟

حل: $$F = k\frac{e^۲}{r^۲} = (۹\times۱۰^۹)\frac{(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})^۲}{(۲/۸۲\times۱۰^{-۱۰})^۲} = ۲/۹\times۱۰^{-۹}\ N$$

●۲۵- بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان دو نوع یون مشابه که به فاصلهٔ $۵/۰\times۱۰^{-۱۰}$ m از هم قرار گرفته‌اند برابر با $۳/۷\times۱۰^{-۹}$ N است. (الف) بار هر یون چقدر است؟ (ب) هر یون چند الکترون "از دست داده" است؟ (بنابراین، بار این یون نامتوازن است). SSM

حل: (الف) اگر q بار روی هر یون و r فاصله آنها باشد داریم

$$F = k\frac{q^۲}{r^۲} \Rightarrow q = r\sqrt{\frac{F}{k}} = (۵\times۱۰^{-۱۰})\sqrt{\frac{۳/۷\times۱۰^{-۹}}{۹\times۱۰^۹}}$$

$$q = ۳/۲\times۱۰^{-۱۹}\ C$$

(ب) اگر N تعداد الکترونهایی باشد که هر یون فاقد آن است داریم $q = Ne$ و در نتیجه می‌توان نوشت

$$N = \frac{q}{e} = \frac{۳/۲\times۱۰^{-۱۹}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}} = ۲$$

●۲۶- عبور جریان ۰/۳۰۰ A از قفسهٔ سینه می‌تواند باعث لرزش عضلهٔ قلب، بر هم زدن ضرب آهنگ عادی ضربان قلب و اختلال در جریان خون (و در نتیجه اکسیژن) به مغز شود. اگر این جریان به مدت ۲/۰۰ min تداوم یابد، چند الکترون رسانشی از قفسهٔ سینه عبور خواهد کرد؟

حل: مقدار بار پس از دو دقیقه برابر است با

$$q = (۰/۳۰۰)(۱۲۰) = ۳۶/۰\ C$$

در نتیجه داریم

$$q = Ne \Rightarrow ۳۶ = N(۱/۶\times۱۰^{-۱۹}) \Rightarrow N = ۲/۲۵\times۱۰^{۲۰}$$

●۲۷- چند الکترون باید از یک سکه برداشته شود تا بار باقیماندهٔ آن $+۱/۰\times۱۰^{-۷}$ C شود؟ ILW

حل:

$$q = Ne \Rightarrow N = \frac{q}{e} = \frac{۱/۰\times۱۰^{-۷}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}} = ۶/۲۵\times۱۰^{۱۱}$$

●۲۸- فاصلهٔ مرکز به مرکز دو قطره آب کروی کوچک با بار یکسان $-۱/۰۰\times۱۰^{-۱۶}$ C، برابر با ۱/۰۰cm است. (الف) بزرگی نیروی الکتروستاتیکی که بین آنها عمل می‌کند چقدر است؟ (ب) چند الکترون اضافی در هر قطره موجب نامتوازنی بار آنها شده است؟

حل: (الف)

$$F = k\frac{q^۲}{r^۲} = ۹\times۱۰^۹\frac{(۱/۰۰\times۱۰^{-۱۶})^۲}{(۱/۰۰\times۱۰^{-۲})^۲} = ۹\times۱۰^{-۱۹}\ N$$

(ب) اگر N تعداد الکترون‌های اضافی باشد، داریم

$$N = \frac{q}{e} = \frac{۱/۰۰\times۱۰^{-۱۶}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}} = ۶۲۵$$

●●۲۹- جو زمین به طور دائم با *پروتونهای پرتو کیهانی* که برآمده‌از جایی در فضا هستند بمباران می‌شود. اگر همهٔ پروتونها از جو بگذرند، به هر متر مربع از سطح زمین به طور متوسط ۱۵۰۰ پروتون در ثانیه برخورد می‌کند. جریان الکتریکی که با کل سطح زمین برخورد می‌کند چقدر است؟ ILW

حل: جریانی که در هر ثانیه بر یک متر مربع از زمین وارد می‌شود برابر است با

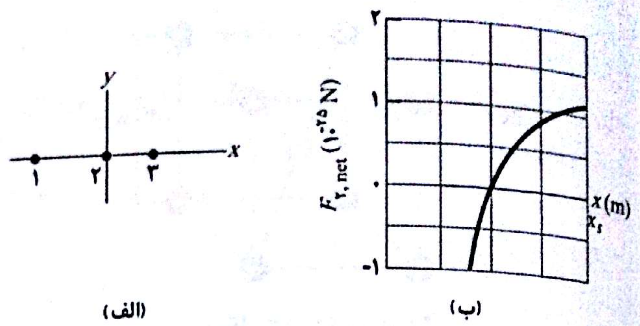
$$\frac{i}{A} = (۱۵۰۰)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹}) = ۲/۴\times۱۰^{-۱۶}\ C/s\cdot m^۲$$

بنابراین جریانی که از سطح زمین $(۴\pi R_E^۲)$ می‌گذرد برابر است با

$$i = (۲/۴\times۱۰^{-۱۶}\ C/s\cdot m^۲)۴\pi(۶/۳۷\times۱۰^۶\ m)^۲ = ۰/۱۲۳\ A$$

●●●۳۰- شکل ۱۷-۳۳ الف ذره‌های باردار ۱ و ۲ را که در مکانی روی محور x ثابت شده‌اند نشان می‌دهد. ذرهٔ ۱ دارای باری به‌بزرگی $|q_۱| = ۸/۰۰\ e$ است. ذرهٔ ۳ با بار $q_۳ = +۸/۰۰\ e$ در ابتدا روی محور x در نزدیکی ذرهٔ ۲ واقع است. حال ذرهٔ ۳ را بتدریج در سوی مثبت محور x حرکت می‌دهیم. در نتیجه، بزرگی نیروی الکتروستاتیکی خالص $\vec{F}_{۲,net}$ وارد بر ذرهٔ ۲ از طرف ذره های ۱ و ۳ تغییر می‌کند. شکل ۱۷-۳۳ ب مؤلفهٔ x نیروی خالص را برحسب تابعی از مکان x ذرهٔ ۳ نشان می‌دهد. مقیاس محور x با $x_s = ۰/۸۰m$ مشخص شده است. نمودار وقتی $x \to \infty$ دارای یک مجانب $F_{۲,net} = ۱/۵\times۱۰^{-۲۵}$ N است. بزرگی بار ذرهٔ ۲ برحسب مضربی از e، و علامت آن چیست؟

Scanned by CamScanner



شکل ۱۷-۳۳ مسئلهٔ ۳۰

حل: با توجه به نمودار دیده می‌شود که منحنی در $r=۰/۴\text{m}$ صفر را قطع می‌کند.

$$F=\frac{kq_۱q_۲}{r^۲}\Rightarrow q_۲=\frac{F}{kq_۱}r^۲$$

$$q_۲=\frac{(۱/۵\times۱۰^{-۲۵})(۰/۴)^۲}{(۸/۹۹\times۱۰^۹)(۸/۰۰\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}=۲/۰۸\times۱۰^{-۱۸}\text{C}$$

$$=۱۳e$$

●●۳۱- تعداد کولن‌های بار مثبت در $۲۵۰\ \text{cm}^۳$ آب (خنثی) را محاسبه کنید. (*راهنمایی:* اتم هیدروژن دارای یک پروتـون، و اتم اکسیژن دارای ۸ پروتون است).

حل: جرم آب برابر است بـا $m=\rho V=(۱)(۲۵۰)=۲۵۰g$ و تعداد مولکول‌های آن برابر است با

$$N=N_۰\frac{m}{M}=(۶/۰۲\times۱۰^{۲۳})\left(\frac{۲۵۰}{۱۸}\right)=۸/۳۶\times۱۰^{۲۴}$$

هر مولکول آب دارای ۱۰ پروتون است که بار هر کدام برابـر e است لذا بار کل برابر است با

$$Q=N(۱۰e)=(۸/۳۶\times۱۰^{۲۴})(۱۰)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})$$

$$=۱/۳۴\times۱۰^۷\ \text{C}$$

●●۳۲- در شکل ۱۷-۲۸، ذره‌های ۱ و ۲ در مکـان خـود روی محور x به فاصلهٔ $L=۸/۰۰\ \text{cm}$ ثابت شـده‌انـد. بارهـای آنهـا $q_۱=+e$ و $q_۲=-۲۷e$ اسـت. ذرهٔ ۳ بـا بـار $q_۳=+۴e$ روی خط میان ذره‌های ۱ و ۲ قـرار داده مـی‌شـود تـا آنهـا نیـروی الکتروستاتیکی خالص $\vec{F}_{۳,\text{net}}$ را بر آن وارد کنند. (الـف) ذرهٔ ۳ باید در چه مختصه‌ای قرار گیرد. تا بزرگی این نیرو کمینه شود؟ (ب) بزرگی کمینه چقدر است؟

حل:

$$F_{۳,\text{net}}=\frac{kq_۱q_۳}{x^۲}+\frac{kq_۲q_۳}{(L-x)^۲}=\frac{۴ke^۲}{x^۲}+\frac{۱۰۸ke^۲}{(L-x)^۲}$$

$$=۴ke^۲\left[\frac{۱}{x^۲}+\frac{۲۷}{(L-x)^۲}\right]$$

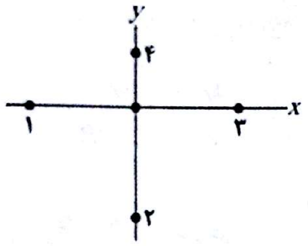
$$\frac{dF_{۳,net}}{dx}=۰\Rightarrow ۴ke^۲\left[\frac{-۲}{x^۳}-\frac{(۲۷)(۲)}{(L-x)^۳}\right]=۰\Rightarrow$$

$$x=\frac{L}{۴}\quad\Rightarrow\quad x=۲\text{cm}$$

(ب) این مقدار x را در رابطه $F_{۳,\text{net}}$ قـرار مـی‌دهـیم، خـواهیم داشت

$$F_{۳,\text{net}}=۹/۲۱\times۱۰^{-۲۴}\ \text{N}$$

●●●۳۳- در شکل ۱۷-۳۴، ذره‌های ۲ و ۴ بـا بـار $-e$ در مکـان خود واقع بـر محـور y، در $y_۲=-۱۰/۰\text{cm}$ و $y_۴=۵/۰۰\text{cm}$ ثابت شده‌اند. ذره‌های ۱ و ۳ با بار $-e$ می‌توانند در امتداد محور x حرکت کنند. ذرهٔ ۵ با بار $+e$ در مبدأ ثابت شده است. در ابتدا ذرهٔ ۱ در $x_۱=-۱۰/۰\ \text{cm}$ و ذرهٔ ۳ در $x_۳=۱۰/۰\ \text{cm}$ قـــرار دارند. (الف) ذرهٔ ۱ را باید تا چه مقدار x حرکت داد تـا جهـت نیـروی الکتریکـی خـالص وارد بـر ذرهٔ ۵ بـه انـدازهٔ $۳۰°$ پادساعتگرد بچرخد؟ (ب) وقتی ذرهٔ ۱ در مکان جدیـد خـود ثابت شود، ذرهٔ ۳ را باید تا چـه مقـدار x حرکـت داد تـا $\vec{F}_{\text{net}}$ بچرخد و به جهت اولیهٔ خود باز گردد؟



شکل ۱۷-۳۴ مسئلهٔ ۳۳

حل: (الف) با توجه به تقارن مسئله نیروی وارد بر $q_۰$ در آغاز در راستای محور y است و داریم

$$F_{\text{net}}=\frac{ke^۲}{d^۲}-\frac{ke^۲}{۴d^۲}=\frac{۳ke^۲}{۴d^۲}$$

حال اگر بار $q_۱$ را به اندازه x جابه‌جا کنیم، داریم:

$$F_x=-\frac{ke^۲}{(۲d-x)^۲}+\frac{ke^۲}{(۲d)^۲}=\frac{ke^۲[-۴d^۲+(۲d-x)^۲]}{۴d^۲(۲d-x)^۲}$$

$$F_y=\frac{۳ke^۲}{۴d^۲}$$

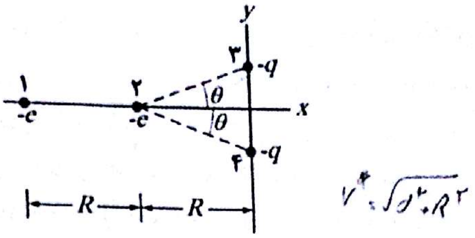
$$\tan(۱۲۰°)=\frac{F_y}{F_x}\Rightarrow -۱/۷۳=\frac{۳(۲d-x)^۲}{[-۴d^۲+(۲d-x)^۲]}$$

با ساده کردن رابطهٔ فوق و قرار دادن $d=۵\text{cm}$ و حـل معادلـه برای x خواهیم داشت $x=۳/۹۵\text{cm}$

(ب) برای اینکه دوباره شرایط تقارن حاصل شود باید بـار ۳ را نیز به همین اندازه بار ۵ نزدیک کنیم تـا دوبـاره مؤلفـه‌هـای x نیروها یکدیگر را خنثی کنند و برآیند در راستای y قرار گیرد.

●●●۳۴- شکل ۱۷-۳۵، الکترونهای ۱ و ۲ را روی محور x و یونهای باردار ۳ و ۴ را با بار یکسان $-q$ و در زاویه‌های یکسان θ نشان می‌دهد. الکترون ۲ می‌تواند آزادانه حرکت کند؛ سه ذرهٔ دیگر در مکان خود به فاصله‌های افقی R از الکترون ۲ ثابت شده‌اند و می‌خواهند الکترون ۲ را در مکان خود ثابت نگه دارند. برای مقدارهای از لحاظ فیزیکی ممکن $q\le۵e$، (الف) کوچکترین، (ب) دومین کوچکترین، و (پ) سومین کوچکترین مقدارهای θ برای آنکه الکترون ۲ در مکان خود ثابت بماند چقدر است؟

Scanned by CamScanner



شکل ۱۷-۳۵ مسئلهٔ ۳۴

حل: برای اینکه الکترون ۲ ثابت باقی بماند، باید برآیند نیروهای وارد بر آن صفر باشد

$$\cos\theta=\frac{R}{r}\Rightarrow r=\frac{R}{\cos\theta}$$

$$F_{۲۳}=F_{۲۴}\Rightarrow \frac{kq_۲q_۳}{r^۲}=\frac{kq_۲q_۴\cos^۲\theta}{R^۲}$$

$$F_{۱۲}=۲F_{۲۳}\cos\theta\Rightarrow \frac{ke^۲}{R^۲}=۲\frac{kqe\cos^۲\theta}{R^۲}\cos\theta$$

$$q=\frac{e}{۲\cos^۳\theta}$$

اما با در نظر گرفتن شرط $q\le ۵e$ داریم

$$\frac{e}{۲\cos^۳\theta}\le ۵e\Rightarrow \cos\theta\ge\frac{۱}{(۱۰)^{۱/۳}}$$

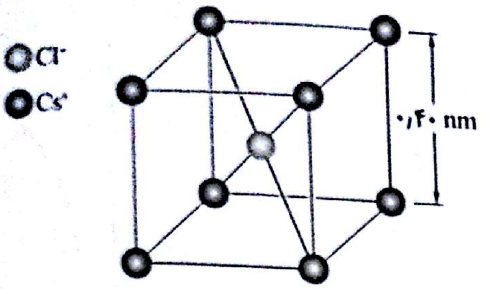
در نتیجه باید $\theta\le ۶۲/۳۴°$ باشد. چون مسئله مقادیر ممکن فیزیکی را خواسته و اینکه $q=Ne$ و $N=۱,...,۵$ است. از رابطه‌ایی که برای q به دست آوردیم، خواهیم داشت $\cos\theta=(۱/۲N)^{۱/۳}$.

(الف) برای کمترین مقدار زاویه به ازای $N=۱$ برابر با $۳۷/۵°$ می‌شود.

(ب) برای دومین کمترین مقدار زاویه به ازای $N=۲$ برابر $۵۰/۹۵°$ می‌شود.

(پ) سومین کمترین مقدار زوایه به ازای $N=۳$ برابر $۵۶/۶°$ می‌شود.

●●●۳۵- در بلورهای نمک سزیم کلراید، یونهای سزیم Cs^+، هشت گوشهٔ یک مکعب را می‌سازند و یون کلر Cl^- در مرکز آن مکعب قرار دارد (شکل ۱۷-۳۶). طول ضلع مکعب $۰/۴۰\,nm$ است. یونهای Cs^+ هر یک کمبود یک الکترون دارند (و بنابراین، بار هر کدام $+e$ است)، و یون Cl^- یک الکترون اضافی دارد (و بنابراین، بار آن $-e$ است). (الف) بزرگی نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر یون Cl^- ناشی از ۸ یون Cs^+ که در گوشه‌های مکعب قرار دارند، چقدر است؟ (ب) اگر یکی از یونهای Cs^+ در جای خود نباشد، گفته می‌شود که بلور دارای *نقص* (*نارستی*) است؛ بزرگی نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر Cl^- از طرف هفت یون Cs^+ به جای مانده چقدر است؟ SSM

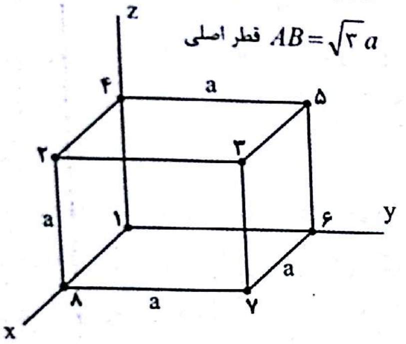


شکل ۱۷-۳۶ مسئلهٔ ۳۵

حل: (الف) هشت نیروی وارد بر یون $Cl^{-۱}$ دوبه‌دو یکدیگر را خنثی می‌کنند، در نتیجه نیروی کل وارد بر یون $Cl^{-۱}$ صفر می‌باشد.

قطر یک وجه $a'=\sqrt{۲}a$

قطر اصلی $AB=\sqrt{۳}\,a$



(ب) چهار نیروی وارد بر یون $Cl^{-۱}$ از طرف بارهای ۸، ۵، ۳ و ۴ دوبه‌دو یکدیگر را خنثی می‌کنند. نیروی وارد از طرف بارهای ۲ و ۶ نیز یکدیگر را خنثی می‌کنند و تنها نیروی وارد از طرف بار ۷ باقی می‌ماند.

$$F=F_۷=\frac{ke^۲}{\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}a\right)^۲}=\frac{(۹\times۱۰^۹)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})^۲}{\left(\frac{۳}{۴}\right)(۰/۴\times۱۰^{-۹})^۲}$$

$$=۱/۹۲\times۱۰^{-۹}\ N$$

بخش ۱۷-۶ بار الکتریکی پایسته است

●۳۶- الکترونها و پوزیترون‌ها توسط تبدیل‌های هسته‌ای پروتون‌ها و نوترون‌ها که به نام *واپاشی بتا* شناخته شده‌اند، ایجاد می‌شوند. (الف) اگر یک پروتون به یک نوترون تبدیل شود، آیا یک الکترون یا یک پوزیترون ایجاد می‌شود؟ (ب) اگر یک نوترون به یک پروتون تبدیل شود، آیا یک الکترون یا یک پوزیترون ایجاد می‌شود؟

حل: (الف) بار اولیه مثبت است و با توجه با پایستگی بار باید یک پرزیترون که دارای بار مثبت است گسیل شود.

(ب) بار اولیه صفر است لذا باید یک الکترون گسیل شود تا مجموع بار آن و پروتون صفر شود.

●۳۷- X را به کمک پیوست ج، در واکنش‌های هسته‌ای زیر شناسایی کنید:

(الف) $^۱H+^۹Be\rightarrow X+n$ ؛

(ب) $^{۱۲}C+^۱H\rightarrow X$ ؛

Scanned by CamScanner

(پ) $^{15}N+^{1}H\to^{4}He+X$ SSM

حل: مجموع عدد جرمی و اتمی در دو طرف واکنش‌ها باید مساوی باشند.

(الف) $^{1}_{1}H+^{9}_{4}B\to^{9}_{5}X+^{1}_{0}n$

بنابراین عنصر موردنظر ^{9}Be است.

(ب) $^{12}_{6}C+^{1}_{1}H\to^{13}_{7}X$

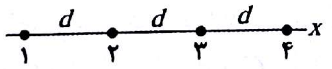
بنابراین عنصر موردنظر $^{13}_{7}N$ است.

(پ) $^{15}_{7}N+^{1}_{1}H\to^{4}_{2}He+^{12}_{6}X$

بنابراین عنصر موردنظر $^{12}_{6}C$ است.

مسئله‌های اضافی

۳۸- در شکل ۱۷-۳۷، چهار ذره روی محور x ثابت شده‌اند و به فاصلهٔ $d=2/00$ cm از یکدیگر قرار دارند. بارها عبارت‌اند از: $q_1=+2e$ ، $q_2=-e$ ، $q_3=+e$ ، و $q_4=+4e$، با $e=1/60\times10^{-19}$ C. برحسب نمادگذاری بردار یکه، نیروی الکتروستاتیک خالص وارد بر (الف) ذرهٔ ۱ و (ب) ذرهٔ ۲، از طرف ذره‌های دیگر چقدر است؟



شکل ۱۷-۳۷ مسئلهٔ ۳۸

حل: (الف) با توجه به جهت مثبت محور x داریم.

$$F_1=F_{12}-F_{13}-F_{14}$$

$$F_1=\frac{2ke^2}{d^2}-\frac{2ke^2}{4d^2}-\frac{8ke^2}{9d^2}=\frac{11ke^2}{18d^2}$$

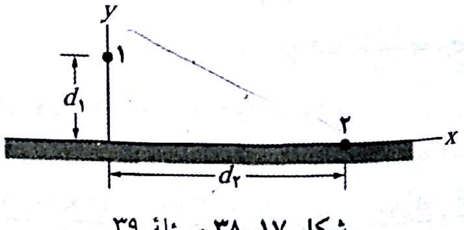
$$=\frac{(11)(9\times10^{9})(1/6\times10^{-19})^2}{(0/02)^2}=3/52\times10^{-25}\ N$$

(ب) در این حالت داریم

$$F_2=F_{23}+F_{24}-F_{21}$$

$$F_2=\frac{4ke^2}{4d^2}+\frac{ke^2}{d^2}-\frac{2ke^2}{d^2}=0$$

۳۹- درشکل ۱۷-۳۸، ذرهٔ ۱ با بار $+4e$ در فاصلهٔ $d_1=2/00$ mm بالای کف، و ذرهٔ ۲ با بار $+6e$ روی آن کف به فاصلهٔ افقی $d_2=6/00$ mm از ذرهٔ ۱ قرار دارد. مؤلفهٔ x نیروی الکتروستاتیکی وارد بر ذرهٔ ۲ از طرف ذرهٔ ۱ چقدر است؟ SSM



شکل ۱۷-۳۸ مسئلهٔ ۳۹

حل: چنانچه زاویه بین نیرو و محور x را θ درنظر بگیریم، در نتیجه مؤلفهٔ x نیروی F_{12} برابر است با:

$$F_x=F_{12}\cos\theta=\frac{kq_1q_2}{d_1^2+d_2^2}\times\frac{L_2}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}}$$

$$=1/31\times10^{-22}\ N$$

۴۰- ذره‌ای با بار Q در مبداء دستگاه مختصات ثابت شده است. در $t=0$ ، ذره‌ای ($q=4/00\ \mu C$ و $m=0/800\ g$) که در $x=20/0$ cm روی محور x واقع است، با تندی $50/0$ m/s در جهت مثبت y حرکت می‌کند. به ازای چه مقداری از Q ذرهٔ متحرک، حرکت دایره‌ای انجام می‌دهد؟ (از نیروی گرانشی وارد بر ذره چشمپوشی کنید.)

حل: برای اینکه حرکت دورانی برقرار باشد، خواهیم داشت:

$$\frac{kQq}{r^2}=m\frac{v^2}{r}\Rightarrow Q=\frac{mv^2R}{kq}$$

$$Q=\frac{(0/8\times10^{-3})(50)^2(0/2)}{(9\times10^{9})(4\times10^{-6})}=1/11\times10^{-5}\ C$$

۴۱- میلهٔ نارسانای بارداری به طول $2/00$ m و سطح مقطع $4/00\ cm^2$ در طرف مثبت محور x به گونه‌ای قرار دارد که یک سر آن در مبدأ است. *چگالی بار حجمی* ρ، بار در واحد حجم بر حسب کولن بر متر مکعب است. اگر ρ (الف) یکنواخت باشد، با مقدار $-4/00\ \mu C/m^3$ و (ب) نایکنواخت باشد، با مقداری که با رابطهٔ $\rho=bx^2$ داده می‌شود که در آن $b=-2/00\ \mu C/m^5$ است، چه مقدار الکترون اضافی روی میله قرار دارد؟

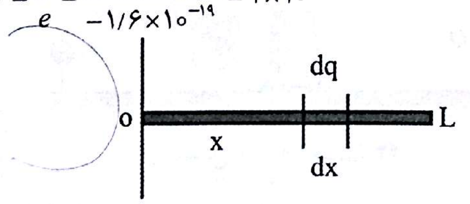
حل: (الف) ρ ثابت است لذا خواهیم داشت:

L طول و A سطح مقطع میله است

$$q=\int\rho\,dv=\rho v=\rho LA$$

$$=-(4\times10^{-6})(2)(4\times10^{-4})=-32\times10^{-10}\ C$$

$$N=\frac{q}{e}=\frac{-32\times10^{-10}}{-1/6\times10^{-19}}=2\times10^{10}$$



(ب) $\rho=-2\times10^{-6}x^2$, $dv=Adx$

$$q=\int\rho\,dv=\int\rho A\,dx$$

$$=\int_0^2(-2\times10^{-6}x^2)(4\times10^{-4})\,dx$$

$$=(-8\times10^{-10})\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2=-21/33\times10^{-10}\ C$$

$$N=\frac{q}{c}=\frac{-21/33\times10^{-10}}{-1/6\times10^{-19}}=1/33\times10^{10}$$

۴۲- بار $6/0\ \mu C$ به دو بخش تقسیم شده و سپس به فاصلهٔ $3/0$ mm از یکدیگر قرار داده شده‌اند. بیشینهٔ مقدار ممکن نیروی الکتروستاتیکی میان این دو بخش چقدر است؟

Scanned by CamScanner

حل: بار Q را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم، q و $Q-q$. در نتیجه نیروی بین این دو برابر است با:

$$F=\frac{k(Q-q)q}{r^۲}=\frac{k}{r^۲}(Qq-q^۲)$$

با تغییر q نیرو تغییر می‌کند، شرط بیشینه را برای F می‌نویسیم:

$$\frac{dF}{dq}=۰ \qquad \frac{k}{r^۲}(Q-۲q)=۰ \quad \Rightarrow \quad q=\frac{Q}{۲}$$

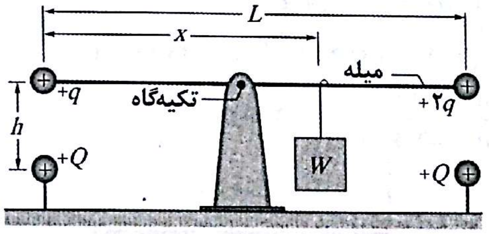
$$F_{\max}\Big|_{q=\frac{Q}{۲}}=\frac{k(\frac{Q}{۲})(\frac{Q}{۲})}{r^۲}=\frac{(۹\times۱۰^۹)(۳\times۱۰^{-۶})^۲}{(۹\times۱۰^{-۶})^۲}=۹۰۰۰\,\text{N}$$

۴۳- چند مگاکولن بار مثبت در ۱/۰۰ مول گاز هیدروژن مولکولی ($H_۲$) وجود دارد؟

حل: در هر مولکول گاز $H_۲$ دو پروتون وجود دارد، هر یک با بار $+e$ یک مول گاز داریم لذا تعداد اتم‌ها برابر با عدد آواگادرو است.

$$q=N_AZe=(۶/۰۲\times۱۰^{۲۳})(۲)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})$$
$$=۱/۹۲\times۱۰^۵\,\text{C}=۰/۱۹\,\text{MC}$$

۴۴- شکل ۱۷-۳۹ میله‌ای نارسانا، بدون جرم و بلند به طول L را نشان می‌دهد که در مرکزش لولا شده و با قطعه‌ای به وزن W که در فاصلهٔ x از انتهای چپ قرار دارد موازنه کرده است. به دو انتهای چپ و راست میله، کره‌های رسانای کوچکی به ترتیب با بارهای مثبت q و $۲q$ متصل است. به فاصلهٔ h مستقیماً زیر هر یک از این کره‌ها، کره‌ای با بار مثبت Q قرار دارد. (الف) هنگامی که میله افقی و موازنه کرده است، فاصلهٔ x چقدر است؟ (ب) h چه مقداری باید داشته باشد تا وقتی میله افقی و در توازن است هیچ نیروی قائمی بر تکیه‌گاه وارد نکند؟



شکل ۱۷-۳۹ مسئلهٔ ۴۴

حل: (الف) شرط تعادل دورانی حول تکیه را می‌نویسیم

$$\sum\tau=۰ \quad\Rightarrow\quad -F_۱\frac{L}{۲}-W(x-\frac{L}{۲})+F_۲\frac{L}{۲}=۰$$

$$-\frac{kQq}{h^۲}\left(\frac{L}{۲}\right)-W\left(x-\frac{L}{۲}\right)+\frac{۲kQq}{h^۲}\left(\frac{L}{۲}\right)=۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{L}{۲}\left(۱+\frac{kQq}{Wh^۲}\right)$$

(ب) شرط تعادل انتقال را در راستای قائم می‌نویسیم:

$$\sum F=۰ \quad\Rightarrow\quad \frac{kQq}{h^۲}+\frac{۲kQq}{h^۲}-W+F_N=۰$$

از شرط مسئله $F_N=۰$ لذا داریم.

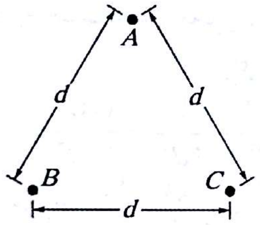
$$h=\sqrt{\frac{۳kQq}{W}}$$

۴۵- هر نوترون شامل یک کوارک «بالا» با بار $+۲e/۳$ و دو کوارک «پایین» هر یک با بار $-e/۳$ است. اگر فرض کنیم فاصلهٔ کوارکهای پایین در داخل نوترون برابر با $۲/۶\times۱۰^{-۱۵}$ m باشد، بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان آنها چقدر است؟

حل:

$$F=\frac{k\left(\frac{e}{۳}\right)^۲}{r^۲}=\frac{(۹\times۱۰^۹)\left(\frac{۱}{۹}\right)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})^۲}{(۲/۶\times۱۰^{-۱۵})^۲}$$
$$=۳/۷۹\,\text{N}$$

۴۶- در شکل ۱۷-۴۰، سه کرهٔ رسانای مشابه یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $d=۲۰/۰$ cm را تشکیل داده‌اند. شعاعهای کره‌ها بسیار کوچکتر از d است و بار کره‌ها عبارت‌اند از: $q_A=-۲/۰۰$ nC ، $q_B=-۴/۰۰$ nC، و $q_C=+۸/۰۰$ nC. (الف) بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان کره‌های A و C چقدر است؟ مرحله‌های زیر را در نظر بگیرید: A و B توسط سیم نازکی به‌هم‌متصل شده و سپس اتصال برداشته می‌شود؛ B توسط سیمی به زمین متصل شده و سپس اتصال برداشته می‌شود؛ B و C توسط سیمی به یکدیگر متصل می‌شوند و سپس اتصال قطع می‌شود. اکنون بزرگیهای نیروی الکتروستاتیکی (ب) میان کره‌های A و C، و (پ) میان کره‌های B و C چقدر است؟



شکل ۱۷-۴۰ مسئلهٔ ۴۶

حل: (الف)

$$F_{AC}=k\frac{q_Aq_C}{d^۲}=(۹\times۱۰^۹)\frac{(۲\times۱۰^{-۹})(۸\times۱۰^{-۹})}{(۰/۲)^۲}$$
$$=۳/۶\times۱۰^{-۶}\,\text{N}$$

(ب) پس از اتصال A و B بار آنها یکسان می‌شود.

$$q_A=q_B=\frac{-۲-۴}{۲}=-۳\,\text{nC}$$

پس از اتصال B به زمین $q_B=۰$ می‌شود. حال B و C به یکدیگر متصل می‌شود، بار هر کدام برابر است با:

$$q_B=q_C=\frac{۰+۸}{۲}=۴\,\text{nC}$$

در نتیجه بار نهایی کره‌ها برابر خواهد بود با

$$q'_A=-۳\,\text{nC} \qquad q'_B=q'_C=۴\,\text{nC}$$

$$F_{AC}=k\frac{q'_Aq'_C}{d^۲}=(۹\times۱۰^۹)\frac{(-۳\times۱۰^{-۹})(۴\times۱۰^{-۹})}{(۰/۲)^۲}$$
$$=-۲/۷\times۱۰^{-۶}\,\text{N}$$
جاذبه

(پ)

$$F_{BC}=k\frac{q'_Bq'_C}{d^۲}=(۹\times۱۰^۹)\frac{(۴\times۱۰^{-۹})^۲}{(۰/۲)^۲}$$
$$=۳/۶\times۱۰^{-۶}\,\text{N}$$
دافعه

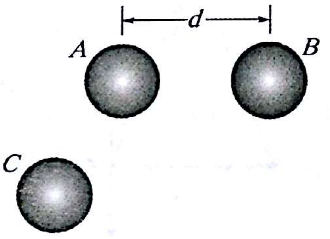
Scanned by CamScanner

۴۷- بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان دو بار نقطه‌ای $1/00\ C$ به فاصلهٔ (الف) $1/00\ m$ و (ب) $1/00\ km$ چقدر می‌شد اگر چنین بارهای نقطه‌ای وجود داشتند (که ندارند) و اگر چنین پیکربندی وجود می‌داشت؟

حل: (الف) $$F=(9\times10^9)\frac{(1)^2}{(1)^2}=9\times10^9\ N$$

(ب) $$F=(9\times10^9)\frac{(1)^2}{(10^3)^2}9000\ N$$

۴۸- در شکل ۱۷-۴۱، سه کرهٔ رسانای مشابه دارای این بارهای اولیه هستند: کرهٔ A، $4Q$؛ کرهٔ B، $-6Q$؛ و کرهٔ C، 0. کره‌های A و B در جای خود ثابت‌اند و در فاصلهٔ مرکز به مرکزی بسیار بزرگتر از اندازهٔ کره‌ها قرار دارند. دو آزمایش انجام می‌گیرد. در آزمایش ۱، کرهٔ C به کرهٔ A و سپس (به طور جداگانه) به کرهٔ B تماس داده شده و از هم جدا می‌شوند. در آزمایش ۲، که با همان شرایط اولیه صورت می‌گیرد، مرحله‌ها وارونه می‌شوند: کرهٔ C به کرهٔ B و سپس (به طور جداگانه) به کرهٔ A تماس داده شده و از هم جدا می‌شوند. نسبت نیروی الکتروستاتیکی بین A و B در پایان آزمایش ۲ به مقدار آن در پایان آزمایش ۱ چقدر است؟



شکل ۲۱-۴۱ مسئله‌های ۴۸ و ۶۷

حل: پس از اتمام کره C با کره A داریم

$$q_A=q_C=\frac{Q+\frac{Q}{2}}{2}=\frac{3Q}{4}$$

حال کره C را با کره B تماس می‌دهیم، داریم:

$$q_B=q_C=\frac{\frac{-Q}{4}+\frac{3Q}{4}}{2}=\frac{Q}{4}$$

در نتیجه نیروی بین کره‌های A و B برابر است با

$$F=(9\times10^9)\frac{\left(\frac{3Q}{4}\right)\left(\frac{Q}{4}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=4/69\times10^{-19}\ N$$

۴۹- می‌دانیم که بار منفی الکترون و بار مثبت پروتون برابرند. با این حال، فرض کنید مقدار آنها به اندازهٔ $0/00010\%$ با یکدیگر تفاوت داشته باشد. دو سکهٔ مسی که به فاصلهٔ $1/0\ m$ از هم قرار دارند، با چه نیرویی یکدیگر را می‌رانند؟ فرض کنید هر سکه شامل 3×10^{22} اتم مس باشد. (*راهنمایی:* اتم مس خنثی دارای ۲۹ پروتون و ۲۹ الکترون است.) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حل: با توجه به مسئله فرض می‌شود که بار پروتون به اندازه $10^{-4}\%$ بیشتر از بار الکترون است. در هر اتم حس این اختلاف بار برابر است با:

$$q=29\times10^{-6}e=4/64\times10^{-24}\ C$$

بار در هر سکه برابر است با

$$Q=(3\times10^{22})(4/64\times10^{-24})=0/139C$$

در نتیجه داریم

$$F=k\frac{Q^2}{r^2}=(9\times10^9)\frac{(0/139)^2}{(1)^2}=1/74\times10^8\ N$$

۵۰- فاصلهٔ دو پروتون باید چقدر باشد تا بزرگی نیروی الکتروستاتیکی وارد بر هر یک از دو پروتون برابر با بزرگی نیروی گرانشی وارد بر یک پروتون در سطح زمین باشد؟ SSM

حل: $$mg=k\frac{e^2}{r^2}$$

$$(1/67\times10^{-27})(9/8)=(9\times10^9)\frac{(1/6\times10^{-19})^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow r=0/119\ m$$

۵۱- از بار Q روی یک کرهٔ کوچک، کسر α به کرهٔ دومی در نزدیکی آن منتقل شده است. کره‌ها را می‌توان به صورت ذره در نظر گرفت.(الف)چه‌مقداری‌از α بزرگی F نیروی الکتروستاتیکی میان دو کره را بیشینه می‌کند؟ مقدارهای (ب) کمتر و (پ) بیشتر α که به ازای آنها F نصف مقدار بیشینه می‌شود، چقدر است؟

حل: (الف) بار روی یک کره αQ و بار روی کره دیگر را $(1-\alpha)Q$ درنظر می‌گیریم، داریم

$$F=k\frac{\alpha(1-\alpha)Q^2}{d^2}$$

مشتق F را نسبت به α برابر صفر قرار می‌دهیم مقدار $\alpha=\frac{1}{2}$ برای F_{max} به دست می‌آید، یعنی وقتی که بار Q به دو قسمت مساوی تقسیم شود نیروی بین دوبار بیشینه است.

(ب) و (پ) $$F_{max}=\frac{kQ^2}{4d^2}\qquad F=\frac{1}{2}F_{max}$$

$$\frac{k\alpha(1-\alpha)Q^2}{d^2}=\left(\frac{1}{2}\right)\frac{kQ^2}{4d^2}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=0/85\\ \alpha_2=0/14\end{cases}$$

۵۲- اگر گربه‌ای در یک روز خشک، چند بار خود را به شلوار کتان شما بمالد، انتقال بار میان موهای گربه و کتان می‌تواند بار اضافی $-2/00\ \mu C$ را روی شما بر جای گذارد. (الف) چه تعداد الکترون میان شما و گربه منتقل شده است؟

شما بتدریج از طریق کف زمین بی بار می‌شوید، ولی اگر به جای اینکه منتظر بمانید، بی درنگ به سوی یک شیر آب

Scanned by CamScanner

بروید، ممکن است هنگامی که انگشتان خود را نزدیک شیر آب می‌برید، به طور ناگهانی یک جرقهٔ دردناک ظاهر شود. (ب) در این جرقه، آیا الکترونها از شما به شیر آب حرکت می‌کنند یا برعکس؟ (پ) درست پیش از آنکه جرقه ظاهر شود، آیا شما در شیر آب بار مثبت القا می‌کنید یا بار منفی؟ (ت) اگر به جای شما، گربه پنجه‌اش را به شیر آب برساند، الکترونها در جرقهٔ حاصل به چه طریق حرکت می‌کنند؟ (ث) اگر در یک روز خشک، گربه‌ای را با دست لخت نوازش دهید، باید مواظب باشید انگشتان خود را نزدیک بینی گربه نبرید، وگرنه با جرقه‌ای به آن صدمه می‌زنید. با توجه به اینکه موهای گربه عایق است، توضیح دهید چگونه جرقه می‌تواند رخ دهد؟

حل: (الف) الکترون $n=\frac{q}{e}=\frac{۲/۰۰\times ۱۰^{-۶}}{۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}}=۱/۲۵\times ۱۰^{۱۳}$

(ب) بار روی بدن L منفی شده و الکترون اضافه دارد که در اتصال با شیر آب این الکترون‌ها به شیر آب منتقل شده و بدن ما خنثی می‌شود.

(پ) وقتی دست با بار منفی به شیر آب نزدیک می‌شود الکترون‌های روی شیر آب دور می‌شوند و لذا می‌توان گفت بار مثبت القا شده است.

(ت) چون بینی گربه مو ندارد یعنی پوشش عایق ندارد لذا احتمال دارد بین دست شما و بینی گربه جرقه بوجود آید.

۵۳- (الف) چه بارهای مثبت یکسانی باید روی زمین و ماه قرار داده شوند تا جاذبهٔ گرانشی آنها را خنثی کند؟ (ب) چرا برای حل این مسئله نیازی به دانستن فاصلهٔ آنها ندارید؟ (پ) چند کیلوگرم یون هیدروژن (یعنی، پروتون) برای تهیهٔ بار مثبت محاسبه شده در قسمت (الف) مورد نیاز است؟

حل: (الف) $G\frac{m_e m_m}{r^۲}=k\frac{q^۲}{r^۲}$

$$(۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱})(۵/۹۸\times ۱۰^{۲۴})(۷/۳۶\times ۱۰^{۲۳})=(۹\times ۱۰^{۹})q^{۲}$$

$$q=۵/۷۱\times ۱۰^{۱۳}\ \mathrm{C}$$

(ب) چون فاصله از رابطه حذف می‌شود.

(پ) $n=\frac{q}{e}=\frac{۵/۷۱\times ۱۰^{۱۳}}{۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}}=۳/۵۷\times ۱۰^{۳۲}$

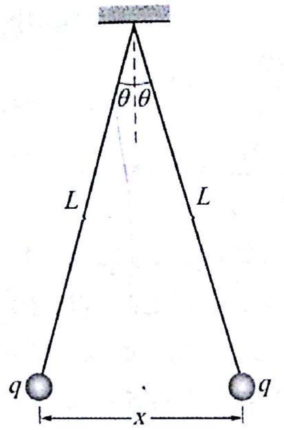
تعداد پروتون‌ها، n برابر تعداد اتم‌های هیدروژن است. هر پروتون نیز دارای جرم $۱/۶۷\times ۱۰^{-۲۷}\ \mathrm{kg}$ است، لذا داریم:

$$m=(۳/۵۷\times ۱۰^{۳۲})(۱/۶\times ۱۰^{-۲۷})=۵/۹۶\times ۱۰^{۵}\ \mathrm{kg}$$

۵۴- در شکل ۱۷-۴۲، دو گوی رسانای کوچک با جرم یکسان m و بار یکسان q از نخهایی نارسانا به طول L آویزان‌اند. فرض کنید θ به اندازه‌ای کوچک است که می‌توان $\tan\theta$ را با مقدار تقریباً برابر آن، $\sin\theta$، جایگزین کرد. (الف) نشان دهید که

$$x=\left(\frac{q^{۲}L}{۲\pi\varepsilon_{۰}mg}\right)^{۱/۳}$$

فاصلهٔ x گویها به هنگام تعادل را به دست می‌دهد. (ب) اگر $L=۱۲۰\ \mathrm{cm}$، $m=۱۰\ \mathrm{g}$، و $x=۵/۰\ \mathrm{cm}$ باشد، $|q|$ چقدر است؟

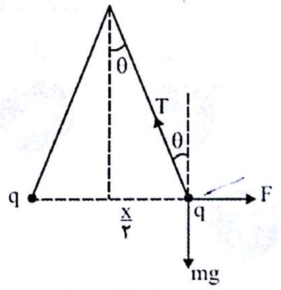


شکل ۱۷-۴۲ مسئله‌های ۵۴ و ۵۵

حل: (الف) از شرط تعادل داریم

$$F=T\sin\theta$$
$$mg=T\cos\theta$$

از تقسیم دو رابطه $\tan\theta=\frac{F}{mg}\quad\Rightarrow\quad F=mg\tan\theta$



با توجه به کوچک بودن θ می‌توان نوشت

$$\tan\theta=\sin\theta=\frac{\frac{x}{۲}}{L}=\frac{x}{۲L}$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{kq^{۲}}{x^{۲}}=mg\left(\frac{x}{۲L}\right)\quad\Rightarrow\quad x=\left(\frac{۲kq^{۲}L}{mg}\right)^{۱/۳}$$

(ب) $(۹\times ۱۰^{۹})q^{۲}=(۱۰\times ۱۰^{-۳})(۹/۸)\frac{(۵\times ۱۰^{-۲})^{۳}}{(۲)(۰/۱۲)}$

$$\Rightarrow q=۲/۴\times ۱۰^{-۸}\ \mathrm{C}$$

۵۵- (الف) اگر یکی از گوی‌های مسئلهٔ ۵۴ تخلیه شود (مثلاً بار q خود را به زمین بدهد) توضیح دهید که برای گویها چه رخ می‌دهد. (ب) فاصلهٔ تعادل جدید x را با استفاده از مقدارهای دادهٔ شدهٔ L و m و مقدار محاسبه شدهٔ $|q|$ به دست آورید.

حل: (الف) وقتی یکی از گوی‌ها تخلیه شوند، دوگوی به هم نزدیک شده و تماس می‌یابند و در این حالت بار بین آنها تقسیم می‌شود. بار جدید گوی‌ها برابر است با:

$$q'=\frac{q}{۲}=۱/۲\times ۱۰^{-۸}\ \mathrm{C}$$

Scanned by CamScanner

(ب) فاصله جدید بین دو گوی x' با قرار دادن q' در رابطه x به دست می‌آید، $x' = ۰/۰۳۱\,m$

۵۶- در شکل ۱۷-۲۴، ذره‌های ۱ و ۲ در مکان خود ثابت شده‌اند، ولی ذرهٔ ۳ می‌تواند آزادانه حرکت کند. اگر نیروی الکتروستاتیکی وارد بر ذرهٔ ۳ از طرف ذره‌های ۱ و ۲ برابر صفر و $L_{۲۳} = ۲/۰۰\,L_{۱۲}$ باشد، نسبت $q_۱/q_۲$ چقدر است؟

حل: برای اینکه نیروی خالص بر $q_۳$ صفر باشد داریم:

$$\frac{kq_۱q_۳}{(L_{۱۲}+L_{۲۳})^۲} = \frac{kq_۲q_۳}{(L_{۲۳})^۲} \Rightarrow \frac{q_۱}{۹L_{۱۲}^۲} = \frac{q_۲}{۴L_{۱۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{q_۱}{q_۲} = \frac{۹}{۴}$$

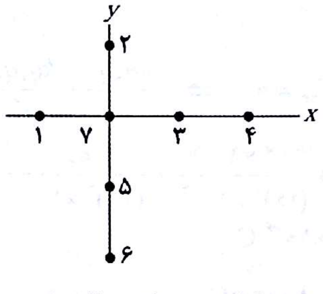
چون نیروها اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند بارهای $q_۱$ و $q_۲$ ناهمنام‌اند.

۵۷- بار کل ۷۵/۰ kg الکترون برحسب کولن چقدر است؟

حل: $N = \frac{M}{m_e} = \frac{۷۵}{۹/۱\times۱۰^{-۳۱}} = ۸/۲۳\times۱۰^{۳۱}$ الکترون

$$q = -Ne = -(۸/۲۳\times۱۰^{۳۱})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹}) = -۱/۳۲\times۱۰^{+۱۳}\,C$$

۵۸- چنانکه در شکل ۱۷-۴۳ دیده می‌شود، شش ذرهٔ باردار، ذرهٔ ۷ را که به فاصله‌های شعاعی $d = ۱/۰\,cm$ یا $۲d$ از آنها قرار دارد احاطه کرده‌اند. بارها عبارت‌اند از: $q_۱ = +۲e$ ، $q_۲ = +۴e$ ، $q_۳ = +e$، $q_۴ = +۴e$ ، $q_۵ = +۲e$ ، $q_۶ = +۸e$ ، $q_۷ = +۶e$، با $e = ۱/۶۰\times۱۰^{-۱۹}\,C$. بزرگی نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذرهٔ ۷ چقدر است؟



شکل ۱۷-۴۳ مسئلهٔ ۵۸

حل:

$$\vec{F}_{۷۱} = \frac{k(۶e)(Fe)}{d^۲}\hat{i} = ۱۲\frac{ke^۲}{d^۲}\hat{i}$$

$$\vec{F}_{۷۳} = \frac{k(۶e)(e)}{d^۲}(-\hat{i}) = -۶\frac{ke^۲}{d^۲}\hat{i}$$

$$\vec{F}_{۷۴} = \frac{k(۶e)(۴e)}{(۲d)^۲}\hat{i} = -۶\frac{ke^۲}{d^۲}\hat{i}$$

$$\vec{F}_{۷۲} = \frac{k(۶e)(۴e)}{d^۲}\hat{j} = -۲۴\frac{ke^۲}{d^۲}\hat{j}$$

$$\vec{F}_{۷۵} = \frac{k(۶e)(۲e)}{d^۲}\hat{j} = +۱۲\frac{ke^۲}{d^۲}\hat{j}$$

$$\vec{F}_{۷۶} = \frac{k(۶e)(۸e)}{(۲d)^۲}\hat{j} = ۱۲\frac{ke^۲}{d^۲}\hat{j}$$

$$\vec{F}_{۷} = (۱۲-۶-۶)\frac{ke^۲}{d^۲}\hat{i} + (-۲۴+۱۲+۱۲)\frac{ke^۲}{d^۲}\hat{j} = ۰$$

۵۹- سه ذرهٔ باردار تشکیل یک مثلث می‌دهند: ذرهٔ ۱ با بار $Q_۱ = ۸۰/۰\,nC$ در مختصات xy (۰ , ۳/۰۰ mm) ، ذرهٔ ۲ با بار $Q_۲$ در (۰,−۳/۰۰ mm) ، و ذرهٔ ۳ با بار $q = ۱۸/۰\,nC$ در (۴/۰۰ mm,۰). برحسب نمادگذاری بردار یکه، نیروی الکتروستاتیکی وارد بر ذرهٔ ۳ از طرف دو ذرهٔ دیگر چقدر است، در صورتی که $Q_۲$ برابر با (الف) ۸۰/۰nC و (ب) −۸۰/۰nC باشد؟

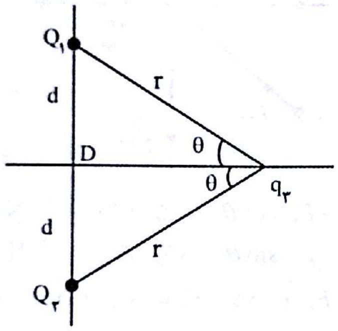
حل:

$$\tan\theta = \frac{d}{D} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \theta = ۳۷°$$

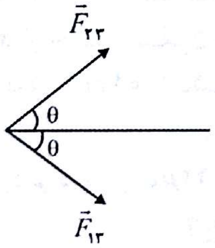
$$r = \sqrt{d^۲ + D^۲} = \sqrt{۹+۱۶} = ۵\,mm$$

$$F_{۱۳} = F_{۲۳} = \frac{kQ_۱q_۳}{r^۲} = \frac{(۹\times۱۰^۹)(۸۰\times۱۰^{-۹})(۱۸\times۱۰^{-۹})}{۲۵\times۱۰^{-۶}}$$

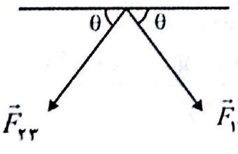
$$= ۰/۵۱۸\,N$$



(الف) $F_{۳x} = (۲)(۰/۵۱۸)(\cos ۳۷°) = ۰/۸۲۷\,N$



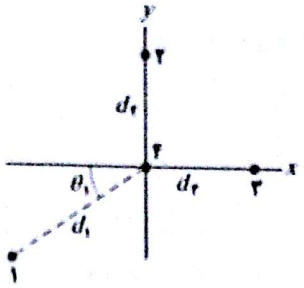
$$F_{۳y} = (۲)(۰/۵۱۸)(\sin ۳۷°) = ۰/۶۲۷$$



$$\vec{F}_۳ = F_{۳x}\hat{i} - F_{۳y}\hat{j} = (۰/۸۲۷\hat{i} - ۰/۶۲۷\hat{j})\,N$$

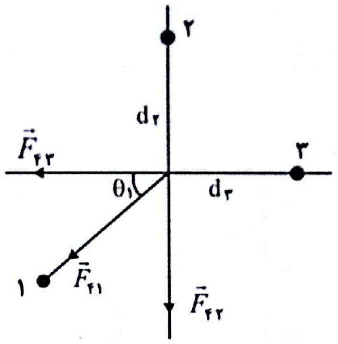
۶۰- در شکل ۱۷-۴۴، (الف) بزرگی و (ب) جهت نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذرهٔ ۴ از طرف سه ذرهٔ دیگر چیست؟ هر چهار ذره در صفحهٔ xy ثابت شده‌اند، و $q_۱ = -۳/۲۰\times۱۰^{-۱۹}\,C$ ، $q_۲ = +۳/۲۰\times۱۰^{-۱۹}\,C$، $q_۳ = +۶/۴۰\times۱۰^{-۱۹}\,C$، $q_۴ = +۳/۲۰\times۱۰^{-۱۹}\,C$، $\theta_۱ = ۳۵/۰°$، $d_۱ = ۳/۰۰\,cm$ ، و $d_۲ = d_۳ = ۲/۰۰\,cm$.

Scanned by CamScanner



شکل ۱۷-۴۴ مسئلهٔ ۶۰

حل: با توجه به مقادیر داده شده داریم $F_{۴۱} = ۱/۰۲\times ۱۰^{-۲۴}\ \mathrm{N}$، $F_{۴۲} = ۲/۳۰۴\times ۱۰^{-۲۴}\ \mathrm{N}$ و $F_{۴۳} = ۴/۶۰۸\times ۱۰^{-۲۴}\ \mathrm{N}$.



$$F_{۴x} = -F_{۴۳} - F_{۴۱}\cos\theta_۱ = -۵/۶۲\times ۱۰^{-۲۴}\ \mathrm{N}$$
$$F_{۴y} = -F_{۴۲} - F_{۴۱}\sin\theta_۱ = -۲/۸۹\times ۱۰^{-۲۴}\ \mathrm{N}$$
$$\vec{F}_۴ = F_{۴x}\hat{i} + F_{۴y}\hat{j} \Rightarrow \vec{F}_۴ = (-۵/۶۲\hat{i}\times ۲/۸۹\hat{j})\mathrm{N}$$

۶۱- دو بار نقطه‌ای $۳۰\ \mathrm{nC}$ و $-۴۰\ \mathrm{nC}$ روی محور x، به ترتیب در مبدأ و در $x = ۷۲\mathrm{cm}$ ثابت شده‌اند. ذره‌ای با بار $۴۲\ \mu\mathrm{C}$ در $x = ۲۸\mathrm{cm}$ از حالت سکون رها می‌شود. اگر بزرگی شتاب اولیهٔ ذره $۱۰۰\ \mathrm{km/s^۲}$ باشد، جرم ذره چقدر است؟

حل: نیروی خالص وارد بر ذرهٔ بار $q_۳ = ۴۲\mu c$

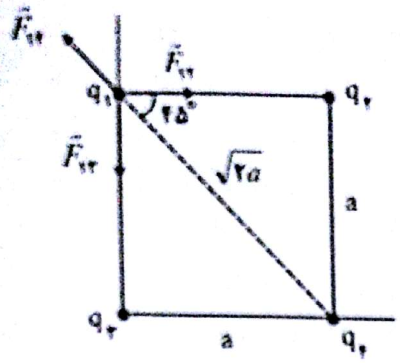
$$F = \frac{kq_۳q_۱}{d^۲} + \frac{kq_۳q_۲}{(d-x)^۲}$$
$$= \frac{(۹\times ۱۰^۹)(۴۲\times ۱۰^{-۶})(۳۰\times ۱۰^{-۹})}{(۰/۷۲)^۲} + \frac{(۹\times ۱۰^۹)(۴۲\times ۱۰^{-۶})(-۴۰\times ۱۰^{-۹})}{(۰/۴۴)^۲}$$
$$= ۰/۲۲\mathrm{N}$$

در نتیجه داریم

$$F = ma \Rightarrow m = \frac{F}{a} = \frac{۰/۲۲}{۱۰۰\times ۱۰^۳} = ۲/۲\times ۱۰^{-۶}\ \mathrm{kg}$$

۶۲- در شکل ۱۷-۲۳، چهار ذره یک مربع تشکیل داده‌اند. بارها عبارت‌اند از: $q_۱ = +Q$ ، $q_۲ = q_۳ = q$ و $q_۴ = -۲/۰۰\ Q$. اگر نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذرهٔ ۱ برابر صفر باشد، نسبت q/Q چقدر است؟

حل: برای اینکه بار $q_۱$ در تعادل باشد، شرط آن این است که q و Q ناهمنام باشند.

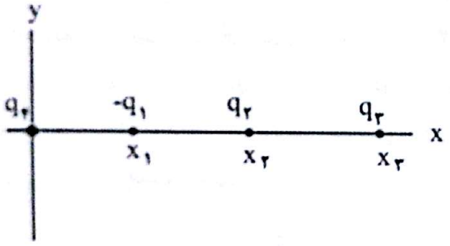


$$F_{۱۲} = F_{۱۳} = F_{۱۴}\cos ۴۵°$$
$$\frac{kq_۱q_۲}{a^۲} = \left(\frac{kq_۱q_۴}{(\sqrt{۲}a)^۲}\right)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) \Rightarrow \frac{q}{Q} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۶۳- بارهای نقطه‌ای $+۶/۰\ \mu\mathrm{C}$ و $-۴/۰\ \mu\mathrm{C}$ روی محور x، به ترتیب در $x = ۸/۰\ \mathrm{m}$ و $x = ۱۶\ \mathrm{m}$ ثابت شده‌اند. چه باری باید در $x = ۲۴\mathrm{m}$ قرار داده شود تا به هر باری که در مبدأ قرار گیرد هیچ نیروی الکتروستاتیکی وارد نشود؟

حل:

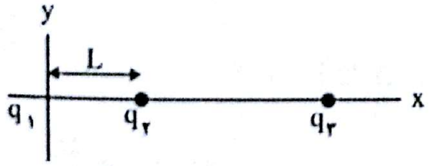
$x_۱ = ۸\ \mathrm{cm}$
$x_۲ = ۱۶\ \mathrm{cm}$
$x_۳ = ۲۴\ \mathrm{cm}$



$$F_{۴۱} + F_{۴۲} + F_{۴۳} = ۰ \Rightarrow \frac{kq_۴q_۱}{x_۱^۲} + \frac{kq_۴q_۲}{x_۲^۲} + \frac{kq_۴q_۳}{x_۳^۲} = ۰$$
$$\frac{۶\times ۱۰^{-۶}}{(۸)^۲\times ۱۰^{-۴}} + \frac{-۴\times ۱۰^{-۶}}{(۱۶)^۲\times ۱۰^{-۴}} + \frac{q_۳}{(۲۴)^۲\times ۱۰^{-۴}} = ۰ \Rightarrow$$
$$q_۳ = -۴۵\times ۱۰^{-۶}\ \mathrm{C}$$

۶۴- در شکل ۱۷-۲۸، ذرهٔ ۱ با بار $-۸۰/۰\ \mu\mathrm{C}$ و ذرهٔ ۲ با بار $+۴۰/۰\ \mu\mathrm{C}$ روی محور x به فاصلهٔ $L = ۲۰/۰\mathrm{cm}$ ثابت شده‌اند. در صورتی‌که ذرهٔ ۳ (الف) در $x = ۴۰/۰\mathrm{cm}$ و (ب) در $x = ۸۰/۰\ \mathrm{cm}$ واقع شده باشد، نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر آن برحسب بردار یکه چیست؟ اگر نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذرهٔ ۳ از طرف ذره‌های ۱ و ۲ برابر با صفر باشد، مختصهٔ (پ) x و (ت) y ذرهٔ ۳ باید چقدر باشد؟

حل:



(الف) $x = ۴۰\mathrm{cm}$

Scanned by CamScanner

$$\vec{F}_۳ = \vec{F}_{۳۱} + \vec{F}_{۳۲} = (-F_{۳۱} + F_{۳۲})\hat{i}$$

$$\left[-\frac{(۹\times۱۰^۹)(۲۰\times۱۰^{-۶})(۴۰\times۱۰^{-۶})}{(۰/۴)^۲} + \frac{(۹\times۱۰^۹)(۲۰\times۱۰^{-۶})(۸۰\times۱۰^{-۶})}{(۰/۲)^۲}\right]\hat{i}$$

$$= ۹۰\hat{i}\,\text{N}$$

(ب) $x = ۸۰\,\text{cm}$، با روش مشابه و در نظر گرفتن $r_{۳۱} = ۰/۸\,\text{cm}$ و $r_{۳۲} = ۰/۶\,\text{cm}$، داریم

$$\vec{F}_۳ = -۲/۵\,\hat{i}$$

(پ) $$\vec{F}_{۳x} = \left[\frac{kq_۳q_۲}{(x-l)^۲} - \frac{kq_۳q_۱}{x^۲}\right]\hat{i} = ۰ \Rightarrow \frac{q_۲}{(x-l)^۲} = \frac{q_۱}{x^۲}$$

$$\frac{۲}{x-۱} = \frac{۲\sqrt{۲}}{x} \Rightarrow x = ۶۸\,\text{cm}$$

(ت) از نتیجه بالا مشاهده می‌شود که $y = ۰$ می‌شود.

۶۵- در واپاشی پرتوزای معادلهٔ ۱۷-۱۳، یک هستهٔ ^{۲۳۸}U به ^{۲۳۴}Th و یک ^۴He خارج شده تبدیل می‌شود. (اینها هسته‌اند نه اتم، در نتیجه الکترونها وارد نشده‌اند.) وقتی فاصلهٔ میان ^{۲۳۴}Th و ^۴He برابر $۹/۰\times۱۰^{-۱۵}\,\text{m}$ است، بزرگیهای (الف) نیروی الکتروستاتیکی میان آنها و (ب) شتاب ذرهٔ ^۴He چقدر است؟

حل: (الف) هسته هلیوم دارای ۲ پروتون و هستهٔ توریم دارای ۹۰ پروتون است، لذا داریم:

$$q_۱ = ۹۰e \quad q_۲ = ۲e$$

$$F = \frac{kq_۱q_۲}{r^۲} = \frac{(۹\times۱۰^۹)(۹۰)(۲)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})^۲}{(۹\times۱۰^{-۱۵})^۲}$$

$$= ۵۱۲\,\text{N}$$

(ب) جرم هستهٔ هلیوم از ۲ پروتون و ۲ نوترون تشکیل شده، لذا داریم:

$$\text{F} = \text{ma} \Rightarrow ۵۱۲ = (۴)(۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷})\text{a}$$

$$\Rightarrow \text{a} = ۷/۶۶\times۱۰^{۲۸}\,\text{m/s}$$

۶۶- دو کرهٔ باردار مثبت کوچک دارای بار کل $۵/۰\times۱۰^{-۵}\,\text{C}$ هستند. اگر هنگامی که فاصلهٔ دو کره $۲/۰\,\text{m}$ است، هر کره با نیروی الکتروستاتیکی $۱/۰\,\text{N}$ توسط دیگری دفع شود، بار روی کرهٔ با بار کوچکتر چقدر است؟

حل:

$$q_۱ + q_۲ = ۵\times۱۰^{-۵}\,\text{c} \qquad (۱)$$

$$F = \frac{kq_۱q_۲}{r^۲} \Rightarrow q_۱q_۲ = \frac{Fr^۲}{k} = \frac{(۱)(۴)}{۹\times۱۰^۹} = ۴/۴۴\times۱۰^{-۱۰}\,C^۲ \qquad (۲)$$

دو معادله (۱) و (۲) در دست است و می‌توان به طور همزمان حل کرده و به سادگی $q_۱ = ۳/۸۴\times۱۰^{-۵}\,\text{C}$ و $q_۲ = ۱/۲\times۱۰^{-۵}\,\text{C}$ به دست می‌آید.

۶۷- بارهای اولیه روی سه کرهٔ فلزی مشابه شکل ۱۷-۴۱ عبارت‌اند از: کرهٔ A، Q؛ کرهٔ B، $-Q/۴$؛ و کرهٔ C، $Q/۲$، که در آنها $Q = ۲/۰۰\times۱۰^{-۱۴}\,\text{C}$ است. کره‌های A و B در جای خود ثابت‌اند، و فاصلهٔ مرکز به مرکز آنها $d = ۱/۲۰\,\text{m}$ است، که بسیار بزرگتر از اندازهٔ کره‌هاست. کرهٔ C ابتدا به کرهٔ A و سپس به کرهٔ B تماس داده شده و آنگاه برداشته می‌شود. بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان کره‌های A و B چقدر است؟

حل: پس از تماس کره C با کره A بار هر دو کره یکسان می‌شود و برابر است با

$$q_C = q_A = \frac{\frac{Q}{۲} + Q}{۲} = \frac{۳}{۴}Q$$

حال کره C را با کره B تماس داده شود بار هر یک پس از تماس برابر است با

$$q_B = q_C = \frac{-\frac{Q}{۴} + \frac{۳Q}{۴}}{۲} = \frac{Q}{۴}$$

در نتیجه نیروی بین کره A و کره B برابر است با

$$F = \frac{(۹\times۱۰^۹)\left(\frac{۳Q}{۴}\right)\left(\frac{Q}{۴}\right)}{(۱/۲)^۲} = ۴/۷\times۱۰^{-۱۹}\,\text{N}$$

۶۸- الکترونی در نزدیکی سطح زمین در خلأ است و در $y = ۰$ روی محور قائم y قرار دارد. الکترون دومی در چه مقداری از y باید قرار گیرد تا نیروی الکتروستاتیکی وارد بر الکترون اول برابر با نیروی گرانشی وارد بر آن باشد؟

حل: شرط تعادلی نیروی الکترواستاتیک و نیروی گرانش را درنظر می‌گیریم

$$mg = \frac{ke^۲}{y^۲}$$

لذا داریم

$$(۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷})(۹/۸) = \frac{(۹\times۱۰^۹)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})^۲}{y^۲}$$

$$\Rightarrow \quad y = ۵/۱\text{m}$$

۶۹- در شکل ۱۷-۲۸، ذرهٔ ۱ با بار $-۵/۰۰q$ و ذرهٔ ۲ با بار $+۲/۰۰\,q$ در فاصلهٔ L روی محور x ثابت شده‌اند. اگر ذرهٔ ۳ با بارنامعلوم $q_۳$ به گونه‌ای قرار داده شود که نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر آن از طرف ذره‌های ۱ و ۲ برابر صفر باشد، مختصهٔ (الف) x و (ب) y ذرهٔ ۳ چه باید باشد؟ SSM

حل: (الف) نیروها دافعه‌اند و شرط لازم خواهد بود

$$\frac{kq_۳q_۱}{x^۲} = \frac{kq_۳q_۲}{(x-L)^۲}$$

$$\frac{۵q}{x^۲} = \frac{۲q}{(x-L)^۲} \Rightarrow x = ۲/۷۲L$$

(ب)

$$y = ۰$$

Scanned by CamScanner

۷۰- دو دانشجوی مهندسی، یکی به جرم ۹۰ kg و دیگری به جرم ۴۵ kg به فاصلهٔ ۳۰ m از یکدیگر قرار دارند. فرض کنید هر یک به اندازهٔ ۰/۰۱٪ در مقدار بار مثبت و منفی عدم توازن دارند، یکی باردار مثبت و دیگری باردار منفی است. با جایگزین کردن هر دانشجو با یک کرهٔ آب که همان جرم دانشجوراداشته باشد، مرتبهٔ بزرگی نیروی جاذبهٔ الکتروستاتیکی میان آنها را بیابید.

حل: بار دانشجویی به جرم $m = ۹۰\,\text{kg}$ برابر است با:

$$q = (۰/۰۰۰۱)\frac{mN_A Ze}{M}$$

$$= (۰/۰۰۰۱)\frac{(۹۰)(۶/۰۲\times۱۰^{۲۳})(۱۸)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{۰/۰۱۸}$$

$$= ۸/۶۶\times۱۰^{۵}\ \text{C}$$

بار خالص دانشجوی دوم نصف این مقدار گفته شده است لذا نیروی الکترواستاتیکی بین آنها برابر است با:

$$F = \frac{kq\left(\frac{q}{۲}\right)}{d^{۲}} = \frac{(۹\times۱۰^{۹})\left(\frac{۱}{۲}\right)(۵/۶۶\times۱۰^{۵})^{۲}}{(۳۰)^{۲}}$$

$$= ۳/۷۵\times۱۰^{۱۸}\ \text{N}$$

Scanned by CamScanner

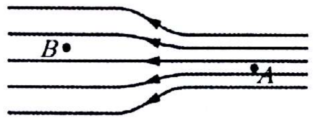
۱۸

میدان‌های الکتریکی

Scanned by CamScanner

بخش ۱۸-۳ خط‌های میدان الکتریکی

•۱- در شکل ۱۸-۳۰، فاصلهٔ خطهای میدان الکتریکی در سمت چپ، دو برابر فاصلهٔ آنها در سمت راست است. (الف) اگر بزرگی میدان در نقطهٔ A برابر $40 N/C$ باشد، بزرگی نیروی وارد بر یک پروتون در نقطهٔ A چقدر است؟ (ب) بزرگی میدان در نقطهٔ B چقدر است؟



شکل ۱۸-۳۰ مسئلهٔ ۱

حل: (الف)

$$F = qE = eE = (1/6\times10^{-19})(40) = 6/4\times10^{-18}\ N$$

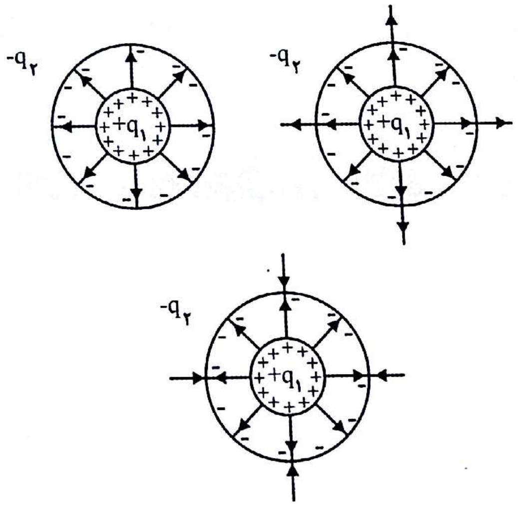
جهت نیرو به سمت چپ است.

(ب) می‌دانیم که بزرگی میدان متناسب با تعداد خطوط نیروی میدان است. بنابراین با توجه به شکل داریم:

$$E_A = 2E_B \Rightarrow E_B = \frac{E_A}{2} = \frac{40}{2} = 20\ N/C$$

•۲- خطهای میدان الکتریکی را هم در میان دو پوستهٔ کروی رسانای هم‌مرکز و هم در بیرون آنها هنگامی که بار مثبت یکنواخت q_1 روی پوستهٔ داخلی و بار منفی یکنواخت $-q_2$ روی پوستهٔ خارجی قرار دارد، به طور کیفی رسم کنید. حالتهای $q_1>q_2$ ، $q_1=q_2$ ، $q_1<q_2$ را در نظر بگیرید.

حل:



بخش ۱۸-۴ میدان ناشی از یک بار نقطه‌ای

•۳- بزرگی یک بار نقطه‌ای را که میدان الکتریکی ناشی از آن در فاصلهٔ $50 cm$ از آن برابر $2/0 N/C$ است، پیدا کنید. SSM

حل:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \Rightarrow q = \frac{Er^2}{(1/4\pi\varepsilon_0)} = \frac{(2)(0/5)^2}{9\times10^9}$$

$$q = 5/56\times10^{-11}\ C$$

•۴- بزرگی یک بار نقطه‌ای که میدان الکتریکی $1/00 N/C$ در نقطه‌هایی به فاصلهٔ $1/00 m$ از آن ایجاد می‌کند، چقدر است؟

حل:

$$q = \frac{Er^2}{(1/4\pi\varepsilon_0)} = \frac{(1)(1)^2}{9\times10^9} = 1/11\times10^{-10}\ C$$

•۵- هستهٔ اتم پلوتونیم ۲۳۹- شامل ۹۴ پروتون است. فرض کنید این هسته، کره‌ای به شعاع $6/64 fm$ است و بار پروتونها به طور یکنواخت در این کره پخش شده‌اند. در سطح هسته، (الف) بزرگی و (ب) جهت (به طور شعاعی، رو به داخل یا رو به خارج) میدان الکتریکی ناشی از پروتونها چگونه است؟ SSM

حل: (الف)

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ze}{r^2} = (9\times10^9)\frac{(94)(1/6\times10^{-19})}{(6/64\times10^{-15})^2}$$

$$E = 3/07\times10^{21}\ N/C$$

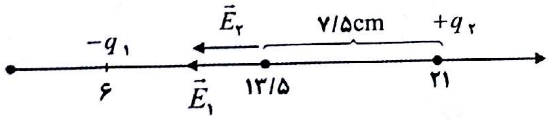
(ب) میدان شعاعی و به سمت خارج از هسته است.

•۶- دو ذره روی محور x قرار دارند: ذرهٔ ۱ با بار $-2/00\times10^{-7} C$ در $x=6/00 cm$ و ذرهٔ ۲ با بار $+2/00\times10^{-7} C$ در $x=21/0 cm$. میدان الکتریکی خالص آنها در وسط ذره‌ها، برحسب نمادگذاری بردار یکه چگونه است؟

حل:
$$x = \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{21-6}{2} = 7/5\ cm$$

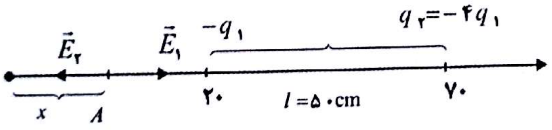
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = (9\times10^9)\frac{2\times10^{-7}}{(7/5\times10^{-2})^2} = 3/2\times10^5\ N/C$$

$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2\vec{E}_1 = -6/4\times10^5\ \hat{i}\,N/C$$



••۷- دو ذره روی محور x قرار دارند: ذرهٔ ۱ با بار $q_1=2/1\times10^{-8}C$ در $x=20cm$ و ذرهٔ ۲ با بار $q_2=-4/00q_1$ در $x=70cm$. در چه مختصه‌ای روی محور x، میدان الکتریکی خالص دو ذره برابر صفر است؟ SSM

حل:



$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{(20-x^2)\times10^{-4}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q_1}{(70-x)^2\times10^{-4}} \Rightarrow$$

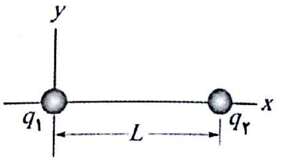
$$\frac{1}{(20-x)^2} = \frac{4}{(70-x)^2} \Rightarrow \frac{1}{20-x} = \pm\frac{2}{70-x} \Rightarrow$$

$$40-2x = 70-x \Rightarrow x = -30\,cm$$

Scanned by CamScanner

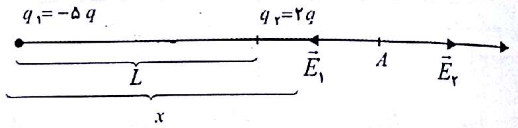
پس نقطه A در جایی که درنظر گرفتیم قرار ندارد بلکه سمت چپ مبدأ قرار دارد. پاسخ با منفی $x=36/67(cm)$ بدست می‌آید که غیر قابل قبول است.

●●۸- در شکل ۱۸-۳۱، ذرهٔ ۱ با بار $q_1=-5/00q$ و ذرهٔ ۲ با بار $q_2=+2/00q$ روی محور x قرار دارند. (الف) برحسب مضربی از فاصلهٔ L، در چه مختصه‌ای روی محور x، میدان الکتریکی خالص دو ذره برابر صفر است، (ب) خطهای میدان الکتریکی خالص را رسم کنید.



شکل ۱۸-۳۱ مسئلهٔ ۸

حل:



(الف)

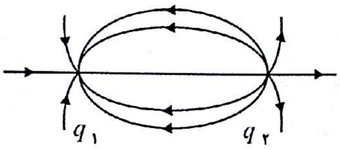
$$E_1=E_2 \Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{5q}{x^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{(x-L)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{5}}{x}=\pm\frac{\sqrt{2}}{(x-L)} \Rightarrow \sqrt{5}x-\sqrt{5}L=\sqrt{2}x \Rightarrow$$

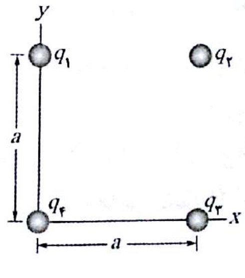
$$x=\frac{\sqrt{5}L}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \Rightarrow x=2/72L$$

پاسخ با منفی برابر $x=0/61L$ بدست می‌آید که غیر قابل قبول است.

(ب)

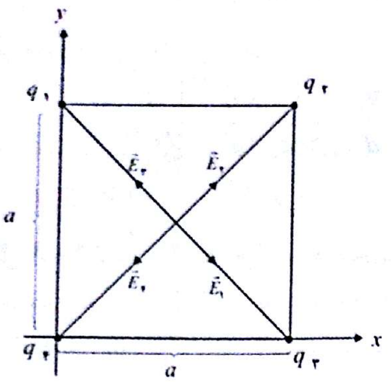


●●۹- در شکل ۱۸-۳۲، چهار ذره با بارهای $q_1=+10/0nC$، $q_2=-20/0nC$، $q_3=+20/0nC$، و $q_4=-10/0nC$ تشکیل مربعی به ضلع $a=5/00cm$ را داده‌اند. میدان الکتریکی خالصی که این چهار ذره در مرکز مربع ایجاد می‌کنند، برحسب نمادگذاری بردارهای یکه، چگونه است؟ SSM ILW WWW



شکل ۱۸-۳۲ مسئلهٔ ۹

حل:



$$r=\frac{\sqrt{2}}{2}a=3/54(cm)$$

$$E_1=E_4=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}=(9\times10^9)\frac{10\times10^{-9}}{(3/54)^2\times10^{-4}}$$
$$=7/18\times10^4\ N/C$$

$$E_2=E_3=(9\times10^9)\frac{2\times10^{-9}}{(3/54\times10^{-2})^2}=1/44\times10^5\ N/C$$

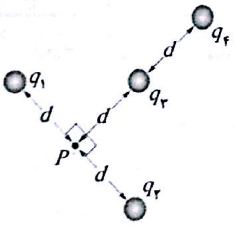
$$E_x=(E_1+E_2-E_3-E_4)\cos45=0$$

$$E_y=(E_2+E_3-E_1-E_4)\sin45=2(E_2-E_1)\sin45$$

$$=2(1/44\times10^5-7/18\times10^4)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1/02\times10^5\ N/C$$

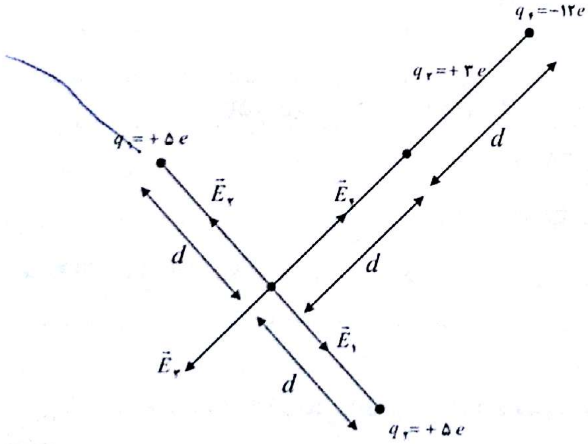
$$\vec{E}=10/2\times10^5\ \hat{j}\ N/C$$

●●۱۰- در شکل ۱۸-۳۳، چهار ذره در مکانهایی ثابت شده‌اند و دارای بارهای $q_1=q_2=+5e$ ، $q_3=+3e$ و $q_4=-12e$ هستند. فاصلهٔ d برابر با $5/0\mu m$ است. بزرگی میدان الکتریکی خالص ناشی از ذره‌ها در نقطهٔ P چقدر است؟



شکل ۱۸-۳۳ مسئلهٔ ۱۰

حل:



Scanned by CamScanner

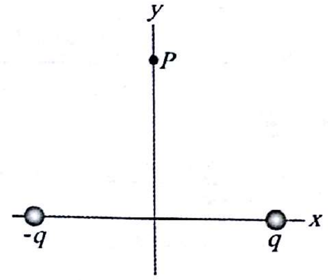
$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3+\vec{E}_4$

$\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ اثر همدیگر را خنثی می‌کنند.

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3e}{d^2}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{12e}{4d^2}=0$$

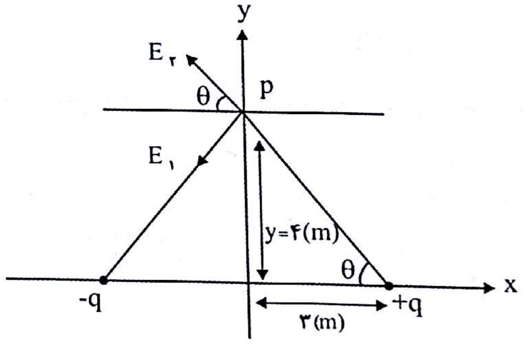
$\vec{E}=0$

●●۱۱۰۰- شکل ۱۸-۳۴، دو ذرهٔ باردار را روی محور x نشان می‌دهد $-q=-3/20\times10^{-19}C$ در $x=-3/00m$ و $q=3/20\times10^{-19}C$ در $x=+3/00m$. (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به جهت مثبت محور x) میدان الکتریکی ایجاد شده در نقطهٔ P واقع بر $y=4/00m$ چگونه است؟



شکل ۱۸-۳۴ مسئلهٔ ۱۱

حل:



$$\tan\theta=\frac{4}{3}\Rightarrow\theta=53°$$

$$r^2=x^2+y^2$$

$$E_1=E_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}=(9\times10^9)\frac{3/2\times10^{-19}}{(9+16)}=$$

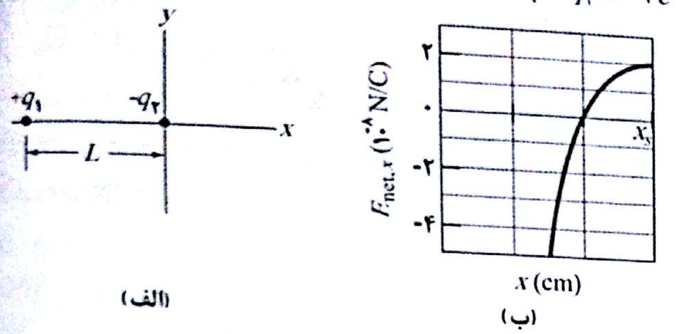
$1/15\times10^{-10}$ N/C

$$E_y=E_{2y}-E_{1y}=0$$

$$E_x=2E_1\cos\theta=(2)(1/15\times10^{-10})(\cos 53)$$
$$=1/38\times10^{-10}\ N/C$$

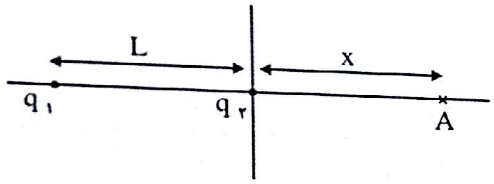
$$\vec{E}=-1/38\times10^{-10}\,\hat{i}\ N/C$$

●●۱۲۰۰- شکل ۱۸-۳۵ الف، دو ذرهٔ باردار را نشان می‌دهد که در مکانهایی روی محور x به فاصلهٔ L ثابت شده‌اند. نسبت q_1/q_2 بزرگیهای بار آنها برابر با ۴/۰۰ است. شکل ۱۸-۳۵ ب، $E_{net,x}$، مؤلفهٔ x میدان الکتریکی آنها را در امتداد محور x برای سمت راست ذرهٔ ۲ نشان می‌دهد. مقیاس محور x با $x_s=30/0cm$ مشخص شده است. (الف) به ازای چه مقدار $x>0$، $E_{net,x}$ بیشینه است؟ (ب) اگر بار ذرهٔ ۲ برابر با $-q_2=-3e$ باشد، مقدار آن بیشینه چقدر است؟



شکل ۱۸-۳۵ مسئلهٔ ۱۲

حل:



(الف)

$$E=\frac{kq_1}{(L+x)^2}-\frac{kq_2}{x^2}\Rightarrow E=\frac{4kq_2}{(L+x)^2}-\frac{kq_2}{x^2}$$

$$E=kq_2\left(\frac{4}{(L+x)^2}-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\frac{dE}{dx}=kq_2\left(\frac{-8}{(L+x)^3}-\frac{2}{x^3}\right)=0\Rightarrow$$

$$\frac{-8x^3+2(L+x)^3}{x^3(L+x)^3}=0\Rightarrow L+x=(4)^{1/3}x\Rightarrow$$

$$x=\frac{L}{(4)^{1/3}-1}\Rightarrow x=\frac{L}{0/59}$$

$$x=20cm\Rightarrow E=0\Rightarrow\frac{4}{(L+0/2)^2}-\frac{1}{(0/2)^2}=0\Rightarrow$$

$$\frac{2}{L+0/2}=\pm\frac{1}{0/2}\Rightarrow L=0/2m\Rightarrow x=\frac{0/2}{0/59}\Rightarrow x=0/34m$$

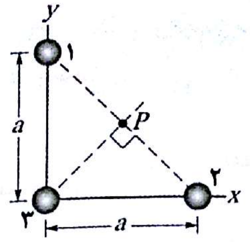
(ب)

$$E=(9\times10^9)(3\times1/6\times10^{-19})\left[\frac{4}{(0/2+0/34)^2}-\frac{1}{(0/34)^2}\right]$$

$$E=2/9\times10^{-8}\ N/C$$

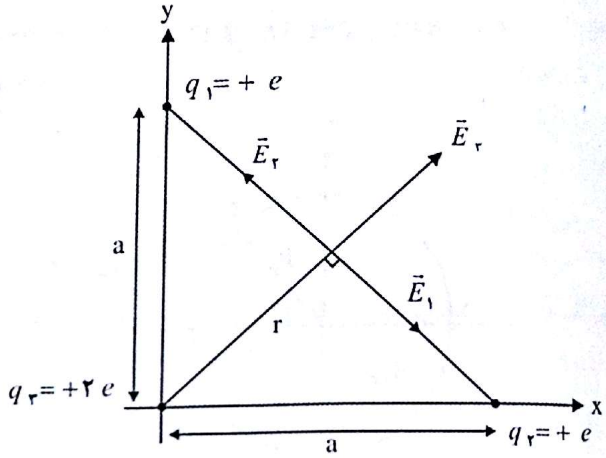
●●۱۳۰۰- در شکل ۱۸-۳۶، سه ذره در مکانهای خود ثابت شده‌اند و دارای بارهای $q_1=q_2=+e$ و $q_3=+2e$ هستند. فاصلهٔ a برابر ۶/۰۰μm است. (الف) بزرگی و (ب) جهت میدان الکتریکی خالص ناشی از ذره‌ها در نقطهٔ P چگونه است؟

Scanned by CamScanner



شکل ۱۸-۳۶ مسئلهٔ ۱۳

حل:



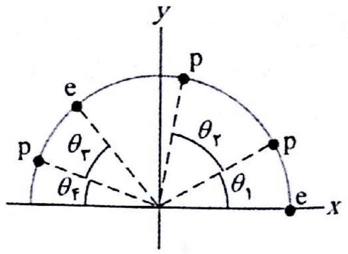
$\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ یکدیگر را خنثی می‌کنند. $r=\frac{\sqrt{2}}{2}a=4/24(\mu m)$

(الف)

$$E=E_3=\frac{kq_3}{r^2}=(9\times10^9)\frac{(2)(1/6\times10^{-19})}{(4/24\times10^{-6})^2}=160/2\ \text{N/C}$$

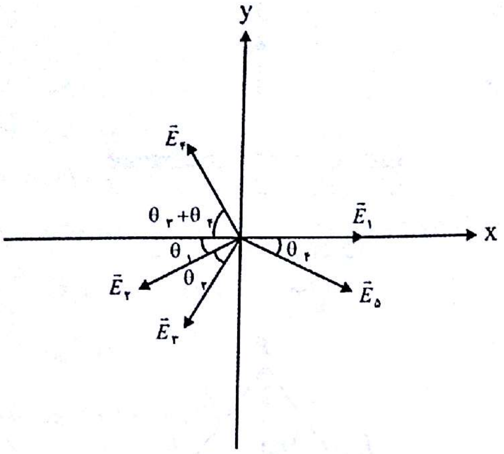
(ب) جهت E همان جهت E_3 یعنی با محور x زاویه ۴۵° می‌سازد.

۱۴●●- شکل ۱۸-۳۷ آرایش نامنظمی از الکترونها (e) و پروتونها (p) را نشان می‌دهد که روی کمانی دایره‌ای به شعاع $r=2/00\text{cm}$ با زاویه‌های $\theta_1=30/0°$ ، $\theta_2=50/0°$ ، $\theta_3=30/0°$ ، و $\theta_4=20/0°$ قرار گرفته‌اند. (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به جهت مثبت محورx) میدان الکتریکی خالص ایجاد شده در مرکز کمان چیست؟



شکل ۱۸-۳۷ مسئلهٔ ۱۴

حل:



$$E_x=E_1+E_5\cos\theta_4-E_4\cos(\theta_3+\theta_4)-E_2\cos\theta_1-E_3\cos(\theta_1+\theta_2)$$

$$E_x=\frac{ke}{R^2}(1+\cos\theta_4-\cos(\theta_3+\theta_4)-\cos\theta_1-\cos(\theta_1+\theta_2))$$

$$E_x=\frac{(9\times10^9)(1/6\times10^{-19})}{(0/02)^2}$$

$$(1+\cos20-\cos50-\cos30-\cos80)\Rightarrow$$

$$E_x=9/26\times10^{-7}\ \text{(N/C)}$$

$$E_y\ \frac{(9\times10^9)(1/6\times10^{-19})}{(0/02)^2}\times$$

$$(-\sin20-\sin80-\sin30+\sin50)\Rightarrow$$

$$E_y=-3/82\times10^{-6}\ \text{(N/C)}$$

$$E=\sqrt{Ex^2+Ey^2}=\sqrt{(9/26\times10^{-7})^2+(-3/82\times10^{-6})^2}$$

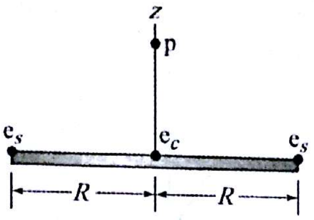
$$=3/93\times10^{-6}\ \text{(N/C)}$$

$$\tan\theta=\frac{Ey}{Ex}=\frac{-3/82\times10^{-6}}{9/26\times10^{-7}}=-4/13\Rightarrow\theta=-76/37°$$

زاویه θ نسبت به محور x بدست می‌آید.

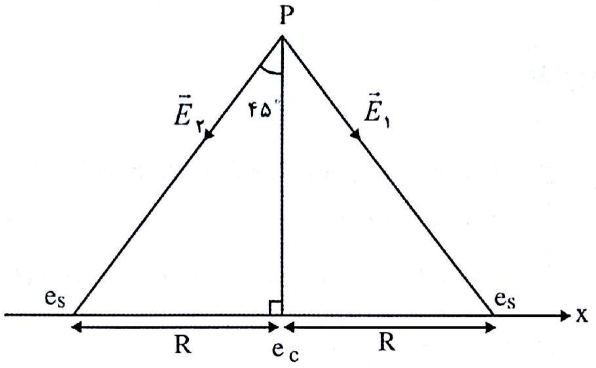
۱۵●●●- شکل ۱۸-۳۸، یک پروتون (p) را روی محور مرکزی یک قرص با چگالی بار یکنواخت ناشی از الکترونهای اضافی نشان می‌دهد. سه تا از این الکترونها نشان داده شده‌اند: الکترون e_c در مرکز قرص و الکترونهای e_s در دو سوی مخالف قرص به شعاع R از مرکز. پروتون در ابتدا در فاصلهٔ $z=R=2/00\text{cm}$ از قرص قرار دارد. در این مکان، بزرگیهای (الف) میدان الکتریکی $\vec{E}_c$ ناشی از الکترون e_c ، و (ب) میدان الکتریکی *خالص* $\vec{E}_{s,net}$ ناشی از الکترونهای e_s چقدر است؟ سپس پروتون به $z=R/10/0$ حرکت می‌کند. در این صورت بزرگیهای (پ) $\vec{E}_c$ و (ت) $\vec{E}_{s,net}$ در محل پروتون چقدر است؟ (ث) از (الف) و (پ) درمی‌یابیم که وقتی پروتون به قرص نزدیکتر شود، بزرگی $\vec{E}_c$ افزایش می‌یابد. چرا آنطور که از (ب) و (ت) دیده می‌شود، بزرگی $\vec{E}_{s,net}$ کاهش می‌یابد؟

Scanned by CamScanner



شکل ۱۸-۳۸ مسئلهٔ ۱۵

حل:



(الف)
$$E_c=\frac{ke_c}{R^۲}=\frac{(۹\times۱۰^۹)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{(۰/۰۲)^۲}$$
$$=۳/۶\times۱۰^{-۶}\ \text{N/C}$$

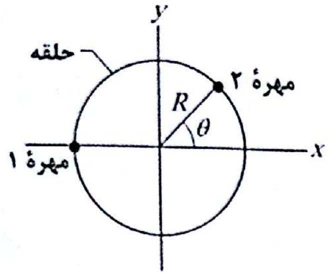
(ب)
$$r^۲=R^۲+R^۲=۲R^۲$$
$$E_۱=E_۲=\frac{ke_s}{r^۲}\Rightarrow E_{s,\text{net}}=۲E_۱\cos\theta=\frac{۲ke_s}{۲R^۲}\cos\theta\Rightarrow$$
$$E_{s,\text{net}}=\frac{(۹\times۱۰^۹)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{(۰/۰۲)^۲}\times\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=۲/۵۵\times۱۰^{-۶}\ \text{N/C}$$

(پ)
$$r=۰/۱R=۰/۰۰۲\text{m}$$
$$E_c=\frac{(۹\times۱۰^۹)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{(۰/۰۰۲)^۲}=۳/۶\times۱۰^{-۴}\ \text{N/C}$$

(ت)
$$r^۲=R^۲+۰/۰۱R^۲\Rightarrow r=\sqrt{۱/۰۱R^۲}=۰/۰۲۰۱\text{m}$$
$$E_{s,\text{net}}=۲E_۱\cos\theta=\frac{۲ke_s}{r^۲}\cos\theta=\frac{۲ke_s}{r^۲}\left(\frac{۰/۱R}{r}\right)\Rightarrow$$
$$E_{s,\text{net}}=(۲\times۹\times۱۰^۹)\frac{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}{(۰/۰۲۱)^۲}\times\left(\frac{۰/۰۰۲}{۰/۰۲۰۱}\right)$$
$$=۶/۲۲\times۱۰^{-۷}\ \text{N/C}$$

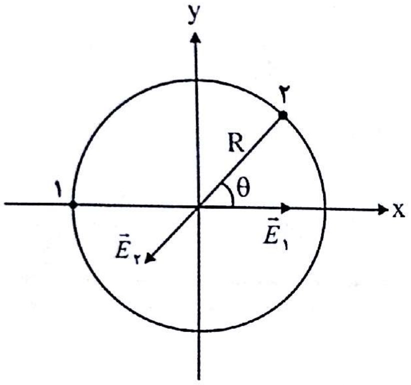
(ث) هرچه نقطه P به سطح قرص نزدیکتر می‌شود θ بزرگتر شده و $\cos\theta$ بسیار کوچکتر می‌گردد. بنابراین وقتی پروتون به قرص نزدیکتر می‌شود $E_{s,\text{net}}$ کاهش می‌یابد.

۱۶●●●- شکل ۱۸-۳۹، حلقه‌ای پلاستیکی به شعاع $R=۵۰/۰\text{cm}$ را نشان می‌دهد. دو مهرهٔ باردار کوچک روی حلقه قرار دارند: مهرهٔ ۱ با بار $+۲/۰۰\mu\text{C}$ در مکان خود در سمت چپ ثابت شده است؛ مهرهٔ ۲ با بار $+۶/۰۰\mu\text{C}$ می‌تواند روی حلقه جابه جا شود. دو مهره، میدان الکتریکی خالصی به بزرگی E را در مرکز حلقه ایجاد می‌کنند. مهرهٔ ۲ دو باید در چه زاویهٔ θ (الف) مثبت و (ب) منفی قرار داده شود تا $E=۲/۰۰\times۱۰^۵\ \text{N/C}$ باشد؟



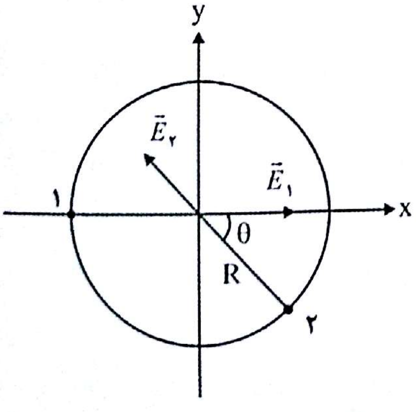
شکل ۱۸-۳۹ مسئلهٔ ۱۶

حل:



(الف)
$$E_x=\frac{kq_۱}{R^۲}-\frac{kq_۲}{R^۲}\cos\theta\ ,\ E_y=-\frac{kq_۲}{R^۲}\sin\theta$$
$$E^۲=E_x^۲+E_y^۲=\frac{k^۲q_۱^۲}{R^۴}+\frac{k^۲q_۲^۲}{R^۴}\cos^۲\theta-\frac{۲k^۲q_۱q_۲\cos\theta}{R^۴}+\frac{k^۲q_۲^۲}{R^۴}\sin^۲\theta\Rightarrow$$
$$E^۲=\frac{k^۲q_۱^۲}{R^۴}+\frac{k^۲q_۲^۲}{R^۴}\cos^۲\theta-\frac{۲k^۲q_۱q_۲}{R^۴}\cos\theta+\frac{k^۲q_۲^۲}{R^۴}(۱-\cos^۲\theta)\Rightarrow$$
$$E^۲=\frac{k^۲}{R^۴}(q_۱^۲+q_۲^۲)-\frac{۲k^۲q_۱q_۲}{R^۴}\cos\theta\Rightarrow$$
$$\cos\theta=\frac{q_۱^۲+q_۲^۲}{۲q_۱q_۲}-\frac{E^۲R^۴}{۲k^۲q_۱q_۲}=\frac{q_۱}{۲q_۲}+\frac{q_۲}{۲q_۱}-\frac{E^۲R^۴}{۲k^۲q_۱q_۲}\Rightarrow$$
$$\cos\theta=\frac{۲\times۱۰^{-۶}}{۲\times۶\times۱۰^{-۶}}+\frac{۶\times۱۰^{-۶}}{۲\times۲\times۱۰^{-۶}}-\frac{(۲\times۱۰^۵)^۲\times(۰/۵)^۴}{۲\times(۹\times۱۰^۹)^۲\times۲\times۱۰^{-۶}\times۶\times۱۰^{-۶}}\Rightarrow$$
$$\cos\theta=۰/۳۸\quad\Rightarrow\quad\theta=۶۷/۶۷^\circ$$

(ب)

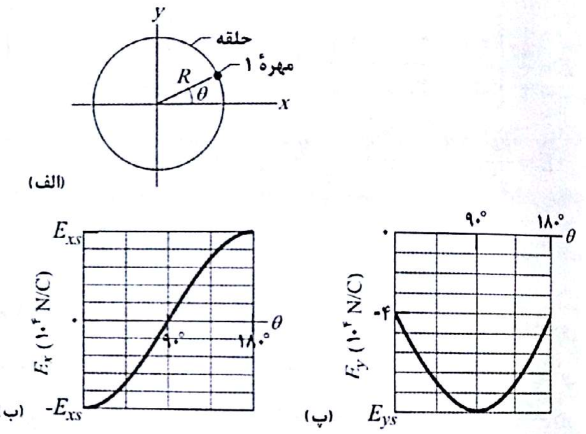


Scanned by CamScanner

$$E_x = \frac{kq_1}{R^2} - \frac{kq_2}{R^2}\cos\theta \quad , \quad E_y = \frac{kq_2}{R^2}\sin\theta$$

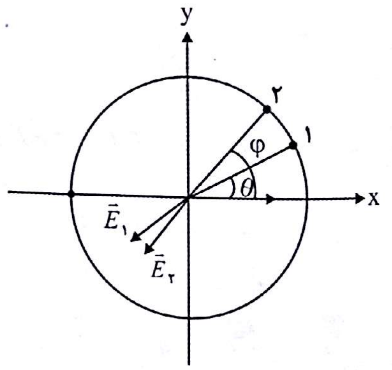
به همان جواب $\cos\theta = 0/38$ می‌رسد، در نتیجه $\theta = -67/67°$.

●●●۱۷- دو مهرهٔ باردار روی حلقهٔ پلاستیکی شکل ۱۸-۴۰ الف قرار دارند. مهرهٔ ۲، که نشان داده نشده است، در مکانی روی حلقه به شعاع $R = 60/0\,cm$ ثابت شده است. مهرهٔ ۱ در ابتدا روی محور x در زاویهٔ $\theta = 0°$ واقع است. سپس این مهره با عبور از ربع‌های اول و دوم دستگاه مختصات xy به سمت مقابل با زاویهٔ $\theta = 180°$ حرکت می‌کند. شکل ۱۸-۴۰ ب مؤلفهٔ x میدان الکتریکی خالص حاصل از دو مهره را برحسب تابعی از θ در مبدأ، و شکل ۱۸-۴۰ پ مؤلفهٔ y همان میدان را به دست می‌دهند. مقیاسهای محور قائم با $E_{xs} = 5/0 \times 10^4$ و $E_{ys} = -9/0 \times 10^4\,N/C$ مشخص شده‌اند: (الف) مهرهٔ ۲ در چه زاویهٔ θ قرار گرفته است؟ بارهای (ب) مهرهٔ ۱ و (پ) مهرهٔ ۲ چقدرند؟



شکل ۱۸-۴۰ مسئلهٔ ۱۷

حل:



(الف)
$$\begin{cases} E_x = -E_1\cos\theta - E_2\cos\varphi \\ E_y = -E_1\sin\theta - E_2\sin\varphi \end{cases}$$

$$\theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} -5\times10^4 = -E_1 - E_2\cos\varphi & (1) \\ -4\times10^4 = -E_2\sin\varphi & (2) \end{cases}$$

$$\theta = 90 \Rightarrow \begin{cases} E_x = 0 \Rightarrow 0 = -E_2\cos\varphi \Rightarrow \varphi = \pi/2 & (3) \\ E_y = -9\times10^4 = -E_1 - E_2\sin\varphi & (4) \end{cases}$$

مهره دوم در $\varphi = \pi/2$ قرار دارد.

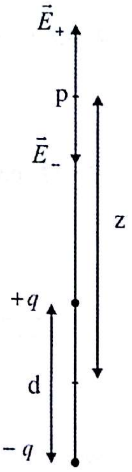
(ب)

$$(2),(4) \Rightarrow -9\times10^4 = -E_1 - 4\times10^4 \Rightarrow E_1 = 5\times10^4\ N/C$$
$$(1),(3) \Rightarrow -5\times10^4 = -E_1 \qquad (5)$$
$$(3),(4) \Rightarrow -9\times10^4 = -E_1 - E_2 \qquad (6)$$
$$(5),(6) \Rightarrow -9\times10^4 = -5\times10^4 - E_2 \Rightarrow E_2 = 4\times10^4\ N/C$$
$$E_1 = k\frac{q_1}{R^2} \Rightarrow 5\times10^4 = (9\times10^9)\frac{q_1}{(0/6)^2}$$
$$\Rightarrow q_1 = 2\times10^{-6}\ C$$
$$E_2 = k\frac{q_2}{R^2} \Rightarrow 4\times10^4 = (9\times10^9)\frac{q_2}{(0/6)^2}$$
$$\Rightarrow q_2 = 1/6\times10^{-6}\ C$$

بخش ۱۸-۵ میدان الکتریکی ناشی از یک دو قطبی الکتریکی

●●●۱۸- معادله‌های ۱۸-۸ و ۱۸-۹ تقریبهایی برای بزرگی میدان الکتریکی یک دوقطبی، در نقطه‌هایی روی محور دوقطبی هستند. نقطهٔ P را روی آن محور به فاصلهٔ $z = 5/00d$ از مرکز دوقطبی در نظر بگیرید (d فاصلهٔ میان ذره‌های دو قطبی است). فرض کنید $E_{تقریبی}$ بزرگی میدان در نقطهٔ P باشد که با معادله‌های ۱۸-۸ و ۱۸-۹ تقریب زده شده است. بزرگی واقعی میدان را $E_{واقعی}$ در نظر بگیرید. نسبت $E_{واقعی}/E_{تقریبی}$ چقدر است؟

حل: اگر E_r مقدار واقعی و E مقدار تقریبی میدان الکتریکی باشد:



$$E_r = E_+ - E_- = \frac{kq}{\left(z-\frac{d}{2}\right)^2} - \frac{kq}{\left(z+\frac{d}{2}\right)^2}$$

$$E_r = kq\left(\frac{z^2 + \frac{d^2}{4} + zd - z^2 - \frac{d^2}{4} + zd}{\left(z-\frac{d}{2}\right)^2\left(z+\frac{d}{2}\right)^2}\right)$$

$$E_r = kq\left(\frac{2zd}{\left(z^2 - \frac{d^2}{4}\right)^2}\right)$$

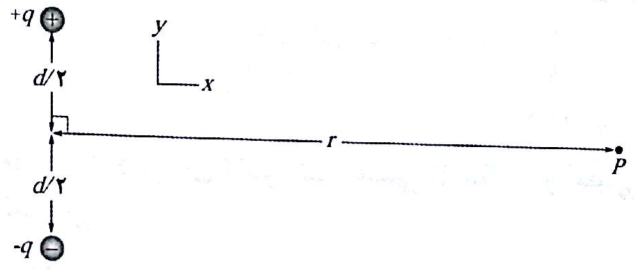
$$z >> d \quad \Rightarrow \quad E = kq\frac{2d}{z^3} = \frac{qd}{2\pi\varepsilon_0 z^3}$$

$$\frac{E}{E_r} = \frac{\dfrac{qd}{2\pi\varepsilon_0 z^3}}{\dfrac{2zqd}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2 - \frac{d^2}{4}\right)^2}} = \frac{\left(z^2 - \frac{d^2}{4}\right)^2}{z^4} \Rightarrow$$

Scanned by CamScanner

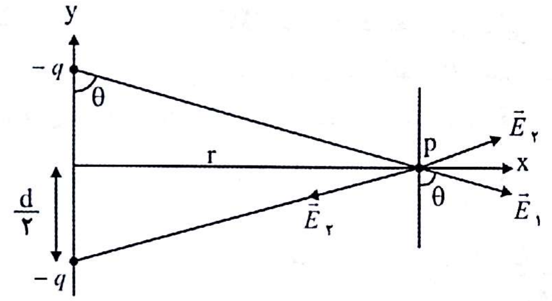
$$\frac{E}{E_r}=\frac{\left(۲۵d^۲-\frac{d^۲}{۴}\right)^۲}{(۵d)^۴}=\frac{\left(۲۵-\frac{۱}{۴}\right)^۲}{۶۲۵}=۰/۹۸۰۱$$

۱۹●● - شکل ۱۸-۴۱، یک دوقطبی الکتریکی را نشان می‌دهد. (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به جهت مثبت محور x) میدان الکتریکی دو قطبی در نقطهٔ P واقع در فاصلهٔ $r \gg d$ چگونه است؟



شکل ۱۸-۴۱ مسئلهٔ ۱۹

حل:



$\vec{E}_۱=\vec{E}_۲$

$\vec{E}_۱$ و $\vec{E}_۲$ اثر یکدیگر را در راستای x خنثی می‌کنند و میدان نهایی در خلاف جهت محور y است.

$$E=۲E_۱\cos\theta=۲\frac{kq}{\left(r^۲+\frac{d^۲}{۲}\right)^۲}\frac{\frac{d}{۲}}{\left(r^۲+\frac{d^۲}{۴}\right)^{۱/۲}}\Rightarrow$$

$$E=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{qd}{\left(r^۲+\frac{d^۲}{۴}\right)^{۳/۲}}$$

$$r>>d \quad\Rightarrow\quad E=\frac{qd}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۳}$$

۲۰●● - میدان الکتریکی یک دوقطبی الکتریکی روی محور آن تقریباً با معادله‌های ۱۸-۸ و ۱۸-۹ داده می‌شود، اگر یک بسط دوجمله‌ای از معادلهٔ ۱۸-۷ صورت گیرد، جملهٔ بعدی در عبارت میدان الکتریکی دوقطبی در امتداد محور x چه خواهد بود؟ یعنی در عبارت زیر $E_{\text{بعدی}}$ چیست؟

$$E=\frac{۱}{۲\pi\varepsilon_۰}\frac{qd}{z^۳}+E_{\text{بعدی}}$$

حل:

$$E=kq\left[\frac{۱}{\left(z-\frac{d}{۲}\right)^۲}-\frac{۱}{\left(z+\frac{d}{۲}\right)^۲}\right]\Rightarrow$$

$$E=\frac{kq}{z^۲}\left[\left(۱-\frac{d}{۲z}\right)^{-۲}-\left(۱+\frac{d}{۲z}\right)^{-۲}\right]\Rightarrow$$

$$E=\frac{kq}{z^۲}\Bigg[۱+\frac{۲d}{۲z}+\frac{(-۲)(-۲-۱)\left(-\frac{d}{۲z}\right)^۲}{۲!}+\frac{(-۲)(-۲-۱)(-۲-۲)\left(-\frac{d}{۲z}\right)^۳}{۳!}+\dots-\left(۱+\frac{-۲d}{۲z}\right)+\frac{(-۲)(-۲-۱)\left(\frac{d}{۲z}\right)^۲}{۲!}+\frac{(-۲)(-۲-۱)(-۲-۲)\left(\frac{d}{۲z}\right)^۳}{۳!}+\dots\Bigg]\Rightarrow$$

$$E=\frac{kq}{z^۲}\left[\frac{۲d}{z}+\frac{۳d^۲}{۴z^۲}+\frac{۴d^۳}{۸z^۳}+\dots+\frac{d}{z}-\frac{۳d^۲}{۴z^۲}+\frac{۴d^۳}{۸z^۳}-\dots\right]\Rightarrow$$

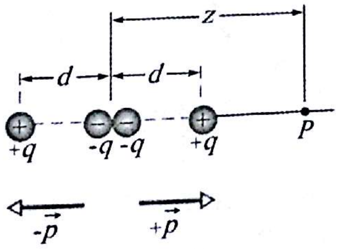
$$E=\frac{kq}{z^۲}\left[\frac{۲d}{z}+\frac{d^۳}{z^۳}\right]=\frac{qd}{۲\pi\varepsilon_۰ z^۳}+\frac{qd^۳}{۴\pi\varepsilon_۰ z^۵}\Rightarrow$$

$$E_{\text{next}}=\frac{qd^۳}{۴\pi\varepsilon_۰ z^۵}$$

۲۱●●● - *چهارقطبی الکتریکی.* شکل ۱۸-۴۲، یک چهارقطبی الکتریکی را نشان می‌دهد، که شامل دو دوقطبی است که بزرگی گشتاورهای دوقطبی آنها برابر ولی جهت آنها مخالف یکدیگر است. نشان دهید که مقدار E روی محور چهارقطبی برای نقطهٔ P به فاصلهٔ z از مرکز آن (با فرض $z \gg d$) با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$E=\frac{۳Q}{۴\pi\varepsilon_۰ z^۴}$$

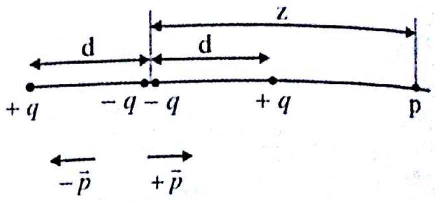
که در آن $Q(=۲qd^۲)$ *گشتاور چهار قطبی* توزیع بار نامیده می‌شود. SSM



شکل ۱۸-۴۲ مسئلهٔ ۲۱

حل:

Scanned by CamScanner



$$E_۱ = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ (z-d)^۲}$$

$$E_۲ = E_۳ = \frac{-q}{۴\pi\varepsilon_۰ z^۲}$$

$$E_۴ = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ (z+d)^۲}$$

$$E = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰}\left[\frac{۱}{(z-d)^۲} - \frac{۲}{z^۲} + \frac{۱}{(z+d)^۲}\right] \Rightarrow$$

$$E = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰}\left[\frac{z^۲(z^۲+d^۲+۲dz) - ۲(z^۲-d^۲)^۲ + z^۲(z^۲+d^۲-۲zd)}{(z-d)^۲ z^۲ (z+d)^۲}\right] \Rightarrow$$

$$E = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰} \times \frac{۶z^۲d^۲ - ۲d^۴}{(z^۲-d^۲)^۲ z^۲}$$

$$z >> d \Rightarrow E = \frac{۶q\,z^۲d^۲}{۴\pi\varepsilon_۰ z^۶} = \frac{۳(۲qd^۲)}{۴\pi\varepsilon_۰ z^۴} = \frac{۳Q}{۴\pi\varepsilon_۰ z^۴}$$

که در آن Q گشتاور چهار قطبی توزیع بار است. $Q = ۲qd^۲$

بخش ۱۸-۶ میدان الکتریکی ناشی از یک خط باردار

۲۲●- *چگالی، چگالی، چگالی.* (الف) بار $-۳۰۰e$ روی کمانی دایره‌ای به شعاع $۴/۰۰\text{cm}$ در یک زاویهٔ $۴۰°$، به طور یکنواخت توزیع شده است. چگالی بار خطی روی کمان چقدر است؟ (ب) بار $-۳۰۰e$ روی یک طرف قرصی دایره‌ای به شعاع $۲/۰۰\text{cm}$ به طور یکنواخت توزیع شده است. چگالی بار سطحی روی این وجه چقدر است؟ (پ) بار $-۳۰۰e$ روی سطح کره‌ای به شعاع $۲/۰۰\text{cm}$ به طور یکنواخت توزیع شده است. چگالی بار سطحی روی این سطح چقدر است؟ (ت) بار $-۳۰۰e$ در حجم کره‌ای به شعاع $۲/۰۰\text{cm}$ به طور یکنواخت پخش شده است. چگالی بار حجمی در این کره چقدر است؟

حل: (الف)

$$\lambda = \frac{q}{R\theta} = \frac{(-۳۰۰)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{(۰/۰۴)\left(\frac{۴۰\pi}{۱۸۰}\right)} = -۱/۷۲\times۱۰^{-۱۵}\ \text{C/m}$$

(ب)

$$\sigma = \frac{q}{\pi R^۲} = \frac{(-۳۰۰)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{\pi(۰/۰۲)^۲} = -۳/۸۲\times۱۰^{-۱۴}\ \text{C/m}^۲$$

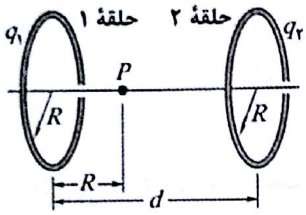
(پ)

$$\sigma = \frac{q}{۴\pi R^۲} = \frac{(-۳۰۰)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{۴\pi(۰/۰۲)^۲} = -۹/۵۵\times۱۰^{-۱۵}\ \text{C/m}^۲$$

(ت)

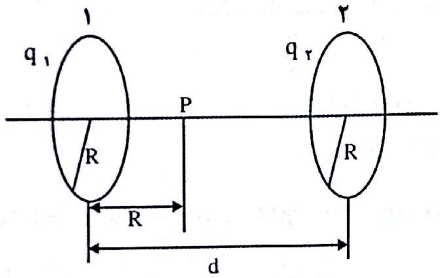
$$\rho = \frac{q}{\frac{۴}{۳}\pi R^۳} = \frac{(-۳۰۰)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{\frac{۴}{۳}\pi(۰/۰۲)^۳} = -۱/۴۳\times۱۰^{-۱۲}\ \text{C/m}^۳$$

۲۳●- شکل ۱۸-۴۳، دو حلقهٔ نارسانای موازی را نشان می‌دهد که محورهای مرکزی آنها روی یک خط مشترک قرار دارند. حلقهٔ ۱ با باریکنواخت $q_۱$ و شعاع R؛ حلقهٔ ۲ با بار یکنواخت $q_۲$ و همان شعاع R. حلقه‌ها به فاصلهٔ $d=۳/۰۰R$ از یکدیگر قرار گرفته‌اند. میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ P روی خط مشترک، در فاصلهٔ R از حلقهٔ ۱ برابر با صفر است. نسبت $q_۱/q_۲$ چقدر است؟



شکل ۱۸-۴۳ مسئلهٔ ۲۳

حل:



$d = ۳R$

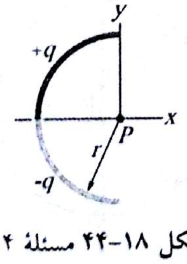
حلقه $E = \frac{qz}{۴\pi\varepsilon_۰ (z^۲+R^۲)^{۳/۲}}$

در نقطه P: $E_۱ = E_۲$

$$\frac{q_۱ R}{۴\pi\varepsilon_۰ (۲R^۲)^{۳/۲}} = \frac{q_۲(۲R)}{۴\pi\varepsilon_۰ (۴R^۲+R^۲)^{۳/۲}} \Rightarrow$$

$$\frac{q_۱}{۲^{۳/۲}} = \frac{۲q_۲}{۵^{۳/۲}} \Rightarrow \frac{q_۱}{q_۲} = ۲\times\left(\frac{۲}{۵}\right)^{۳/۲} = ۰/۵۰۶$$

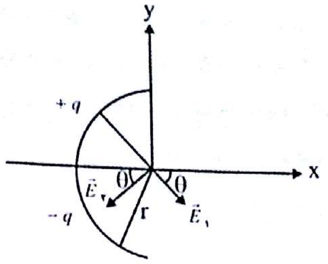
۲۴●●- در شکل ۱۸-۴۴، یک میلهٔ شیشه‌ای باریک به شکل نیمدایره‌ای به شعاع $r=۵/۰۰\text{cm}$ درآمده است. بار $+q=۴/۵۰\text{pC}$ به طور یکنواخت روی نیمهٔ بالایی، و بار $-q=-۴/۵۰\text{pC}$ به طور یکنواخت روی نیمهٔ پایینی توزیع شده است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به جهت مثبت محور x) میدان الکتریکی در نقطهٔ P، واقع در مرکز نیمدایره چگونه است؟



شکل ۱۸-۴۴ مسئلهٔ ۲۴

Scanned by CamScanner

حل:



(الف) معادله یک کمان باردار به این صورت بدست می‌آید

$$E=\frac{Q}{۲\pi\varepsilon_{\circ}R^{۲}}\frac{\sin\frac{\varphi}{۲}}{\varphi}$$ (مسأله ۲۵):

جهت میدان در راستای محور تقارن کمان است.

در این مسأله $\varphi=\frac{\pi}{۲}$ است.

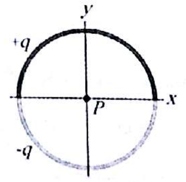
$$E_{۱}=E_{۲}=\frac{۲Q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}R^{۲}}\frac{\sin\frac{\pi}{۲}}{\frac{\pi}{۲}}=\frac{(۹\times۱۰^{۹})\times۲\times(۴/۵\times۱۰^{-۱۲})}{(۰/۰۵)^{۲}}\times(۰/۴۵)\Rightarrow$$

$$E_{۱}=E_{۲}=۱۴/۵۸\ \text{N/C}$$

$$E_{\text{total}}=۲E_{۱}\sin۴۵=(۲)(۱۴/۵۸)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=۲۰/۶۲\ \text{N/C}$$

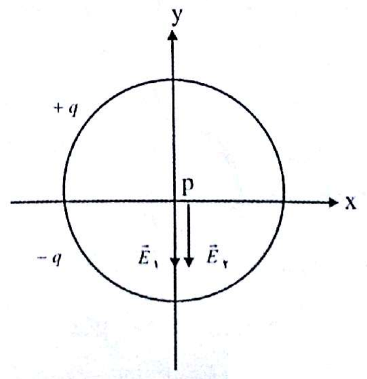
(ب) جهت میدان در خلاف جهت میدان y است.

۲۵●●- در شکل ۱۸-۴۵، دو میلهٔ پلاستیکی خمیده، یکی دارای بار $+q$ و دیگری $-q$، در صفحهٔ xy دایره‌ای به شعاع $R=۸/۵۰\text{cm}$ را تشکیل داده‌اند. محور x از هر دو نقطهٔ اتصال می‌گذرد، و بار به طور یکنواخت روی هر دو میله توزیع شده است. اگر $q=۱۵/۰\text{pC}$ باشد، (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به جهت مثبت محور x) میدان الکتریکی $\vec{E}$ ایجاد شده در نقطهٔ P، واقع در مرکز دایره چگونه است؟

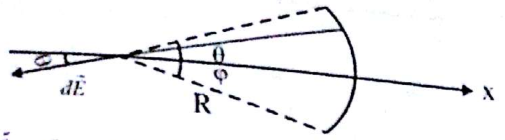


شکل ۱۸-۴۵ مسئلهٔ ۲۵

حل:



(الف)



ابتدا میدان ناشی از یک کمان باردار را در مرکز آن بدست می‌آوریم.

$$dE=\frac{dq}{۴\pi\varepsilon_{\circ}R^{۲}}=\frac{\lambda\,ds}{۴\pi\varepsilon_{\circ}R^{۲}}=\frac{\lambda R d\theta}{۴\pi\varepsilon_{\circ}R^{۲}}=\frac{\lambda\,d\theta}{۴\pi\varepsilon_{\circ}R}$$

به علت تقارن میدان فقط در امتداد محور تقارن کمان است که در اینجا محور x می‌باشد.

$$dE_{x}=dE\cos\theta=\frac{\lambda\cos\theta\,d\theta}{۴\pi\varepsilon_{\circ}R}$$

$$E=\int dE_{x}=\frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_{\circ}R}\int_{-\varphi/۲}^{\varphi/۲}\cos\theta\,d\theta=\frac{\frac{Q}{R\varphi}\left(۲\sin\frac{\varphi}{۲}\right)}{۴\pi\varepsilon_{\circ}R}$$

$$E=\frac{Q}{۲\pi\varepsilon_{\circ}R^{۲}}\frac{\sin\frac{\varphi}{۲}}{\varphi}$$

$E_{۱}=E_{۲}$ برای هر دو نیم حلقه $\varphi=\pi$ می‌باشد.

$$E_{\text{total}}=E_{۱}+E_{۲}=۲E_{۱}=\frac{۲q}{۲\pi\varepsilon_{\circ}R^{۲}}\frac{\sin\frac{\pi}{۲}}{\pi}=\frac{q}{\pi^{۲}\varepsilon_{\circ}R^{۲}}\Rightarrow$$

$$E_{\text{total}}=\frac{۱۵\times۱۰^{-۱۲}}{\pi^{۲}(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۸/۵\times۱۰^{-۲})^{۲}}=۲۳/۷۷\ \text{N/C}$$

(ب) جهت میدان در خلاف جهت محور y می‌باشد.

۲۶●●- بار به طور یکنواخت به دور حلقه‌ای به شعاع $R=۲/۴۰\text{cm}$ توزیع شده‌است، وبزرگی E میدان الکتریکی ناشی از آن روی محور مرکزی حلقه (عمود بر صفحهٔ آن) اندازه‌گیری می‌شود. در چه فاصله‌ای از مرکز حلقه، E بیشینه است؟

حل:

$$E=\frac{qz}{۴\pi\varepsilon_{\circ}(z^{۲}+R^{۲})^{۳/۲}}=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}z(z^{۲}+R^{۲})^{-۳/۲}$$

$$\frac{dE}{dz}=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\left[(z^{۲}+R^{۲})^{-۳/۲}+z\left(\frac{-۳}{۲}\right)(۲z)(z^{۲}+R^{۲})^{-۵/۲}\right]$$

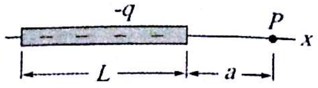
$$=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\times\frac{R^{۲}+z^{۲}-۳z^{۲}}{(z^{۲}+R^{۲})^{۵/۲}}=۰\quad\Rightarrow$$

$$R^{۲}-۲z^{۲}=۰\ \Rightarrow z=\pm\frac{R}{\sqrt{۲}}=\pm=\frac{۲/۴}{\sqrt{۲}}\pm۱/۷\,\text{cm}$$

۲۷●●- در شکل ۱۸-۴۶، یک میلهٔ نارسانا به طول $L=۸/۱۵\text{cm}$ دارای بار $-q=-۴/۲۳\text{fC}$ است که به طور یکنواخت در طول آن توزیع شده است. (الف) چگالی خطی بار میله چقدر است؟ (ب) بزرگی و (پ) جهت (نسبت به جهت مثبت محور x) میدان الکتریکی ایجاد شده در نقطهٔ P، واقع در فاصلهٔ $a=۱۲/۰\text{cm}$ از میله، چگونه است؟ بزرگی میدان

Scanned by CamScanner

الکتریکی ایجاد شده در فاصلهٔ $a=۵۰\text{cm}$ توسط (ت) میله و (ث) ذره‌ای دارای بار $-q=-۴/۲۳\text{fC}$ که به جای میله قرار داده شود، چقدر است؟ SSM ILW WWW

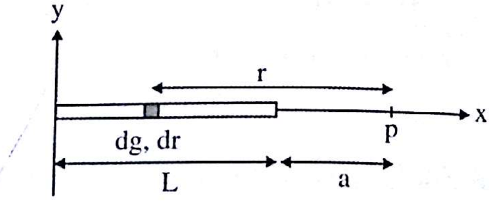


شکل ۱۸–۴۶ مسئلهٔ ۲۷

حل: (الف)

$$\lambda=\frac{q}{L}=\frac{-۴/۲۳\times۱۰^{-۱۵}}{۸/۱۵\times۱۰^{-۲}}=-۵/۱۹\times۱۰^{-۱۴}\ \text{C/m}$$

(ب)



$$dE=\frac{dq}{۴\pi\varepsilon_۰}=\frac{\lambda\, dr}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}$$

$$E=\frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}\int_a^{a+L}\frac{dr}{r^۲}=\frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_۰}\left[\frac{۱}{a}-\frac{۱}{L+a}\right]=\frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{L}{a(L+a)}$$

$$E=(۹\times۱۰^۹)(۵/۱۹\times۱۰^{-۱۴})\frac{(۸/۱۵\times۱۰^{-۲})}{(۰/۱۲)(۰/۱۲+۰/۰۸۱۵)}$$

$$=۱/۵۷\times۱۰^{-۳}\ \text{N/C}$$

(پ) جهت میدان به دلیل منفی بودن بار به طرف میله یعنی در خلاف جهت محور x می‌باشد.

(ت) $$a>>L\Rightarrow E=\frac{\lambda L}{۴\pi\varepsilon_۰ a^۲}=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ a^۲}$$

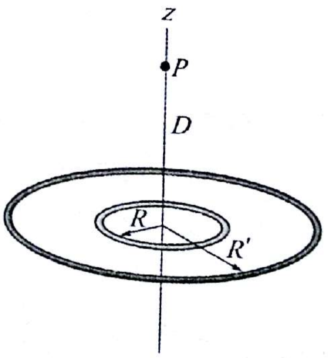
که مشابه بار نقطه‌ای است.

$$a=۵۰\,(\text{cm})$$

$$E=\frac{(۹\times۱۰^۹)(۴/۲۳\times۱۰^{-۱۵})}{(۰/۵)^۲}=۱/۵۲\times۱۰^{-۴}\ \text{N/C}$$

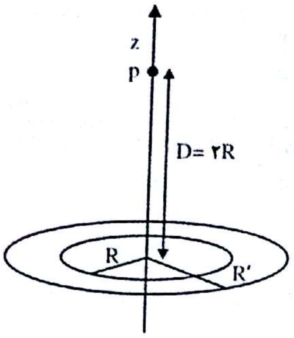
$$E=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}=\frac{(۹\times۱۰^۹)(۴/۲۳\times۱۰^{-۱۵})}{(۰/۵)^۲}=۱/۵۲\times۱۰^{-۴}\ \text{N/C}$$

۲۸●●- شکل ۱۸–۴۷، دو حلقهٔ هم‌مرکز را یکی به شعاع R و دیگری به شعاع $R'=۳/۰۰R$ نشان می‌دهد که در سطح یکسانی قرار دارند. نقطهٔ P روی محور z مرکزی و به فاصلهٔ $D=۲/۰۰R$ از مرکز حلقه واقع است. حلقهٔ کوچکتر دارای بار $+Q$ است که به طور یکنواخت توزیع شده است. اگر میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ P برابر صفر باشد، برحسب Q چه باری به طور یکنواخت روی حلقهٔ بزرگتر توزیع شده است؟



شکل ۱۸–۴۷ مسئلهٔ ۲۸

حل:



$$R'=۳R$$

$$E=\frac{qz}{۴\pi\varepsilon_۰(z^۲+R^۲)^{۳/۲}}$$

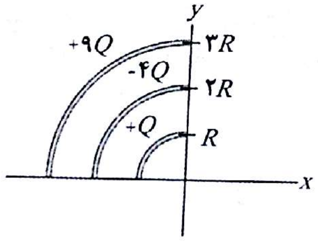
$$E=E_۱+E_۲=۰\Rightarrow$$

$$\frac{kQz}{(z^۲+R^۲)^{۳/۲}}+\frac{kqz}{(z^۲+۹R^۲)^{۳/۲}}=۰\Rightarrow$$

$$\frac{Q}{(۵R^۲)^{۳/۲}}=\frac{-q}{(۱۳R^۲)^{۳/۲}}\Rightarrow q=-\left(\frac{۱۳}{۵}\right)^{۳/۲}Q$$

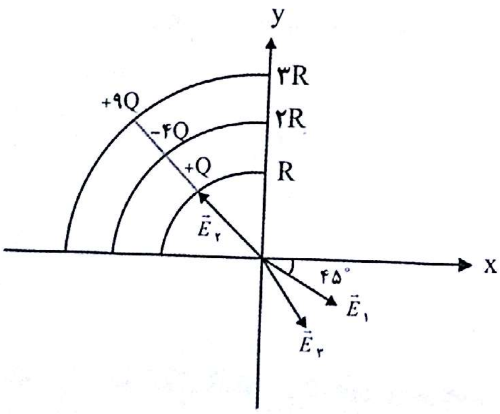
$$\Rightarrow q=-۴/۱۹Q$$

۲۹●●- شکل ۱۸–۴۸، سه کمان دایره‌ای را به مرکز مبداء یک دستگاه مختصات نشان می‌دهد. روی هر کمان، بارهایی برحسب $Q=۲/۰۰\mu C$ به طور یکنواخت توزیع شده‌اند. شعاعها برحسب $R=۱۰/۰\text{cm}$ داده شده‌اند. (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به جهت مثبت x) میدان الکتریکی خالص ناشی از کمانها در مبدأ چگونه است؟



شکل ۱۸–۴۸ مسئلهٔ ۲۹

حل:



در مساله ۲۵ میدان الکتریکی را برای یک کمان بدست آورده‌بودیم.

Scanned by CamScanner

(الف) در این مساله φ برای هر سه کمان برابر $\frac{\pi}{۲}$ است.

$$E=\frac{Q}{۲\pi\varepsilon_\circ R^۲}\frac{\sin\frac{\varphi}{۲}}{\varphi}$$

$$E_۱=\frac{Q}{۲\pi\varepsilon_\circ R^۲}\frac{\sin ۴۵}{\frac{\pi}{۲}}=\frac{Q\sin ۴۵}{\pi^۲\varepsilon_\circ R^۲}$$

$$E_۲=\frac{-۴Q}{۲\pi\varepsilon_\circ(۴R^۲)}\frac{\sin ۴۵}{\frac{\pi}{۲}}=\frac{-Q\sin ۴۵}{\pi^۲\varepsilon_\circ R^۲}$$

$$E_۳=\frac{۹Q}{۲\pi\varepsilon_\circ(۹R^۲)}\frac{\sin ۴۵}{\frac{\pi}{۲}}=\frac{Q\sin ۴۵}{\pi^۲\varepsilon_\circ R^۲}$$

$$E=E_۱+E_۲+E_۳\Rightarrow$$

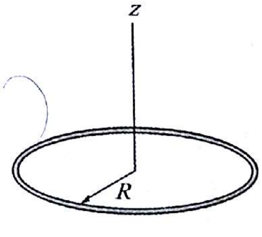
$$E_۲=\frac{Q\sin ۴۵}{\pi^۲\varepsilon_\circ R^۲}-\frac{Q\sin ۴۵}{\pi^۲\varepsilon_\circ R^۲}+\frac{Q\sin ۴۵}{\pi^۲\varepsilon_\circ R^۲}=\frac{۴Q}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{\sin ۴۵}{\pi R^۲}\Rightarrow$$

$$E=(۹\times۱۰^۹)(۴\times۲\times۱۰^{-۶})\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\left(\frac{۱}{\pi\times(۰/۱)^۲}\right)$$

$$=۱/۶۲\times۱۰^۶\ \text{N/C}$$

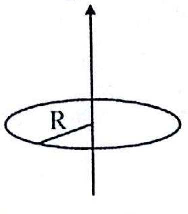
(ب) جهت میدان الکتریکی با زاویه -۴۵° نسبت به جهت مثبت محور x می‌باشد.

••۳۰– یک میلهٔ نارسانای باریک با توزیع یکنواخت بار مثبت Q به شکل دایره‌ای به شعاع R درآمده است (شکل ۱۸–۴۹). محور عمودی در مرکز حلقه محور z است که مبداء آن بر مرکز حلقه قرار دارد. بزرگی میدان الکتریکی ناشی از میله در (الف) $z=۰$ و (ب) $z=\infty$ چقدر است؟ (پ) برحسب R، در چه مقدار مثبتی از z، این بزرگی بیشینه است؟ (ت) اگر $R=۲/۰۰\text{cm}$ و $Q=۴/۰۰\mu\text{C}$ باشد، آن مقدار بیشینه چقدر است؟



شکل ۱۸–۴۹ مسئلهٔ ۳۰

حل:



میدان حلقه نازکی به شعاع R که بار q بطور یکنواخت روی آن توزیع شده است از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$E=\frac{qz}{۴\pi\varepsilon_\circ(z^۲+R^۲)^{۳/۲}}$$

(الف) و **(ب)** میدان در $z=۰$ و $z=\infty$ صفر است.

(پ)

$$E=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left[z(z^۲+R^۲)^{-۳/۲}\right]\Rightarrow$$

$$\frac{dE}{dz}=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left[(z^۲+R^۲)^{-۳/۲}+z\left(\frac{-۳}{۲}\right)(۲z)(z^۲+R^۲)^{-۵/۲}\right]\Rightarrow$$

$$\frac{dE}{dz}=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{z^۲+R^۲-۳z^۲}{(z^۲+R^۲)^{۵/۲}}\right)=۰\Rightarrow$$

$$R^۲-۲z^۲=۰\Rightarrow z=\pm\frac{R}{\sqrt{۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=۱/۴۱(\text{cm})$$

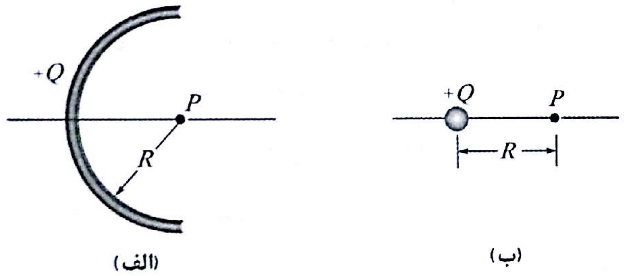
(ت)

$$E=\frac{qz}{۴\pi\varepsilon_\circ(z^۲+R^۲)^{۳/۲}}\Rightarrow$$

$$E=(۹\times۱۰^۹)\frac{۴\times۱۰^{-۶}\times(۱/۴۱\times۱۰^{-۲})}{\left[(۱/۴۱\times۱۰^{-۲})^۲+(۰/۰۲)^۲\right]^{۳/۲}}$$

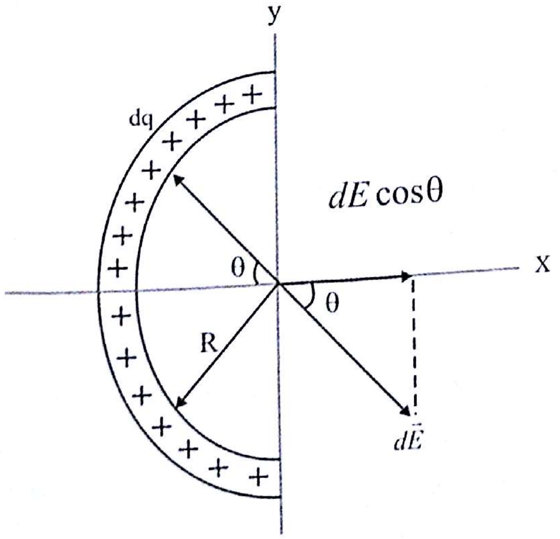
$$=۳/۴۶\times۱۰^۷\ \text{N/C}$$

••۳۱– شکل ۱۸–۵۰ الف، میلهٔ نارسانایی را نشان می‌دهد که روی آن بار $+Q$ به طور یکنواخت توزیع شده است. میله به شکل یک نیمدایره به شعاع R درآمده است و میدانی الکتریکی به بزرگی $E_{\text{کمان}}$ را در مرکز خمیدگی P ایجاد می‌کند. اگر این کمان به نقطه‌ای در فاصلهٔ R از P فشرده شود (شکل ۱۸–۵۰ ب)، بزرگی میدان الکتریکی در نقطهٔ P در چه عاملی باید ضرب شود؟



شکل ۱۸–۵۰ مسئلهٔ ۳۱

حل:



$$dE=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{d\theta}{R^۲}-E=\int dE$$

Scanned by CamScanner

$$E_{کمان} = Ex = \int \cos\theta \, dE$$

$$\lambda = Q/L \quad L = R\theta \to Q = \lambda R\theta \to dQ = \lambda R d\theta$$

$$E_{کمان} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R}{R^2}\cos\theta \, d\theta$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta \, d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

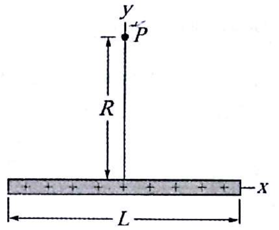
داریم: $\lambda = Q/L = Q/R\pi$ داریم:

$$E_{کمان} = \frac{Q/R\pi}{2\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}$$

$$E_{ذره} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

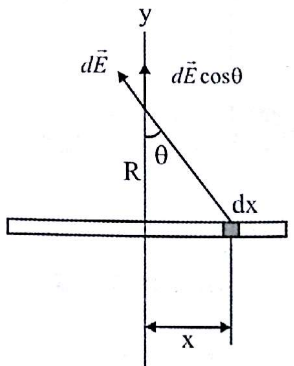
$$\frac{E_{ذره}}{E_{کمان}} = \frac{Q/4\pi\varepsilon_0 R^2}{Q/2\pi^2\varepsilon_0 R^2} = \frac{\pi}{2}$$

●●●۳۲- در شکل ۱۸-۵۱، بار مثبت $q=7/81\,pC$ روی میلهٔ نارسانای باریکی به طول $L=14/5\,cm$ به طور یکنواخت توزیع شده است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به جهت مثبت محور x) میدان الکتریکی ایجاد شده در نقطهٔ P، به فاصلهٔ $R=6/00\,cm$ از میله و در امتداد عمود منصف آن، چگونه است؟ GO



شکل ۱۸-۵۱ مسئلهٔ ۳۲

حل:



$$E = \int dy_E = \int_{-L/2}^{L/2} dE\cos\theta = 2\int_0^{L/2} dE\cos\theta$$

$$= \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{L/2}\frac{\lambda dx}{R^2+x^2}\frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$= \frac{2\lambda R}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{L/2}\frac{dx}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$x = R\tan\theta \to dx = R\sec^2\theta \, d\theta$$

$$x^2 + R^2 = R^2(1+\tan^2\theta) = R^2\sec^2\theta$$

داریم:

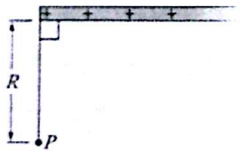
$$E = \frac{2\lambda R}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{R\sec^2\theta}{R^3\sec^3\theta}d\theta = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int\cos\theta \, d\theta$$

$$= \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin\theta = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\Bigg|_0^{L/2}$$

$$= \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\frac{L/2}{\sqrt{R^2+L^2/4}}$$

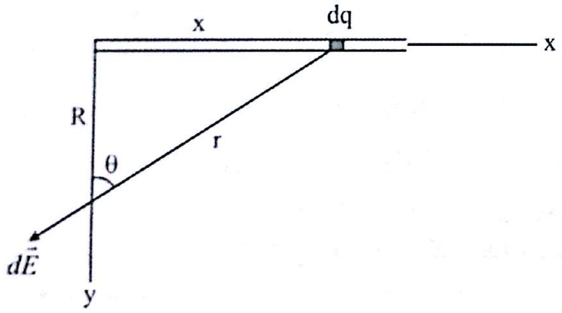
$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R}\frac{1}{\sqrt{4R^2+L^2}} = 12/4\,N/C$$

●●●۳۳- در شکل ۱۸-۵۲، یک میلهٔ نارسانای «نیم- نامتناهی» (یعنی، فقط از یک طرف نامتناهی است) دارای چگالی خطی بار λ است. نشان دهید که میدان الکتریکی $\vec{E}_P$ در نقطهٔ P با میله زاویهٔ $45°$ می‌سازد و این نتیجه مستقل از فاصلهٔ R است. (*راهنمایی*: جداگانه مؤلفهٔ $\vec{E}_P$ موازی با میله و مؤلفهٔ عمود بر میله را بیابید.)



شکل ۱۸-۵۲ مسئلهٔ ۳۳

حل:



عنصر بار $dq = \lambda dx$ به فاصله r از P است و بزرگی میدان در نقطه P از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{r^2}$$

که مولفه‌های x و y آن به ترتیب برابر $dEx = dE\sin\theta$ به سمت چپ و $dEy = dE\cos\theta$ رو به پایین است.

$$Ex = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{\lambda dx}{R^2+x^2}\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{x\,dx}{(R^2+x^2)^{3/2}} = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}}\Bigg|_0^{\infty}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Scanned by CamScanner

$$E_y=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{\lambda\,dx}{R^2+x^2}\,\frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}$$
$$=\frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{dx}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

با تغییر متغیر $x=R\tan\theta$ داریم $R^2+x^2=R^2\sec^2\theta$ و $.dx=R\sec^2\theta\, d\theta$

$$E_y=\frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\frac{R\sec^2\theta}{R^3\sec^3\theta}\,d\theta=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta$$
$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin\theta\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

با توجه به اینکه مولفه‌های افقی و قائم میدان بی‌توجه به مقدار R همواره با هم برابرند. نتیجه می‌گیریم که $\vec{E}$ برای تمامی مقادیر R با میله زاویه ۴۵° می‌سازد.

بخش ۱۸-۷ میدان الکتریکی ناشی از یک قرص باردار

●۳۴- قرصی به شعاع ۲/۵cm دارای چگالی سطحی بار $5/3\mu C/m^2$ روی وجه بالایی خود است. بزرگی میدان الکتریکی ایجاد شده توسط قرص در نقطه‌ای روی محور مرکزی و به فاصلهٔ $z=12cm$ از آن، چگونه است؟

حل: میدان الکتریکی قرص باردار به شعاع R با چگالی سطحی σ از رابطه زیر بدست می‌آید.

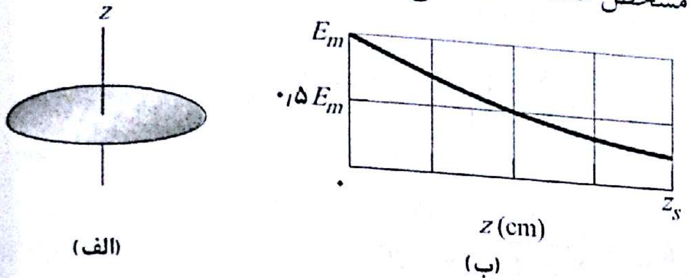
$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{Z}{\sqrt{Z^2+R^2}}\right)$$
$$=\frac{5/3\times10^{-6}\ C/m^2}{2\times8/85\times10^{-12}\ C^2/N\cdot m^2}\left[1-\frac{12\cos}{\sqrt{(12\ cm)^2+(2/5\ cm)^2}}\right]$$
$$=6/3\times10^3\ N/C$$

●۳۵- در چه فاصله‌ای روی محور عمود در مرکز یک قرص پلاستیکی باردار یکنواخت به شعاع ۰/۶۰۰m ، بزرگی میدان الکتریکی برابر با نصف بزرگی این میدان در مرکز سطح قرص است؟ SSM WWW

حل: از مساله قبل می‌دانیم که میدان در مرکز قرص با صفر قرار دادن Z در رابطه $E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{Z}{\sqrt{Z^2+R^2}}\right)$ و برابر با $E_0=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ بدست می‌آید.

$$\frac{E}{E_0}=\frac{1}{2}\to\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{Z}{Z^2+R^2}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\to$$
$$\frac{Z}{\sqrt{Z^2+R^2}}=\frac{1}{2}\to Z^2=\frac{1}{4}(Z^2+R^2)\to Z=R/\sqrt{3}\to$$
$$Z=0/346m$$

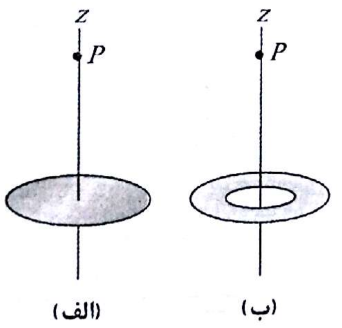
●●۳۶- شکل ۱۸-۵۳ الف، قرصی دایره‌ای با بار یکنواخت را نشان می‌دهد. مبداء محور مرکزی z که عمود بر صفحهٔ قرص است، روی آن قرار دارد. شکل ۱۸-۵۳ ب، بزرگی میدان الکتریکی را روی آن محور برحسب بزرگی بیشینهٔ E_m روی سطح قرص نشان می‌دهد. مقیاس محور z با $z_s=8/0cm$ مشخص شده است؟ شعاع قرص چقدر است؟



شکل ۱۸-۵۳ مسئلهٔ ۳۶

حل: از مسائل قبل داریم $\frac{E}{E_m}=1-\frac{Z}{\sqrt{Z^2+R^2}}$ با توجه به شکل مسأله مقدار E در $Z=4\ cm$ برابر با $\frac{1}{2}E_m$ است، پس با توجه به مسأله قبل داریم: $R=Z\sqrt{Z}=6/9$

●●۳۷- فرض کنید شما قرار است وسیله‌ای را طراحی کنید که در آن یک قرص باردار یکنواخت به شعاع R، میدانی الکتریکی ایجاد کند. بزرگی این میدان در امتداد محور عمود در مرکز، در نقطهٔ P به فاصلهٔ $2/00R$ از قرص (شکل ۱۸-۵۴ الف) بیشترین اهمیت را دارد. برآورد هزینه‌ها شما را بر آن می‌دارد که قرص را با حلقه‌ای با همان شعاع خارجی R ولی با شعاع داخلی $R/2/00$ (شکل ۱۸-۵۴ ب) جایگزین کنید. فرض کنید حلقه همان چگالی سطحی بار قرص اولیه را دارد. با این حلقه، بزرگی میدان الکتریکی در نقطهٔ P با چه درصدی کاهش می‌یابد؟



شکل ۱۸-۵۴ مسئلهٔ ۳۷

حل: با توجه به شکل مسأله درمی‌یابیم که میدان در شکل ب به اندازه میدان یک قرص دایره‌ای با شعاع $R/2$ از میدان در شکل الف کوچکتر است. یعنی

$$E_b=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{2R}{\sqrt{(2R)^2+R^2}}\right)-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{2R}{\sqrt{(2R)^2+\left(\frac{R}{2}\right)^2}}\right)$$

که جمله اول سمت راست برابر با E_a می‌باشد.

$$\frac{E_a - E_b}{E_a} = \frac{۱ - \dfrac{۲}{\sqrt{۴ + \dfrac{۱}{۴}}}}{۱ - \dfrac{۲}{\sqrt{۴ + ۱}}} = ۰/۲۸۳ = ۲۸/۳\%$$

••۳۸- یک قرص پلاستیکی دایره‌ای به شعاع $R = ۲/۰۰\,\mathrm{cm}$ دارای بار $Q = +(۲/۰۰ \times ۱۰^{۶})e$ است که به طور یکنواخت روی یک سطح آن توزیع شده است. حلقه‌ای دایره‌ای به پهنای $۳۰\,\mu\mathrm{m}$ هم‌مرکز با قرص و با شعاع $r = ۰/۵۰\,\mathrm{cm}$ روی آن سطح قرار گرفته است. برحسب کولن، چه باری در پهنای حلقه قرار دارد؟

حل:

$$\left.\begin{array}{l} dq = \sigma\, ds \\ S = \pi r^{۲} \rightarrow ds = ۲\pi r\, dr \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$dq = \left(\frac{Q}{\pi R^{۲}}\right) ۲\pi r\, dr$$

با قرار دادن $r = ۵ \times ۱۰^{-۳}\,\mathrm{m}$ و $dr = ۳۰ \times ۱۰^{-۶}\,\mathrm{m}$ داریم:

$$dq = ۲/۴ \times ۱۰^{-۱۶}\,C$$

بخش ۱۸-۸ بار نقطه‌ای در میدان الکتریکی

•۳۹- الکترونی از حالت سکون در یک میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی $۲/۰۰ \times ۱۰^{۴}\,\mathrm{N/C}$ رها می‌شود. شتاب الکترون را محاسبه کنید. (گرانش را نادیده بگیرید.) **SSM**

حل:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{me} = \frac{(۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}\,C)(۲/۰۰ \times ۱۰^{۴}\,\mathrm{N/C})}{۹/۱۱ \times ۱۰^{-۳۱}}$$

$$= ۳/۵۱ \times ۱۰^{۱۵}\,\mathrm{m/s^{۲}}$$

•۴۰- الکترونی توسط یک میدان الکتریکی رو به شرق، شتاب $۱/۸۰ \times ۱۰^{۹}\,\mathrm{m/s^{۲}}$ می‌گیرد. (الف) بزرگی و (ب) جهت میدان الکتریکی را تعیین کنید.

حل: (الف)

$$E = \frac{F}{q} = \frac{ma}{m_e} = \frac{(۹/۱۱ \times ۱۰^{-۳۱}\,\mathrm{kg})(۱/۸ \times ۱۰^{۹}\,\mathrm{m/s^{۲}})}{۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}}$$

$$= ۰/۰۱۰۲\,\mathrm{N/C}$$

(ب) جهت میدان به سمت غرب می‌باشد.

•۴۱- الکترونی روی محور یک دوقطبی الکتریکی در فاصلهٔ $۲۵\,\mathrm{nm}$ از مرکز دوقطبی قرار دارد. در صورتی که گشتاور دو قطبی $۳/۶ \times ۱۰^{-۲۹}\,\mathrm{C.m}$ باشد، بزرگی نیروی الکترواستاتیکی وارد بر الکترون چقدر است؟ فرض کنید که $۲۵\,\mathrm{nm}$ از فاصلهٔ بارهای دوقطبی خیلی بیشتر است.

حل: میدان دوقطبی الکتریکی در نقطه‌ای به فاصله z از محور آن با فرض $z >> d$ از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$E = \frac{۱}{۲\pi\varepsilon_۰}\frac{p}{z^{۳}} = \frac{۲}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{p}{z^{۳}} = (۲)(۹ \times ۱۰^{۹})\frac{۳/۶ \times ۱۰^{-۲۹}}{(۲۵ \times ۱۰^{-۹})^{۳}} \Rightarrow$$

$$E = ۴/۱۴۷ \times ۱۰^{۳}\,\mathrm{N/C}$$

$$F = qE = eE = (۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹})(۴/۱۴۷ \times ۱۰^{۳})$$

$$= ۶/۶۳۵ \times ۱۰^{-۱۶}\,\mathrm{N}$$

•۴۲- ذرهٔ آلفا (هستهٔ اتم هلیوم) دارای جرمی برابر با $۶/۶۴ \times ۱۰^{-۲۷}\,\mathrm{kg}$ و بار $+۲e$ است. (الف) بزرگی و (ب) جهت میدان الکتریکی که با نیروی گرانشی وارد بر ذره موازنه کند، چیست؟

حل: (الف)

$$qE = mg \Rightarrow E = \frac{mg}{۲e} = \frac{(۶/۶۴ \times ۱۰^{-۲۷})(۹/۸)}{(۲)(۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹})} \Rightarrow$$

$$E = ۲/۰۳ \times ۱۰^{-۷}\,\mathrm{N/C}$$

(ب) چون ذره α بار مثبت دارد میدان الکتریکی باید قائم روبه بالا باشد تا بتواند اثر نیروی وزن را خنثی کند.

•۴۳- یک سامانهٔ ابر باردار در هوای نزدیک سطح زمین، میدان الکتریکی ایجاد می‌کند. وقتی ذره‌ای دارای بار $-۲/۰ \times ۱۰^{-۹}\,C$ در این میدان قرار گیرد، نیروی الکترواستاتیکی رو به پایینی به بزرگی $۳/۰ \times ۱۰^{-۶}\,\mathrm{N}$ برآن وارد می‌شود. (الف) بزرگی میدان الکتریکی چقدر است؟ (ب) بزرگی و (پ) جهت نیروی الکتروستاتیکی $\vec{F}_{el}$ وارد بر پروتونی که در این میدان قرار گیرد، چگونه است؟ (ت) بزرگی نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد بر پروتون چقدر است؟ (ث) نسبت F_{el}/F_g در این حالت چیست؟ **SSM**

حل: (الف)

$$F = qE \Rightarrow E = \frac{F}{q} = \frac{۳ \times ۱۰^{-۶}}{۲ \times ۱۰^{-۹}} = ۱۵۰۰\,\mathrm{N/C}$$

چون بار ذره منفی است و نیرو رو به پایین به آن وارد می‌شود میدان به سمت بالاست.

(ب)

$$F_{el} = qE = (۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹})(۱۵۰۰) = ۲/۴ \times ۱۰^{-۱۶}\,\mathrm{N}$$

(پ) چون بار پروتون مثبت و میدان به سمت بالاست نیروی وارد بر آن نیز به سمت بالاست.

(ت)

$$F_g = mg = (۱/۶۷ \times ۱۰^{-۲۷})(۹/۸) = ۱/۶۴ \times ۱۰^{-۲۶}\,\mathrm{N}$$

(ث)

$$\frac{F_{el}}{F_g} = \frac{۲/۴ \times ۱۰^{-۱۶}}{۱/۶۷ \times ۱۰^{-۲۶}} = ۱/۴۶ \times ۱۰^{+۱۰}$$

•۴۴- هوای مرطوب در میدان الکتریکی $۳/۰ \times ۱۰^{۶}\,\mathrm{N/C}$ دچار فروریزش الکتریکی می‌شود (مولکولهایش یونیده می‌شوند.) در این میدان، بزرگی نیروی الکتروستاتیکی وارد بر (الف) الکترون و (ب) یونی با کمبود یک الکترون، چقدر است؟

حل: (الف)

$$F = qE = (۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹})(۳ \times ۱۰^{۶}) = ۴/۸ \times ۱۰^{-۱۳}\,\mathrm{N}$$

(ب) برابر با همان نیروی بالاست چون این نیرو به جرم بستگی ندارد بلکه به مقدار بار بستگی دارد و این یون هم یک بار $+e$ دارد.

Scanned by CamScanner

۴۵●- باریکه‌هایی از پروتونهای پرسرعت را می‌توان در «تفنگها» با استفاده از میدانهای الکتریکی که پروتونی را شتاب می‌دهند، ایجاد کرد. (الف) اگر میدان الکتریکی تفنگ برابر 2.00×10^{4} N/C باشد، شتابی که یک پروتون خواهد داشت چقدر است؟ (ب) اگر این میدان، به پروتون در مسافت 1.00cm شتاب دهد، تندی حاصل در پروتون چقدر خواهد بود؟ SSM

حل: (الف)

$$F = eE = ma \Rightarrow a = \frac{eE}{m} = \frac{(1.6\times10^{-19})(2\times10^{4})}{(1.67\times10^{-27})} \Rightarrow$$

$$a = 1.92\times10^{12}\ \text{m/s}^2$$

(ب)

$$V^2 - V_0^2 = 2ax \Rightarrow V^2 - 0 = (2)(1.92\times10^{12})(0.01) \Rightarrow$$

$$V^2 = 3.84\times10^{10} \Rightarrow V = 1.96\times10^{5}\ \text{m/s}$$

۴۶●- الکترونی با تندی 5.00×10^{8}cm/s وارد میدانی الکتریکی به بزرگی 1.00×10^{3} N/C می‌شود و در طول خط میدان در جهتی پیش می‌رود که حرکتش را کند می‌کند. (الف) این الکترون پیش از توقف لحظه‌ای چه مسافتی را می‌پیماید؟ و (ب) زمان سپری شده چقدر است؟ (پ) اگر طول ناحیه‌ای که میدان الکتریکی را در بردارد برابر 8.00mm باشد (که برای توقف الکترون در داخل آن بسیار کوچک است)، چه کسری از انرژی جنبشی اولیهٔ الکترون در این ناحیه از دست می‌رود؟

حل: (الف)

$$W = Fx = (eE)x = K \quad , \quad K = \frac{1}{2}mV_0^2 \Rightarrow$$

$$eE_x = \frac{1}{2}mv_0^2 = x = \frac{mv_0^2}{2eE} = \frac{(9.1\times10^{-31})(5\times10^{6})^2}{(2)(1.6\times10^{-19})(1\times10^{3})} \Rightarrow$$

$$x = 0.0711\ \text{m}$$

(ب)

$$x = \frac{v+v_0}{2}t \Rightarrow t = \frac{2x}{v+v_0} = \frac{(2)(0.0711)}{5\times10^{6}+0}$$

$$= 2.84\times10^{-8}\ \text{s}$$

(پ)

$$(eE)x = \Delta K \Rightarrow \Delta K = (1.6\times10^{-19})(1\times10^{3})(8\times10^{-3})$$

$$= 1.28\times10^{-18}\ \text{J}$$

$$\frac{\Delta K}{K_0}\times100 = \frac{1.28\times10^{-18}}{\left(\frac{1}{2}\right)(9.1\times10^{-31})(5\times10^{6})^2}\times100 = 11.25\%$$

۴۷●- در آزمایش میلیکان، وقتی میدان الکتریکی رو به پایین واردبر قطرهٔ روغنی به‌شعاع $1.64\mu m$ و چگالی $0.851\ g/cm^3$ برابر با 1.92×10^{5} N/C باشد، قطره در اتاقک C معلق می‌ماند (شکل ۱۸-۱۴). بار روی قطره را برحسب e بیابید.

حل:

$$F = qE = mg = \rho Vg = \rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)g \Rightarrow$$

$$qE = \rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)g \Rightarrow q = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 g\rho}{E} \Rightarrow$$

$$q = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)(\pi)(1.64\times10^{-6})^3(9.8)(851)}{1.92\times10^{5}} = 8.02\times10^{-19}\ \text{C}$$

$$q = 5e$$

۴۸●●- در لحظهٔ معینی، مؤلفه‌های سرعت یک الکترون در حال حرکت میان دو صفحهٔ باردار عبارت‌اند از $v_x = 1.5\times10^{5}$ m/s و $v_y = 3.0\times10^{3}$ m/s. فرض کنید که میدان الکتریکی میان صفحه‌ها با $\vec{E} = (120\ N/C)\hat{j}$ داده شود. برحسب نمادگذاری بردارهای یکه (الف) شتاب الکترون در میدان و (ب) سرعت الکترون، وقتی مختصهٔ x آن به اندازهٔ 2.0cm تغییر کند، چیست؟

حل: (الف)

$$F = ma = qE \Rightarrow a = \frac{qE}{m} = \frac{(1.6\times10^{-19})(120)}{(9.1\times10^{-31})} \Rightarrow$$

$$a = 2.11\times10^{13}\ \text{m/s}$$

چون بار الکترون منفی است نیروی وارد بر آن و در نتیجه شتاب آن در خلاف جهت میدان E است.

$$a = -2.11\times10^{13}\ \hat{j}$$

(ب) در امتداد محور x بر الکترون نیرویی وارد نمی‌شود. بنابراین مولفه سرعت در راستای محور x ثابت است.

$$x = v_x t \Rightarrow t = \frac{x}{v_{x_0}} = \frac{0.02}{1.5\times10^{5}} = 1.33\times10^{-7}\ \text{s}$$

$$v_y = at + v_{y_0}$$

$$\Rightarrow v_y = (-2.11\times10^{13})(1.33\times10^{-7}) + (3\times10^{3})$$

$$v_y = -2.8\times10^{6}\ \text{m/s} \Rightarrow \vec{v} = 1.5\times10^{5}\ \hat{i} - 2.8\times10^{6}\ \hat{j}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(1.5\times10^{5})^2 + (-2.8\times10^{6})^2}$$

$$= 2.8\times10^{6}\ \text{m/s}$$

۴۹●●- در ناحیه‌ای میان دو صفحهٔ باردار با علامت مخالف، یک میدان الکتریکی یکنواخت برقرار است. الکترونی از حالت سکون از سطح صفحهٔ باردار منفی رها می‌شود و با سطح صفحهٔ مقابل که به فاصلهٔ 2.0cm از آن است پس از مدت زمان 1.5×10^{-8} s برخورد می‌کند. (الف) تندی الکترون هنگام برخورد با صفحهٔ دوم چقدر است؟ (ب) بزرگی میدان الکتریکی $\vec{E}$ چیست؟ ILW

حل: (الف)

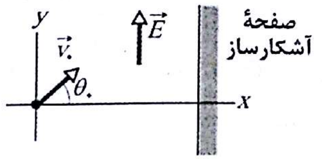
$$x = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow a = \frac{2x}{t^2} = \frac{(2)(0.02)}{(1.5\times10^{-8})^2} = 1.78\times10^{14}\ \text{m/s}^2$$

Scanned by CamScanner

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = (۱/۷۸\times۱۰^{۱۴})(۱/۵\times۱۰^{-۸}) + ۰$$
$$= ۲/۶۷\times۱۰^{۶}\ \text{m/s}$$

ب) $$F = ma = qE \Rightarrow E = \frac{ma}{q} = \frac{(۹/۱\times۱۰^{-۳۱})(۱/۷۸\times۱۰^{۱۴})}{(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}$$
$$= ۱/۰۱\times۱۰^{۳}\ \text{N/C}$$

●●۵۰- در شکل ۱۸-۵۵، الکترونی با تندی اولیهٔ $v_0 = ۲/۰۰\times۱۰^{۶}$ m/s، در زاویهٔ $\theta_0 = ۴۰/۰^\circ$ نسبت به محور x شلیک می‌شود و در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E} = (۵/۰۰\ \text{N/C})\hat{j}$ حرکت می‌کند. صفحه‌ای برای آشکار ساختن الکترونها، موازی محور y در فاصلهٔ $x = ۳/۰۰\text{m}$ قرار داده شده است. وقتی الکترون به این صفحه برخورد کند، سرعت آن برحسب نمادگذاری بردار یکه چیست؟



شکل ۱۸-۵۵ مسئلهٔ ۵۰

حل: نیرو در راستای محور y به الکترون وارد می‌شود. بنابراین مولفه سرعت در امتداد محور x ثابت می‌ماند.

$$v_x = v_{x_0} = V_0\cos\theta_0 = (۲\times۱۰^{۶})(\cos ۴۰) = ۱/۵۳\times۱۰^{۶}\ \text{m/s}$$

$$v_{y_0} = v_0\sin\theta_0 = (۲\times۱۰^{۶})(\sin ۴۰) = ۱/۲۹\times۱۰^{۶}\ \text{m/s}$$

$$x = v_{x_0}t \Rightarrow t = \frac{x}{V_{x_0}} = \frac{۳}{(۱/۵۳\times۱۰^{۶})} = ۱/۹۶\times۱۰^{-۶}\ \text{s}$$

$$ma = qE$$

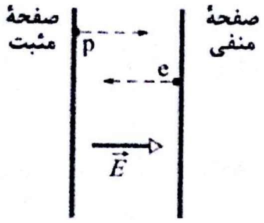
$$v_y = a_y t + v_{y_0} = \frac{-qE}{m}t + v_{y_0} \Rightarrow$$

جهت نیروی وارد بر الکترون در خلاف جهت محور y است.

$$v_y = -\frac{(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۵)(۱/۹۶\times۱۰^{-۶})}{(۹/۱\times۱۰^{-۳۱})} + (۱/۲۹\times۱۰^{۶})$$
$$= -۴/۳۳\times۱۰^{۵}\ \text{m/s}$$

$$\vec{v} = (۱/۵۳\times۱۰^{۶}\ \hat{i} - ۴/۳۳\times۱۰^{۵}\ \hat{j})\ \text{m/s}$$

●●۵۱- میان دو صفحهٔ مسی موازی بزرگ که به فاصلهٔ ۵/۰cm از هم قراردارند، میدان الکتریکی یکنواختی، به ترتیبی که در شکل ۱۸-۵۶ نشان داده شده، برقرار است. الکترونی، درست در همان لحظه‌ای که یک پروتون از صفحهٔ مثبت رها می‌شود، از صفحهٔ منفی رها می‌گردد. با چشمپوشی از نیرویی که دو ذره بر یکدیگر وارد می‌کنند، فاصلهٔ آنها را از صفحهٔ مثبت، وقتی از کنار هم می‌گذرند، بیابید. (آیا از اینکه برای حل این مسئله نیازی به دانستن میدان الکتریکی ندارید، شگفت زده می‌شوید؟)



شکل ۱۸-۵۶ مسئلهٔ ۵۱

حل: فرض می‌کنیم نقطه A جایی باشد که الکترون و پروتون به هم می‌رسند.

$$F_p = F_e = qE = eE$$

$$F = ma \Rightarrow a_p = \frac{F_p}{m_p} = \frac{eE}{m_p}\ ,\quad a_e = \frac{F_e}{m_e} = \frac{eE}{m_e}$$

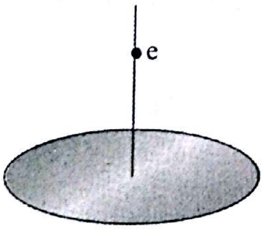
$$x_p = \frac{۱}{۲}a_p t^{۲}\ ,\quad x_e = \frac{۱}{۲}a_e t^{۲} \Rightarrow$$

$$\frac{x_p}{x_e} = \frac{a_p}{a_e} \Rightarrow \frac{x_p}{۰/۰۵ - x_p} = \frac{\frac{eE}{m_p}}{\frac{eE}{m_e}} = \frac{m_e}{m_p} = \frac{۹/۱\times۱۰^{-۳۱}}{۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷}} \Rightarrow$$

$$(۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷})x_p = (۰/۰۵)(۹/۱\times۱۰^{-۳۱}) - (۹/۱\times۱۰^{-۳۱})x_p \Rightarrow$$

$$x_p = x_A = ۲/۷۲\times۱۰^{-۵}\ \text{m}$$

●●۵۲- در شکل ۱۸-۵۷، الکترونی (e) از حالت سکون روی محور مرکزی قرص باردار یکنواختی به شعاع R رها می‌شود. چگالی سطحی بار روی قرص برابر $+۴/۰۰\mu\text{C/m}^{۲}$ است. بزرگی شتاب اولیهٔ الکترون در صورتی که از فاصلهٔ (الف) R، (ب) $R/۱۰۰$، و (پ) $R/۱۰۰۰$ از مرکز قرص رها شود، چقدر است؟ (ت) چرا هنگامی که نقطهٔ رهاشدن را به قرص نزدیکتر می‌کنیم، بزرگی شتاب فقط اندکی افزایش می‌یابد؟



شکل ۱۸-۵۷ مسئلهٔ ۵۲

حل: میدان یک قرص به شعاع R که بار q روی سطح آن بطور یکنواخت توزیع شده است از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$E = \frac{\sigma}{۲\varepsilon_0}\left[۱ - \frac{z}{\sqrt{z^{۲} + R^{۲}}}\right]$$

$$ma = qE \Rightarrow a = \frac{eE}{m} = \frac{e}{m}\times\frac{\sigma}{۲\varepsilon_0}\left[۱ - \frac{z}{\sqrt{z^{۲} + R^{۲}}}\right] \Rightarrow$$

$$a = \frac{(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۴\times۱۰^{-۶})}{(۲)(۹/۱\times۱۰^{-۳۱})(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})} = \left[۱ - \frac{z}{\sqrt{z^{۲} + R^{۲}}}\right] \Rightarrow$$

Scanned by CamScanner

$$a = 3.97\times10^{16}\left[1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]$$

(الف) $$z = R \Rightarrow a = (3.97\times10^{16})\left[1-\frac{z}{\sqrt{R^2+R^2}}\right] = (3.97\times10^{16})\left[1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \Rightarrow a = 1.16\times10^{16}\ \text{m/s}^2$$

(ب) $$z = \frac{R}{100} \Rightarrow a = (3.97\times10^{16})\left[1-\frac{\frac{R}{100}}{\sqrt{(0.01R)^2+R^2}}\right]$$

$$\Rightarrow a = (3.97\times10^{16})\left(1-\frac{0.01}{\sqrt{1.0001}}\right) = 3.93\times10^{16}\ \text{m/s}^2$$

(پ) $$z = \frac{R}{1000} \Rightarrow a = (3.97\times10^{16})\left[1-\frac{0.001R}{\sqrt{(0.001R)^2+R^2}}\right]$$

$$\Rightarrow a = (3.97\times10^{16})\left(1-\frac{0.001}{\sqrt{1.000001}}\right) = 3.97\times10^{16}\ \text{m/s}^2$$

(ت) با کوچک شدن z شتاب فقط اندکی افزایش می‌یابد چون جمله منفی داخل کروشه فقط کمی کوچکتر می‌شود.

••۵۳ – قطعه‌ای به جرم $10.0\ \text{g}$ و بار $+8.00\times10^{-5}\ \text{C}$ در میدان الکتریکی $\vec{E} = (3000\hat{i} - 600\hat{j})\ \text{N/C}$ قرار گرفته است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به جهت مثبت محور x) نیروی الکتروستاتیکی وارد بر قطعه چیست؟ اگر قطعه از حالت سکون در مبدأ و در زمان $t=0$ رها شود، مؤلفه‌های (پ) x و (ت) y آن در $t = 3.00\ \text{s}$ چیست؟

حل: (الف)

$$F = qE = (8\times10^{-5})\sqrt{(3000)^2 + (-600)^2} = 0.245\ \text{N}$$

$$\tan\theta = \frac{E_y}{E_x} = \frac{-600}{3000} = -0.2 \Rightarrow \theta = -11.31^\circ$$

(ب) $$F_x = ma_x \Rightarrow a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{qE_x}{m} = \frac{(8\times10^{-5})(3000)}{(0.01)} \Rightarrow$$

$$a_x = 24\ \text{m/s}^2$$

$$x = \frac{1}{2}a_x t^2 = \left(\frac{1}{2}\right)(24)(3)^2 = 108\ \text{m}$$

(پ) $$F_y = ma_y \Rightarrow a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{qE_y}{m} = \frac{(8\times10^{-5})(-600)}{(0.01)} \Rightarrow$$

$$a_y = -4.8\ \text{m/s}^2$$

(ت) $$y = \frac{1}{2}a_y t^2 = \left(\frac{1}{2}\right)(-4.8)(3)^2 = -21.6\ \text{m}$$

••۵۴– الکترونی وارد ناحیهٔ میدان الکتریکی یکنواختی که دارای بزرگی $E = 50\ \text{N/C}$ است، می‌شود. سرعت اولیهٔ الکترون $40\ \text{km/s}$ و در همان جهت میدان الکتریکی است. (الف) تندی الکترون $1.5\ \text{ns}$ پس از ورود به این ناحیه چقدر است؟ (ب) در طی این $1.5\ \text{ns}$، الکترون چه مسافتی را می‌پیماید؟

حل: (الف) $$ma = qE \Rightarrow a = \frac{eE}{m} = \frac{(1.6\times10^{-19})(50)}{(9.1\times10^{-31})} = 8.79\times10^{12}\ \text{m/s}^2$$

$$V = at + V_0 = (-8.79\times10^{12})(1.5\times10^{-9}) + 40\times10^{3} = 2.68\times10^{4}\ \text{m/s}$$

چون بار الکترون منفی است نیروی وارد بر آن در خلاف جهت میدان است و حرکت آن کندشونده است بنابراین شتاب آن منفی است.

(ب) $$x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t = \left(\frac{1}{2}\right)(-8.79\times10^{12})(1.5\times10^{-9})^2 + (40\times10^{3})(1.5\times10^{-9}) \Rightarrow$$

$$x = 5.01\times10^{-5}\ \text{m}$$

••۵۵- فرض کنید که زنبور عسل کره‌ای به قطر $1.000\ \text{cm}$ با بار $+45.0\ \text{pC}$ است که روی سطح آن به طور یکنواخت پخش شده است. همچنین فرض کنید که دانهٔ گرده کره‌ای شکل به قطر $40.0\ \mu\text{m}$ است که به علت بار زنبور، $-1.00\ \text{pC}$ بار در طرف نزدیک کره و بار $+1.00\ \text{pC}$ در طرف دورتر آن القا می‌شود. (الف) بزرگی نیروی الکتروستاتیکی وارد بر دانه از طرف زنبور چقدر است؟ سپس فرض کنید که زنبور دانه را تا فاصلهٔ $1.000\ \text{mm}$ از نوک کلالهٔ گل ببرد و بار نوک $-45.0\ \text{pC}$ باشد. (ب) بزرگی نیروی الکتروستاتیک خالص وارد بر دانه از طرف کلاله چقدر است؟ (پ) آیا دانه روی زنبور می‌ماند یا به طرف کلاله حرکت می‌کند؟

حل: (الف)

$$E = \frac{kq}{r^2} = \frac{(9\times10^{9})(45\times10^{-12})}{(0.01)^2} = 4.05\times10^{3}\ \text{N/C}$$

$$F = Eq = (4.05\times10^{3})(1\times10^{-12}) = 4.05\times10^{-9}\ \text{N}$$

(ب) $$E = \frac{kq}{r^2} = \frac{(9\times10^{9})(45\times10^{-12})}{(0.001)^2} = 4.05\times10^{5}\ \text{N/C}$$

$$F = Eq = (4.05\times10^{5})(1\times10^{-12}) = 4.05\times10^{-7}\ \text{N}$$

(پ) نیروی وارد شده از طرف کلاله به دانه گرده بزرگتر از نیروی وارده از طرف زنبور است بنابراین دانه به طرف کلاله حرکت می‌کند.

بخش ۱۸-۹ دو قطبی در میدان الکتریکی

•۵۶- یک دوقطبی الکتریکی از بارهای $+2e$ و $-2e$ تشکیل شده است که به فاصلهٔ $0.78\ \text{nm}$ از هم قرار دارند. این دوقطبی در میدانی الکتریکی به شدت $3.4\times10^{6}\ \text{N/C}$ واقع است. بزرگی گشتاور وارد بر دوقطبی را وقتی گشتاور دوقطبی

Scanned by CamScanner

(الف) موازی با، (ب) عمود بر، و (پ) پاد موازی با میدان الکتریکی است پیدا کنید.

حل: $p = qd = (۲)(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})(۰/۷۸\times ۱۰^{-۹})$

$= ۲/۴۹۶\times ۱۰^{-۲۸}\ C\cdot m$

(الف) $\tau = pE\sin\theta \ ,\ \theta = ۰ \Rightarrow \tau = ۰$

(ب) $\theta = ۹۰^\circ \Rightarrow \tau = (۲/۴۹۶\times ۱۰^{-۲۸})(۳/۴\times ۱۰^{۶})(۱)$

$= ۸/۴۸۶\times ۱۰^{-۲۲}\ N\cdot m$

(پ) $\theta = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \tau = ۰$

۵۷•- یک دوقطبی الکتریکی از بارهایی به بزرگی $۱/۵۰nC$ که $۶/۲۰\mu m$ از هم فاصله دارند تشکیل شده است و در یک میدان الکتریکی به شدت $۱۱۰۰N/C$ قرار دارد. (الف) بزرگی گشتاور دوقطبی الکتریکی و (ب) اختلاف بین انرژیهای پتانسیل مربوط به سمتگیریهای موازی و پادموازی دوقطبی با میدان $\vec{E}$ چقدر است؟ SSM

حل: (الف)

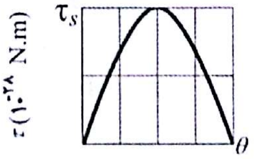
$p = qd = (۱/۵\times ۱۰^{-۹})(۶/۲\times ۱۰^{-۶}) = ۹/۳\times ۱۰^{-۱۵}\ c\cdot m$

(ب) $U = -\vec{p}\cdot\vec{E}$

$\Delta U = U_{۱۸۰} - U_{۰} = (-pE\cos ۱۸۰) - (-pE\cos ۰) \Rightarrow$

$\Delta U = ۲pE = (۲)(۹/۳\times ۱۰^{-۱۵})(۱۱۰۰) = ۲/۰۴۶\times ۱۰^{-۱۱}\ J$

۵۸••- یک دوقطبی الکتریکی معین در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ به بزرگی $۴۰N/C$ قرار دارد. شکل ۱۸-۵۸، بزرگی گشتاور τ وارد بر این دو قطبی را برحسب زاویهٔ θ میان میدان $\vec{E}$ و گشتاور دو قطبی $\vec{p}$ نشان می‌دهد. مقیاس محور عمودی با $\tau_s = ۱۰۰\times ۱۰^{-۲۸}\ N.m$ مشخص شده است بزرگی $\vec{p}$ چقدر است؟



شکل ۱۸-۵۸ مسئلهٔ ۵۸

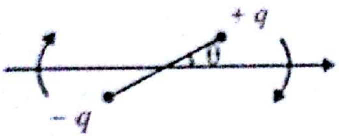
حل: زمانی τ بیشینه است که $\theta = ۹۰^\circ$ باشد.

$\tau = pE\sin\theta \Rightarrow$

$$\tau_{max} = pE \Rightarrow p = \frac{\tau_{max}}{E} = \frac{۱۰۰\times ۱۰^{-۲۸}}{۴۰} = ۲/۵\times ۱۰^{-۲۸}\ C\cdot m$$

۵۹••- برای بسامد نوسانهای با دامنهٔ کوچک یک دوقطبی الکتریکی، با گشتاور دوقطبی $\vec{p}$ و لختی دورانی I، حول مکان تعادل آن در یک میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی E، عبارتی پیدا کنید.

حل:



$\tau = pE\sin\theta$

جهت گشتاور به گونه‌ای است که می‌خواهد دوقطبی را به حالت تعادل در $\theta = ۰$ بازگرداند. برای زوایای کوچک θ داریم: $\sin\theta \cong \theta \Rightarrow$

$\tau \cong -pE\theta \ ,\ \tau = I\alpha = I\dfrac{d^۲\theta}{dt^۲} \Rightarrow$

علامت منفی برای τ نشان می‌دهد که جهت گشتاور همواره به طرف تعادل است مانند آونگ ساده.

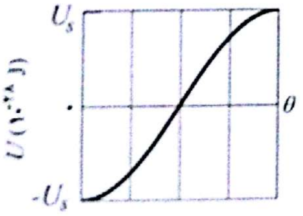
$I\dfrac{d^۲\theta}{dt^۲} = -pE\theta \Rightarrow$

$I\dfrac{d^۲\theta}{dt^۲} + pE\theta = ۰ \Rightarrow \dfrac{d^۲\theta}{dt^۲} + \dfrac{p}{I}E\theta = ۰ \Rightarrow$

$\dfrac{d^۲\theta}{dt^۲} + \omega^۲\theta = ۰ \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{pE}{I}}$

$\omega = ۲\pi f \Rightarrow f = \dfrac{\omega}{۲\pi} = \dfrac{۱}{۲\pi}\sqrt{\dfrac{pE}{I}}$

۶۰••- یک دوقطبی الکتریکی معین در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ به بزرگی $۲۰N/C$ قرار دارد. شکل ۱۸-۳۰، انرژی پتانسیل U دوقطبی را برحسب زاویهٔ θ بین $\vec{E}$ و گشتاور دوقطبی $\vec{p}$ به دست می‌دهد. مقیاس محور عمودی با $U_s = ۱۰۰\times ۱۰^{-۲۸}\ J$ مشخص شده است. بزرگی $\vec{p}$ چقدر است؟



شکل ۱۸-۳۰ مسئلهٔ ۶۰

حل:

$$U = -\vec{p}\cdot\vec{E} = -pE\cos\theta \Rightarrow U_m = pE \Rightarrow p = \frac{U_m}{E} \Rightarrow$$

$$p = \frac{۱۰۰\times ۱۰^{-۲۸}}{۲۰} = ۵\times ۱۰^{-۲۸}\ C\cdot m$$

۶۱••- برای آنکه یک دوقطبی الکتریکی به اندازهٔ ۱۸۰° در یک میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی $E = ۴۶/۰N/C$ بچرخد، چه مقدار کار لازم است در صورتی که $p = ۳/۰۲\times ۱۰^{-۲۵}\ C\cdot m$ و زاویهٔ اولیه ۶۴° باشد؟

حل:

$$W=U_{۶۴+۱۸۰}-U_{۶۴}=-pE\cos(۲۴۴)-(-pE\cos ۶۴)$$
$$=۲pE\cos ۶۴=(۲)(۳/۰۲\times ۱۰^{-۲۵})(۴۶)\cos ۶۴$$
$$=۱/۲۲\times ۱۰^{-۲۳}\ \text{J}$$

مسئله‌های اضافی

۶۲- میلیکان در یکی از آزمایشهای خود، بارهای اندازه‌گیری شدهٔ آمده در جدول را در زمانهای مختلف روی یک قطرهٔ تنها مشاهده کرد

$۶/۵۶۳\times ۱۰^{-۱۹}$C	$۱۳/۱۳\times ۱۰^{-۱۹}$C	$۱۹/۷۱\times ۱۰^{-۱۹}$C
$۸/۲۰۴\times ۱۰^{-۱۹}$C	$۱۶/۴۸\times ۱۰^{-۱۹}$C	$۲۲/۸۹\times ۱۰^{-۱۹}$C
$۱۱/۵۰\times ۱۰^{-۱۹}$C	$۱۸/۰۸\times ۱۰^{-۱۹}$C	$۲۶/۱۳\times ۱۰^{-۱۹}$C

براساس این داده‌ها، مقدار بار بنیادی e چقدر است؟

حل: ابتدا یک مقدار تقریبی برای e با بدست آوردن اختلاف بین مقدارهای داده شده می‌یابیم. کمترین اختلاف میان مقادیر داده‌های پنجم و ششم است.

$$۱۸/۰۸\times ۱۰^{-۱۹}-۱۶/۴۸\times ۱۰^{-۱۹}=۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}\ \text{C}$$

که آن را e_T تقریبی می‌نامیم.

ثابتهای n را با استفاده از این مقدار تقریبی بدست می‌آوریم.

داده ۱: $\dfrac{۶/۵۶۳\times ۱۰^{-۱۹}}{e_T}=۴/۱\Rightarrow n_۱=۴$

داده ۲: $\dfrac{۸/۲۰۴\times ۱۰^{-۱۹}}{e_T}=۵/۱۳\Rightarrow n_۲=۵$

داده ۳: $\dfrac{۱۱/۵\times ۱۰^{-۱۹}}{e_T}=۷/۱۹\Rightarrow n_۳=۷$

داده ۴: $\dfrac{۱۳/۱۳\times ۱۰^{-۱۹}}{e_T}=۸/۲۱\Rightarrow n_۴=۸$

داده ۵: $\dfrac{۱۶/۴۸\times ۱۰^{-۱۹}}{e_T}=۱۰/۳\Rightarrow n_۱=۱۰$

داده ۶: $\dfrac{۱۸/۰۸\times ۱۰^{-۱۹}}{e_T}=۱۱/۳\Rightarrow n_۶=۱۱$

داده ۷: $\dfrac{۱۹/۷۱\times ۱۰^{-۱۹}}{e_T}=۱۲/۳۲\Rightarrow n_۷=۱۲$

داده ۸: $\dfrac{۲۲/۸۹\times ۱۰^{-۱۹}}{e_T}=۱۴/۳۱\Rightarrow n_۸=۱۴$

داده ۹: $\dfrac{۲۶/۱۳\times ۱۰^{-۱۹}}{e_T}=۱۶/۳۳\Rightarrow n_۹=۱۶$

سپس یک مجموعه جدید از داده‌ها را با تقسیم مقادیر داده شده بر مقادیر دقیق مربوط به آنها (یعنی n_i به ازای $i=۱,۲,۳,\ldots$) بنا می‌کنیم.

$$e_۱,e_۲,e_۳,\ldots=\frac{۶/۵۶۳\times ۱۰^{-۱۹}}{n_۱},\frac{۸/۲۰۴\times ۱۰^{-۱۹}}{n_۲},\frac{۱۱/۵\times ۱۰^{-۱۹}}{n_۳},\ldots$$

که مقادیر زیر را بدست می‌دهد:

$(۱/۶۴۰\times ۱۰^{-۱۹},۱/۶۴۰۸\times ۱۰^{-۱۹},۱/۶۴۲۸۶\times ۱۰^{-۱۹},\ldots)$

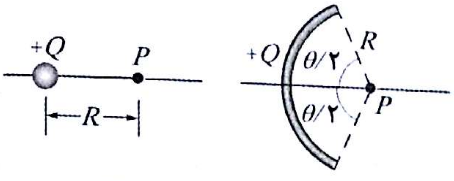
و آن را به عنوان مجموعه داده‌های جدید درنظر می‌گیریم.

حال با گرفتن میانگین و انحراف معیار به مقدار زیر می‌رسیم:

$$e=e_{ave}\pm\Delta e=(۱/۶۴۱\pm ۰/۰۰۴)\times ۱۰^{-۱۹}\ \text{C}$$

حد پایین این رابطه به مقدار $۱/۶۳۷\times ۱۰^{-۱۹}$ (C) می‌انجامد که هنوز در حدود ۲٪ بیشتر از مقدار پذیرفته شده برای e است.

۶۳- در شکل ۱۸-۶۰ الف، ذره‌ای با بار $+Q$ میدانی الکتریکی به بزرگی $E_{\text{ذره}}$ در نقطهٔ P در فاصلهٔ R از ذره ایجاد می‌کند. در شکل ۱۸-۶۰ ب، همان مقدار بار به طور یکنواخت روی کمانی دایره‌ای به شعاع R و زاویهٔ θ توزیع شده است. بار روی کمان، میدانی الکتریکی به بزرگی $E_{\text{کمان}}$ در مرکز خمیدگی P آن ایجاد می‌کند. به ازای چه مقداری از θ، $E_{\text{کمان}}=۰/۵۰۰\,E_{\text{ذره}}$ است؟ (*راهنمایی*: شما احتمالاً به یک حل ترسیمی روی می‌آورید.)



شکل ۱۸-۶۰ مسئلهٔ ۶۳

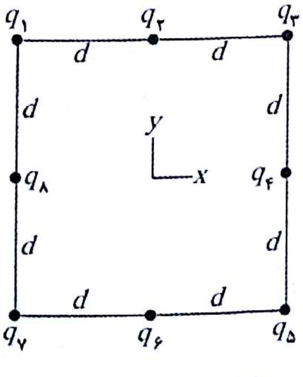
حل:

$$E_{\text{ذره}}=\frac{kQ}{R^۲}\quad,\quad E_{\text{کمان}}=\frac{Q}{۲\pi\varepsilon_۰R^۲}\frac{\sin\frac{\theta}{۲}}{\theta}=\frac{۲kQ}{R^۲\theta}\sin\frac{\theta}{۲}$$

$$\frac{۲kQ}{R^۲\theta}\sin\frac{\theta}{۲}=(۰/۵)\left(\frac{kQ}{R^۲}\right)\Rightarrow\frac{۲}{\theta}\sin\frac{\theta}{۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow$$

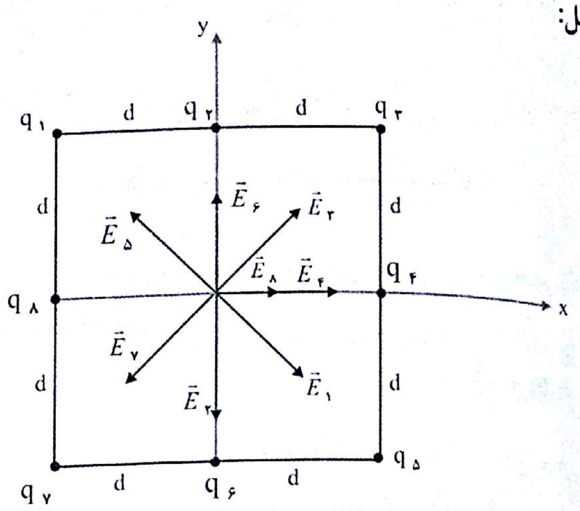
$$\sin\frac{\theta}{۲}=\frac{\theta}{۴}\quad\Rightarrow\ \theta ۳/۸۱\text{rad}\quad\Rightarrow\ \theta=۲۱۸/۴^\circ$$

۶۴- در شکل ۱۸-۶۱، هشت ذره مربعی را تشکیل داده‌اند که در آن $d=۲/۰$ cm است. بارها عبارت‌اند از: $q_۱=+۳e$، $q_۲=+e$، $q_۳=-۵e$، $q_۴=-۲e$، $q_۵=+۳e$، $q_۶=+e$، $q_۷=-۵e$، و $q_۸=+e$. برحسب نمادگذاری بردار یکه، میدان الکتریکی خالص ناشی از ذره‌ها در مرکز مربع چیست؟



شکل ۱۸-۶۱ مسئلهٔ ۶۴

حل:



$E_۱ - E_۵ = \frac{k(۳e)}{(\sqrt{۲}d)^۲}$, $E_۲ = E_۶ = \frac{ke}{d^۲}$,

$E_۳ - E_۷ = \frac{k(۵e)}{(\sqrt{۲}d)^۲}$, $E_۴ = \frac{k(۲e)}{d^۲}$, $E_۸ = \frac{ke}{d^۲}$

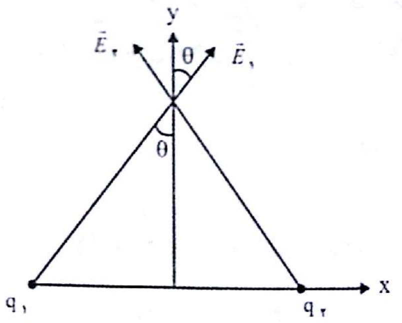
میدان ناشی از همه‌ی بارها یکدیگر را خنثی می‌کنند.به جز دوبار $q_۴$ و $q_۸$.

$$E_{total} = E_۴ + E_۸ = \frac{۲ke}{d^۲} + \frac{ke}{d^۲} = \frac{۳ke}{d^۲} \Rightarrow$$

$$\vec{E}_{total} = \frac{(۳)(۹\times ۱۰^۹)(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})}{(۰/۰۲)^۲}\,\hat{i} = ۱/۰۸\times ۱۰^{-۵}\,\hat{i}\ \text{N/C}$$

۶۵- دو ذره، هر یک با باری به بزرگی ۱۲ nC در دو گوشهٔ مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع ۲/۰m قرار دارند. مطلوب است بزرگی میدان الکتریکی در صورتی که (الف) هر دو بار مثبت باشند و (ب) یکی مثبت و دیگری منفی باشد.

حل: (الف)



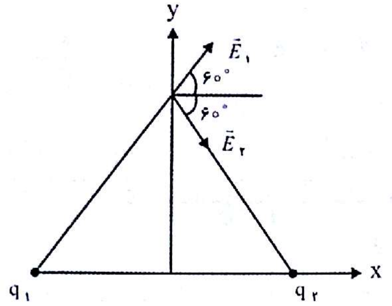
به دلیل تقارن، میدان فقط در راستای محور y است و مؤلفه‌ها در راستای محور x اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند.

$$E_{total} = ۲E_y = ۲E_۱\cos\theta = ۲\frac{kq}{r^۲}\cos\theta$$

$$= \frac{(۲)(۹\times ۱۰^۹)(۱۲\times ۱۰^{-۹})}{۴}\times\cos ۳۰ \Rightarrow$$

$$E_{total} = ۴۶/۷۷\ \text{N/C}$$

(ب) به دلیل تقارن میدان فقط در راستای محور x است و مولفه‌ها در راستای محور y اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند.



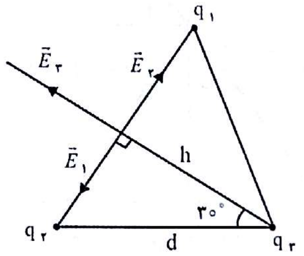
$$E_{total} = ۲E_x = ۲E_۱\cos\theta = \frac{۲kq}{r^۲}\cos\theta$$

$$= \frac{(۲)(۹\times ۱۰^۹)(۱۲\times ۱۰^{-۹})}{۴}\times\cos ۶۰ \Rightarrow$$

$$E_{total} = ۲۷\ \text{N/C}$$

۶۶- سه ذره، هر یک با بار مثبت Q، تشکیل مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع d را می‌دهند. بزرگی میدان الکتریکی ناشی از ذره‌ها در وسط هر ضلع چقدر است؟

حل:



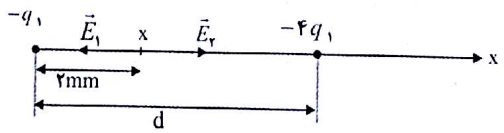
$\vec{E}_۱$ و $\vec{E}_۲$ اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند.

$$h = d\cos ۳۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}d \quad , \quad E = \frac{kQ}{h^۲} = \frac{Q}{(۴\pi\varepsilon_۰)\left(\frac{۳}{۴}d^۲\right)}$$

$$= \frac{Q}{۳\pi\varepsilon_۰ d^۲}$$

۶۷- ذره‌ای با بار $-q_۱$ در مبداء محور x قرار دارد. (الف) ذره‌ای با بار $-۴q_۱$ در چه مکانی از محور باید قرار گیرد تا میدان الکتریکی خالص در $x=۲/۰$mm واقع بر آن محور برابر صفر باشد؟ اگر ذره‌ای با بار $+۴q_۱$ در آن مکان قرار گیرد، جهت میدان الکتریکی خالص (نسبت به جهت محور x) چه خواهد بود؟

حل: (الف) چون بار هر دو ذره منفی نقطه موردنظر بین دوبار قرار دارد.



$$E_۱ = E_۲$$

$$\frac{kq_۱}{x^۲} = \frac{k(۴q_۱)}{(d-x)^۲} \Rightarrow \frac{۱}{x} = \frac{۲}{d-x} \Rightarrow ۲x = d - x \Rightarrow$$

Scanned by CamScanner

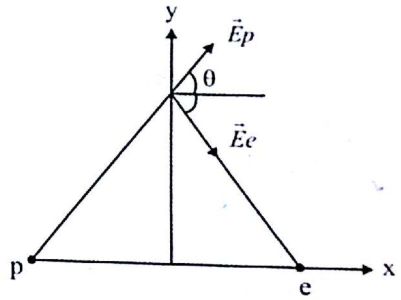
$3x = d \Rightarrow d = 6$ mm

(ب)

در این حالت که ذره دوم بار مثبت دارد بردارهای میدان الکتریکی ایجاد شده توسط هر دوبار در $x = 2$ mm، در جهت $-x$ قرار دارند. بنابراین جهت میدان الکتریکی خالص در خلاف جهت محور x است.

۶۸- یک پروتون و یک الکترون دو گوشهٔ یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع 2.0×10^{-6} m را تشکیل داده‌اند. بزرگی میدان الکتریکی خالص ناشی از این دو ذره در گوشهٔ سوم چقدر است؟

حل:

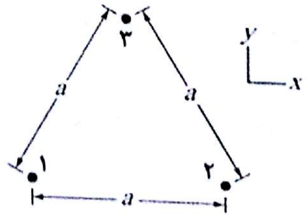


$$E_p = E_e = \frac{ke}{r^2} \Rightarrow$$

$$E = 2E_p\cos\theta = \frac{2ke}{r^2}\cos\theta \Rightarrow$$

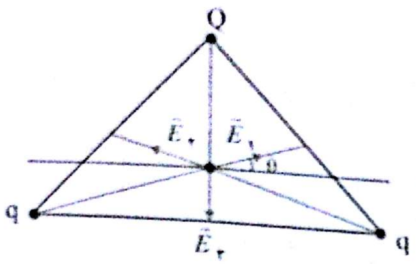
$$E = \frac{(2)(9\times10^{9})(1.6\times10^{-19})}{(2\times10^{-6})^2}\cos 60 = 360 \text{ N/C}$$

۶۹- در شکل ۱۸-۶۲، ذرهٔ ۱ (با بار $+1.00\mu C$)، ذرهٔ ۲ (با بار $+1.00\mu C$)، و ذرهٔ ۳ (با بار Q) یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را تشکیل می‌دهند. به ازای چه مقداری از Q (هم از لحاظ علامت و هم از لحاظ بزرگی) میدان الکتریکی ناشی از این ذره‌ها، در مرکز مثلث برابر صفر است؟



شکل ۱۸-۶۲ مسئله‌های ۶۹ و ۸۲

حل:



بنابر تقارن برای اینکه میدان الکتریکی در مرکز مثلث صفر باشد باید بار Q مثبت باشد.

$$E_1 = E_2 = \frac{kq}{r^2}$$

$$E_x = 0 \Rightarrow E_1\cos\theta = E_2\cos\theta$$

$$E_y = 0 \Rightarrow E_1\sin\theta + E_2\sin\theta = E_3 \Rightarrow E_3 = 2E_1\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{kQ}{r^2} = 2\frac{kq}{r^2}\sin 30 \Rightarrow Q = 2q\sin 30 \Rightarrow Q = q = 1\,\mu C$$

۷۰- (الف) قرص شکل ۱۸-۱۳ چه بار کلی (اضافی) q باید داشته باشد تا میدان الکتریکی E روی سطح قرص در مرکز آن دارای بزرگی 3.0×10^{6} N/C باشد، میدانی که باعث فروریزش الکتریکی هوا و ایجاد جرقه‌ها می‌شود؟ شعاع قرص را 2.5 cm در نظر بگیرید و از مورد مربوط به هوا در جدول ۱۸-۱ استفاده کنید. (ب) فرض کنید هر اتم سطحی دارای سطح مقطع مؤثر $0.015\,\text{nm}^2$ باشد. برای ایجاد سطح قرص به چند اتم نیاز است؟ (پ) بار محاسبه شده در (الف) ناشی از آن اتمهای سطحی است که یک الکترون اضافی دارند. چه کسری از این اتمها باید این چنین باردار شده باشند؟

حل: (الف)

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$$

میدان قرصی به شعاع R که بار q بطور یکنواخت روی آن توزیع شده است در نقطه‌ای روی محور آن از رابطه بالا بدست می‌آید.

$$z = 0 \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \sigma = 2\varepsilon_0 E = (2)(8.85\times10^{-12})(3\times10^{6})$$

$$\Rightarrow \sigma = 5.31\times10^{-5}\ C/m^2 \quad , \quad \sigma = \frac{q}{s}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{q}{\pi R^2} \Rightarrow q = \pi R^2\sigma = \pi(2.5\times10^{-2})^2(5.31\times10^{-5})$$

$$= 1.04\times10^{-7}\ C$$

(ب)

$$N = \frac{s}{s_{\text{اتم}}} = \frac{\pi R^2}{s_{\text{اتم}}} = \frac{\pi(2.5\times10^{-2})^2}{(0.015\times10^{-18})} = 1.31\times10^{17}\ (\text{Atom})$$

(پ) تعداد اتم‌هایی که یک الکترون اضافی دارند:

$$N' = \frac{q}{e} = \frac{(1.04\times10^{-7})}{(1.6\times10^{-19})} = 6.5\times10^{11}$$

Scanned by CamScanner

$$\frac{N'}{N}=\frac{6/5\times10^{11}}{(1/31\times10^{17})}=4/96\times10^{-6}$$

کسری از اتم‌های سطحی که یک الکترون اضافی دارند بدست آمد.

۷۱- یک قطرهٔ آب کروی به قطر $1/20\,\mu m$ بر اثر میدان الکتریکی جوی رو به پایین به بزرگی $E=462\,N/C$ ، در هوای آرام معلق مانده است. (الف) بزرگی نیروی گرانشی وارد بر قطره چقدر است؟ قطره چه تعداد الکترون اضافی دارد؟

حل: (الف)

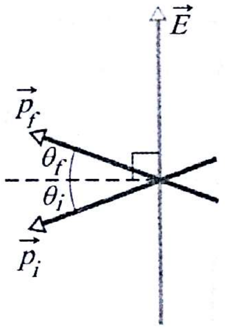
$$mg=\rho\times\frac{4}{3}\pi R^3\times g=(1000)\left(\frac{4}{3}\right)\pi(0/6\times10^{-6})^3(9/8)\Rightarrow$$

$$w=mg=8/87\times10^{-15}\ N$$

(ب) $$mg=qE\Rightarrow q=\frac{mg}{E}=\frac{8/87\times10^{-15}}{462}=1/92\times10^{-17}\ C$$

تعداد الکترونهای اضافی قطره: $$N=\frac{q}{e}=\frac{1/92\times10^{-17}}{1/6\times10^{-19}}=120$$

۷۲- در شکل ۱۸-۶۳، یک دوقطبی الکتریکی از سمتگیری اولیهٔ i $(\theta_i=20/0°)$ تا سمتگیری نهایی f $(\theta_f=20/0°)$ در میدان الکتریکی یکنواخت خارجی $\vec{E}$ جابه‌جا می‌شود. گشتاور دوقطبی الکتریکی $1/60\times10^{-27}\ C.m$ ، و بزرگی میدان $3/00\times10^{6}\ N/C$ است. تغییر در انرژی پتانسیل دوقطبی چقدر است؟



شکل ۱۸-۶۳ مسئلهٔ ۷۲

حل:

$$V=-\vec{p}\cdot\vec{E}=-pE\cos\theta\ \Rightarrow$$

$$\Delta V=-pE\cos\theta_f-(-pE\cos\theta_i)=-pE(\cos\theta_f-\cos\theta_i)\Rightarrow$$

$$\Delta V=-(1/6\times10^{-27})(3\times10^{6})(\cos(90-20)-\cos(90+20))\Rightarrow$$

$$\Delta V=-(1/6\times10^{-27})(3\times10^{6})(2\sin20)=-3/28\times10^{-21}\ J$$

۷۳- بار $20nC$ به طور یکنواخت در امتداد میلهٔ راستی به طول $4/0m$ که به شکل کمانی دایره‌ای به شعاع $2/0m$ خم شده، توزیع شده است. بزرگی میدان الکتریکی در مرکز انحنای کمان چقدر است؟

حل: میدان یک کمان به دلیل تقارن در امتداد محور آن می‌باشد و از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$E=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\varphi}=\frac{2kq}{R^2}\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\varphi}$$

$$l=R\theta\Rightarrow\theta=\frac{l}{R}=\frac{4}{2}=2(rad)\Rightarrow\theta=114/6°$$

$$E=\frac{(2)(9\times10^{9})(20\times10^{-9})}{(2)^2}\frac{\sin\left(\frac{114/6}{2}\right)}{2}=37/87\ N/C$$

۷۴- (الف) بزرگی شتاب یک الکترون در میدان الکتریکی یکنواختی به بزرگی $1/40\times10^{6}\ N/C$ چقدر است؟ (ب) با شروع از حالت سکون، چقدر طول می‌کشد تا تندی الکترون به $\frac{1}{10}$ تندی نور برسد؟ (پ) در این بازهٔ زمانی، الکترون چقدر حرکت کرده است؟

حل: (الف) $$eE=ma\Rightarrow a=\frac{eE}{m}=\frac{(1/6\times10^{-19})(1/4\times10^{6})}{(9/1\times10^{-31})}$$

$$=2/46\times10^{17}\ m/s^2$$

(ب) $$V=at+V_0=at+0\Rightarrow t=\frac{V}{a}=\frac{(0/1)(3\times10^{8})}{2/46\times10^{17}}\Rightarrow$$

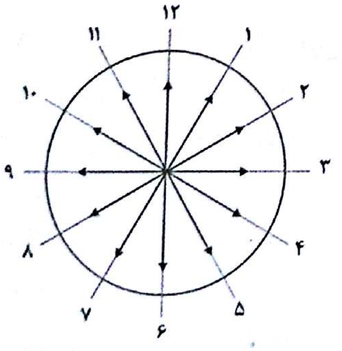
$$t=1/22\times10^{-10}\ s$$

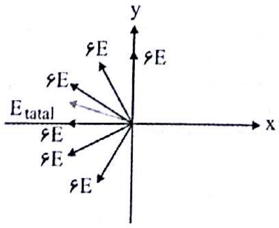
(پ) $$x=\frac{1}{2}at^2=\left(\frac{1}{2}\right)(2/46\times10^{17})(1/22\times10^{-10})^2$$

$$=1/83\times10^{-3}\ m$$

۷۵- یک صفحهٔ ساعت دارای بارهای نقطه‌ای منفی $-q$ ، $-2q$ ، $-3q$ ،...، $-12q$ است که در مکانهای مربوط به عددها قراردارند. عقربه‌های ساعت، میدان الکتریکی خالص ناشی از بارهای نقطه‌ای را برهم نمی‌زنند. در چه زمانی عقربهٔ ساعت شمار در همان جهت بردار میدان الکتریکی در مرکز صفحهٔ ساعت است؟

حل:





$$E_x=-6E-2(6E)\cos30-2(6E)\cos60=-22/39E$$

$$E_y=6E+6E\sin60+6E\sin30+0-6E\sin30-6E\sin60=6E$$

$$tg\varphi=\frac{E_y}{E_x}=\frac{6E}{-22/39E}=-4/68\times10^{-3}\Rightarrow\varphi=165°$$

Scanned by CamScanner

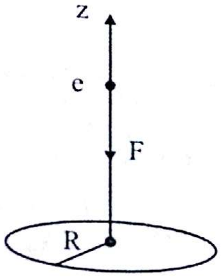
با توجه به اینکه زاویه بین هر دو شماره متوالی ۳۰° است عقربه ساعت شمار در وسط اعداد ۹ و ۱۰ قرار دارد. یعنی در ساعت ۹:۳۰′ عقربه ساعت شمار هم جهت با میدان خواهد بود.

۷۶- الکترونی در امتداد محور عمودی مرکزی یک حلقهٔ باردار به شعاع R در شکل ۱۸-۱۰ با $z \ll R$ مقید شده است. نشان دهید که نیروی الکتروستاتیکی وارد بر الکترون می‌تواند باعث نوسان آن در مرکز حلقه با بسامد زاویه‌ای زیر شود

$$\omega=\sqrt{\frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 mR^3}}$$

که در آن q بار حلقه و m جرم الکترون است.

حل:



میدان ناشی از یک حلقه به شعاع R که بار q بطور یکنواخت روی آن توزیع شده است از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$E=\frac{qz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}$$

$$z<<R \Rightarrow E=\frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\Rightarrow$$

$$F=qE=-eE=\frac{-eqz}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\Rightarrow m\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 R^3}z=0\Rightarrow$$

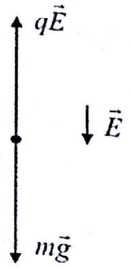
$$m\frac{d^2z}{dt^2}+kz=0 \quad , \quad k=\frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{k}{m}z=0 \Rightarrow \frac{d^2z}{dt^2}+\omega^2 z=0 \Rightarrow$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 mR^3}}$$

۷۷- در جو نزدیک سطح زمین، بزرگی متوسط میدان الکتریکی $\vec{E}$ حدود ۱۵۰N/C رو به پایین است. می‌خواهیم یک کرهٔ گوگردی به وزن ۴/۴N را با باردار کردن آن، در این میدان «شناور» کنیم. (الف) از چه باری (هم از لحاظ علامت و هم از لحاظ بزرگی) باید استفاده شود؟ (ب) چرا این آزمایش نشدنی است؟

حل: (الف) $mg=qE \Rightarrow q=\frac{mg}{E}=\frac{4/4}{150}=0/029\,C$



چون میدان روبه پایین است باید بار کره منفی باشد تا نیروی وارد بر آن روبه بالا باشد.

(ب) $\rho=2150\left(\frac{kg}{m^3}\right) \quad , \quad m=\rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) \Rightarrow$

$$R^3=\frac{\frac{mg}{g}}{\frac{4}{3}\pi f}=\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{\frac{4/4}{9/8}}{\pi\times 2150}\right)=4/98\times10^{-5}\Rightarrow$$

$R=0/037\,m$

بنابراین میدان در سطح کره از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$E=\frac{kq}{R^2}=\frac{(9\times10^9)(0/029)}{(0/037)^2}=1/91\times10^{11}\ N/C$$

این میدان بسیار بزرگتر از میدان شکست در هوا می‌باشد.

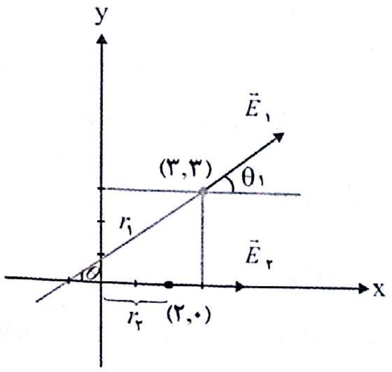
●۷۸- گشتاور دوقطبی الکتریکی یک الکترون و یک پروتون را که به فاصلهٔ ۴/۳۰nm از هم قرار دارند محاسبه کنید. **SSM**

حل:

$$p=qd=(1/6\times10^{-19})(4/3\times10^{-9})=6/88\times10^{-28}\ C\cdot m$$

۷۹- میدان الکتریکی در صفحهٔ xy ناشی از یک ذرهٔ باردار مثبت، در نقطهٔ (۳/۰,۳/۰)cm برابر با $7/2(4/0\hat{i}+3/0\hat{j})$N/C و در نقطهٔ (۲/۰,۰)cm برابر $100\hat{i}$ N/C است. (الف) مؤلفهٔ x و (ب) مؤلفهٔ y ذره چیست؟ (پ) بار ذره چقدر است؟

حل:



(الف) و (ب)

$$E_{1x}=E_1\cos\theta_1=\frac{kQ}{r_1^2}\frac{3-x}{r_1}=\frac{kQ(3-x)}{\left[(3-x)^2+(3-y)^2\right]^{3/2}}=28/8 \qquad (1)$$

$$E_{1y}=E_1\sin\theta_1=\frac{kQ}{r_1^2}\frac{3-y}{r_1}=\frac{kQ(3-y)}{\left[(3-x)^2+(3-y)^2\right]^{3/2}}=21/6 \qquad (2)$$

Scanned by CamScanner

(۳) $E_{2x} = E_2 \cos\theta_2 = \dfrac{kQ(2-x)}{\left[(2-x)^2+(0-y)^2\right]^{3/2}} = 100$

(۴) $E_{2y} = E_2 \sin\theta_2 = \dfrac{kQ(0-y)}{\left[(2-x)^2+(0-y)^2\right]^{3/2}} = 0 \Rightarrow y = 0$

دو رابطه (۱) و (۲) را به هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{3-x}{3-y} = \frac{28/8}{21/6} \Rightarrow 21/6(3-x) = 3\times 28/8 \Rightarrow x = -1\text{cm}$$

پ) $(1) \Rightarrow \dfrac{(9\times10^9)(4\times10^{-2})Q}{\left[(0/04)^2+(0/03)^2\right]^{3/2}} = 28/8$

$$\Rightarrow Q = 1\times10^{-11}\ \text{C}$$

۸۰- روی یک میلهٔ دایره‌ای به شعاع انحنای R=۹/۰۰cm که در زاویهٔ θ=۲/۴۰rad محدود است، بار مثبت Q=۶/۲۵pC به طور یکنواخت توزیع شده است. بزرگی میدان الکتریکی که Q در مرکز انحنا ایجاد می‌کند چقدر است؟

حل: در مساله ۲۵ میدان الکتریکی کمان را بدست آوردیم.

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2\theta}\sin\frac{\theta}{2} = \frac{2kq}{R^2\theta}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$E = \frac{(2)(9\times10^9)(6/25\times10^{-12})}{(0/09)^2\times 2/4}\sin\left(\frac{137/51}{2}\right)$$

$$= 5/39\ \text{N/C}$$

۸۱- یک دوقطبی الکتریکی با گشتاور دوقطبی

$\vec{p}$=(۳/۰۰î+۴/۰۰ĵ)(۱/۲۴×۱۰^{-۳۰} C.m)

در میدان الکتریکی $\vec{E}$=(۴۰۰۰N/C)î قرار دارد. (الف) انرژی پتانسیل دوقطبی الکتریکی چیست؟ (ب) گشتاور وارد بر آن چیست؟ (پ) اگر یک عامل خارجی، دوقطبی را تا گشتاور دوقطبی الکتریکی زیر بچرخاند

$\vec{p}$=(−۴/۰۰î+۳/۰۰ĵ)(۱/۲۴×۱۰^{-۳۰} C.m)

چقدر کار توسط آن عامل خارجی صورت گرفته است؟

حل: (الف)

$$U = -\vec{p}\cdot\vec{E} = -(1/24\times10^{-30})(3\hat{i}+4\hat{j})\cdot(4000\hat{i}) \Rightarrow$$

$$U = -1/488\times10^{-26}\ \text{J}$$

ب) $\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E} = (1/24\times10^{-30})\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & 4 & 0\\ 4000 & 0 & 0\end{vmatrix} \Rightarrow$

$$\tau = -1/984\times10^{-26}\ \text{J}$$

پ)

$$U_f = -\vec{p}_f\cdot\vec{E} = -(1/24\times10^{-30})(-4\hat{j}+3\hat{j})\cdot(4000\hat{i}) \Rightarrow$$

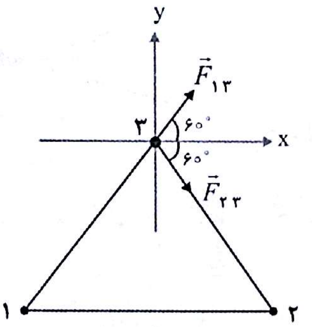
$$U_f = 1/984\times10^{-26}\ \text{J}$$

$$W = \Delta U = U_f - U_i = 1/984\times10^{-26} - (-1/488\times10^{-26}) \Rightarrow$$

$$W = 3/472\times10^{-26}\ \text{J}$$

۸۲- در شکل ۱۸-۶۱، ذرهٔ ۱ (با بار +۲/۰۰pC)، ذرهٔ ۲ (با بار −۲/۰۰pC)، و ذرهٔ ۳ (با بار +۵/۰۰pC) تشکیل مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع a=۹/۵۰cm را می‌دهند. (الف) نسبت به جهت مثبت محور x، جهت نیروی $\vec{F}_3$ وارد بر ذرهٔ ۳ ناشی از دو ذرهٔ دیگر را با رسم خطهای میدان الکتریکی آن دو ذره، تعیین کنید. (ب) بزرگی نیروی $\vec{F}_3$ را محاسبه کنید.

حل: (الف)



(ب)

$$F_{13} = F_{23} = \frac{kq_1q_3}{a^2} = \frac{(9\times10^9)(2\times10^{-12})(5\times10^{-12})}{(9/5\times10^{-2})^2}$$

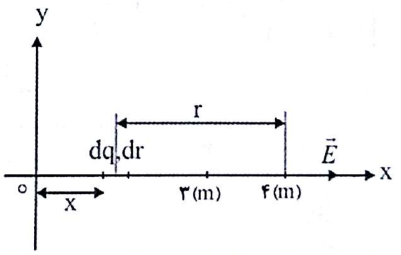
$$= 9/97\times10^{-12}\ \text{N}$$

$$F_3 = 2F_{13}\cos 60 = (2)(9/97\times10^{-12})\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 9/97\times10^{-12}\ \text{N}$$

۸۳- بار (با چگالی خطی یکنواخت ۹/۰ nC/m) روی تاری که بر محور x از x=۰ تا x=۳/۰m امتداد یافته است، قرار دارد. بزرگی میدان الکتریکی را در x=۴/۰m روی محور x تعیین کنید.

حل:



تار را به تکه‌های کوچک dr با بار dq تقسیم می‌کنیم.

$$dE = \frac{kdq}{r^2} = \frac{k\lambda dr}{r^2}$$

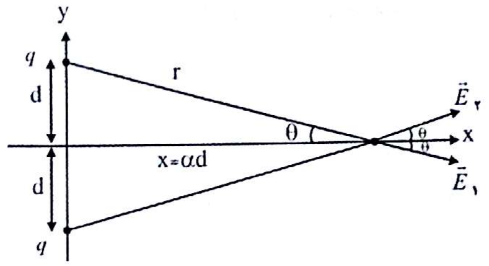
$$E = \int dE = k\lambda\int_1^4 \frac{dr}{r^2} = k\lambda\left(\frac{-1}{r}\right)_1^4 = k\lambda\left(\frac{-1}{4}-(-1)\right) \Rightarrow$$

$$E = \frac{3}{4}k\lambda = \left(\frac{3}{4}\right)(9\times10^9)(9\times10^{-9}) = 60/75\ \text{N/C}$$

Scanned by CamScanner

۸۴- دو ذره، هر یک با بار مثبت q، روی محور y یکی در $y=d$ و دیگری در $y=-d$ قرار دارند. (الف) عبارتی بنویسید که بزرگی E میدان الکتریکی خالص را در نقطه‌هایی روی محور x که با $x=\alpha d$ داده می‌شوند، به دست دهد. (ب) برای گسترهٔ $0<\alpha<4$، E را برحسب α رسم کنید. از روی این نمودار، مقدارهایی از α را تعیین کنید که (پ) مقدار بیشینهٔ E و (ت) مقدار نیم بیشینهٔ E را به دست دهند.

حل:



(الف) به دلیل تقارن میدان نهایی فقط در جهت محور xها می‌باشد.

$$E_1=E_2=\frac{kq}{r^2}\ ,\ E_{total}=2E_1\cos\theta=\frac{2kq}{r^2}\frac{x}{r}=\frac{2kqQ}{r^3}\Rightarrow$$

$$E_{total}=\frac{2kq\alpha d}{\left[(\alpha d)^2+d^2\right]^{3/2}}=\frac{2kq\alpha d}{d^3(1+\alpha^2)^{3/2}}=\frac{2kq\alpha}{d^2(1+\alpha^2)^{3/2}}$$

(ب) و (پ)

$$E=\frac{2kq}{d^2}\left[\alpha(1+\alpha^2)^{-3/2}\right]\Rightarrow$$

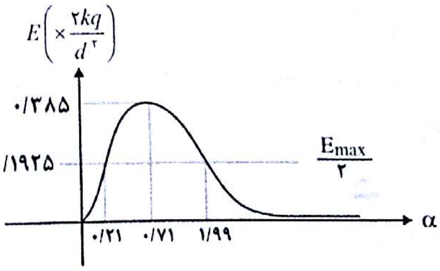
$$\frac{dE}{d\alpha}=\frac{2kq}{d^2}\left[(1+\alpha^2)^{-3/2}+\alpha\left(-\frac{3}{2}\right)(2\alpha)(1+\alpha^2)^{-5/2}\right]\Rightarrow$$

$$\frac{dE}{d\alpha}=\frac{2kq}{d^2}\left(\frac{1+\alpha^2-3\alpha^2}{(1+\alpha^2)^{5/2}}\right)=0\Rightarrow$$

$$1+\alpha^2-3\alpha^2=0\Rightarrow 1=2\alpha^2\Rightarrow\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}=0/71$$

$$E_{max}=\frac{2kq}{d^2}\frac{(0/71)}{\left[1+(0/71)^2\right]^{3/2}}=0/385\frac{2kq}{d^2}$$

α	۰	۰/۷۱	۱	۲	۳	۴
$E\left(\times\frac{2kq}{d^2}\right)$	۰	۰/۳۸۵	۰/۳۵	۰/۱۷۹	۰/۰۹۵	۰/۰۵۷



(ت)

$$E=\frac{E_{max}}{2}\Rightarrow\frac{2kq\alpha}{d^2(1+\alpha^2)^{3/2}}=\left(\frac{1}{2}\right)(0/385)\left(\frac{2kq}{d^2}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{\alpha}{(1+\alpha^2)^{3/2}}=0/1925\Rightarrow\frac{\alpha^2}{1+\alpha^6+3\alpha^2+3\alpha^4}=0/037$$

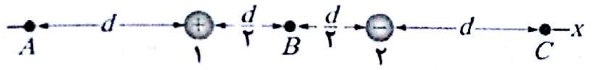
$$\Rightarrow 0/037\alpha^6+3\times0/037\alpha^4+(3\times0/037-1)\alpha^2+0/037=0$$

$$\Rightarrow\alpha^6+3\alpha^4-24/027\alpha^2+1=0$$

دو جواب قابل قبول برای این معادله که در فاصله $0<\alpha<4$ قرار دارند، جوابهای زیر می‌باشند:

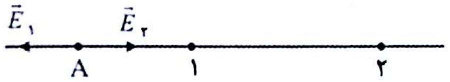
$$\alpha=0/21\ ,\ \alpha=1/99$$

۸۵- در شکل ۱۸-۶۴، ذرهٔ ۱ با بار $q_1=1/00\text{pC}$ و ذرهٔ ۲ با بار $q_2=2/00\text{pC}$ در فاصلهٔ $d=5/00\text{cm}$ از یکدیگر، ثابت شده‌اند. میدان الکتریکی خالص در نقطه‌های (الف) A، (ب) B و (پ) C برحسب نمادگذاری بردار یکه چگونه است؟ (ت) خطهای میدان الکتریکی را رسم کنید؟



شکل ۱۸-۶۴ مسئلهٔ ۸۵

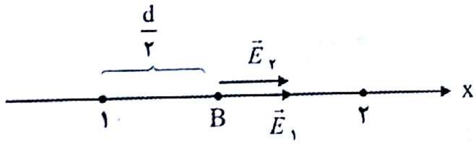
حل: (الف)



$$E_A=-E_1+E_2=-\frac{kq_1}{d^2}+\frac{kq_2}{(2d)^2}=\frac{-kq}{d^2}+\frac{k(2q)}{4d^2}$$

$$E_A=-\frac{kq}{2d^2}=-\frac{(9\times10^9)(1\times10^{-12})}{2(0/05)^2}\Rightarrow\vec{E}_A=-1/8\hat{i}\ \text{N/C}$$

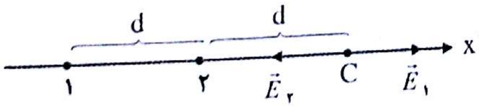
(ب)



$$E_B=E_1+E_2=\frac{kq}{\left(\frac{d}{2}\right)^2}+\frac{k(2q)}{\left(\frac{d}{2}\right)^2}=\frac{3kq}{\frac{d^2}{4}}=\frac{12kq}{d^2}\Rightarrow$$

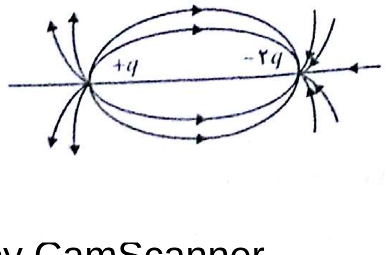
$$E_B=\frac{(12)(9\times10^9)(1\times10^{-12})}{(0/05)^2}\Rightarrow\vec{E}_B=43/2\hat{i}\ \text{N/C}$$

(پ)



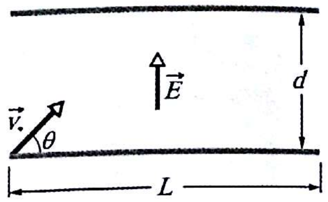
$$E_C=E_1-E_2=\frac{kq}{(2d)^2}-\frac{k(2q)}{d^2}=\frac{-7}{4}\frac{kq}{d^2}\Rightarrow$$

$$E_C=\left(\frac{-7}{4}\right)\left(\frac{(9\times10^9)(1\times10^{-12})}{(0/05)^2}\right)\Rightarrow\vec{E}_C=-6/3\hat{i}\ \text{N/C}$$



Scanned by CamScanner

۸۶- در شکل ۱۸-۶۴، میدان الکتریکی رو به بـالای یکنواخـت $\vec{E}$ به بزرگی $۲/۰۰×۱۰^{۳}$ N/C با باردارکردن دو صـفحهٔ افقـی، پایینی به طور مثبت و بالایی به طور منفی، بین آنها ایجـاد شـده است. طول صفحه‌ها L=۱۰/۰cm و فاصلهٔ آنهـا d=۲/۰۰cm است. سپس الکترونی از لبهٔ چپ صفحهٔ پایینی، میان دو صـفحه پرتاب می‌شود. سرعت اولیه $\vec{v}_۰$ الکترون که بـا صـفحهٔ پـایینی زاویهٔ θ=۴۵/۰° می‌سازد دارای بزرگی $۶/۰۰×۱۰^{۶}$ m/s اسـت. (الف) آیا الکترون به یکی از صفحه‌هابرخورد می‌کند؟ (ب) اگر بلی، با کدامیک از صفحه‌ها و در چه فاصلهٔ افقی از لبهٔ چپ؟



شکل ۱۸-۶۵ مسئلهٔ ۸۶

حل: (الف)

$$F = ma = eE \Rightarrow$$

$$a = \frac{eE}{m} = \frac{(۱/۶×۱۰^{-۱۹})(۲×۱۰^{۳})}{(۹/۱×۱۰^{-۳۱})} \Rightarrow$$

$$a = ۳/۵۲×۱۰^{۱۴}\ (m/s^{۲})$$

حرکت الکترون مانند حرکت پرتابه خواهد بـود بنـابراین نقطه اوج آن از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$y = \frac{V_۰^{۲}\sin^{۲}\theta_۰}{۲a} = \frac{(۶×۱۰^{۶})^{۲}(\sin ۴۵)^{۲}}{(۲)(۳/۵۲×۱۰^{۱۴})} = ۰/۰۲۵۶\ m$$

$$= ۲/۵۶\,cm$$

(ب) پس الکترون با صفحه بالایی برخورد می‌کند. $y > d$

برای یافتن محل برخورد معادله مسیر پرتابه را می‌نویسیم:

$$y = \frac{-ax^{۲}}{۲V_۰^{۲}\cos^{۲}\theta_۰} + x\tan\theta_۰ \Rightarrow$$

$$۰/۰۲۵۶ = -\frac{(۳/۵۲×۱۰^{۱۴})x^{۲}}{(۲)(۶×۱۰^{۶})^{۲}(\cos ۴۵)^{۲}} + x\tan ۴۵$$

$$۹/۷۸x^{۲} - x + ۰/۰۲۵۶ = ۰ \Rightarrow x = ۰/۰۲۷۱\ m$$

$$= ۲/۷۱\ cm < L$$

۸۷- با داده‌های مسئلهٔ ۶۲، فرض کنید که بار q روی قطره بـا $q = ne$ داده شده است که در آن n یک عـدد درسـت و e بـار بنیادی است. (الف) n را برای هر مقدار داده شدهٔ q بیابید. (ب) یک برازش *بازگشتی خطی* از مقدارهای q برحسب مقـدارهای n انجام دهید و سپس با استفاده از آن برازش، e را پیدا کنید.

حل: در مساله ۶۲ نیز از همین روش استفاده کردیم.

اختلاف بین مقـادیر بارهـای مختلـف روی قطـره را بدسـت می‌آوریم.

$۳/۸۸×۱۰^{-۱۹}$ C ، $۳/۳۵×۱۰^{-۱۹}$ C ، $۱/۶۴×۱۰^{-۱۹}$ C

$۶/۴۲×۱۰^{-۱۹}$ C ، $۴/۹۵×۱۰^{-۱۹}$ C ، $۴/۹۳×۱۰^{-۱۹}$ C

$۳/۲۴×۱۰^{-۱۹}$ C ، $۱/۶×۱۰^{-۱۹}$ C ، $۳/۲۹۶×۱۰^{-۱۹}$ C

کمترین بار یعنی $۱/۶×۱۰^{-۱۹}$ C را به عنوان بار پایه درنظر می‌گیریم.

مقدار n برای هر یک از بارها به ترتیب به صورت زیـر خواهـد بود (که در آن به دلیل خطای اندازه‌گیری در محاسبه بار، مقـدار اعشار برای n حذف شده است):

۲	۲	۱
۴	۳	۳
۲	۱	۲

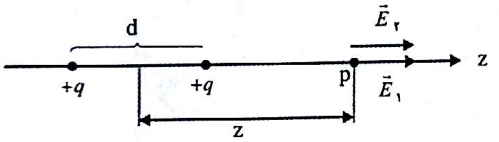
با روش (حداقل میانگین مربع) خطی به مقدار زیر بـرای بـار e می‌رسیم:

$$e = ۱/۶×۱۰^{-۱۹}\ C$$

۸۸- در شکل ۱۸-۸ ، هر دو بار را مثبت در نظر بگیریـد. بـا فرض آنکه $z \gg d$ باشد، نـشان دهیـد کـه در ایـن صـورت E درنقطهٔ P در آن شکل با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$E = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{۲q}{z^{۲}}$$

حل:



$$E_p = E_۱ + E_۲ = \frac{kq}{\left(z+\frac{d}{۲}\right)^{۲}} + \frac{kq}{\left(z-\frac{d}{۲}\right)^{۲}} \Rightarrow$$

$$E_p = kq\left[\frac{z^{۲}+\frac{d^{۲}}{۴}-zd+z^{۲}+\frac{d^{۲}}{۴}+zd}{\left(z+\frac{d}{۲}\right)^{۲}\left(z-\frac{d}{۲}\right)^{۲}}\right] \Rightarrow$$

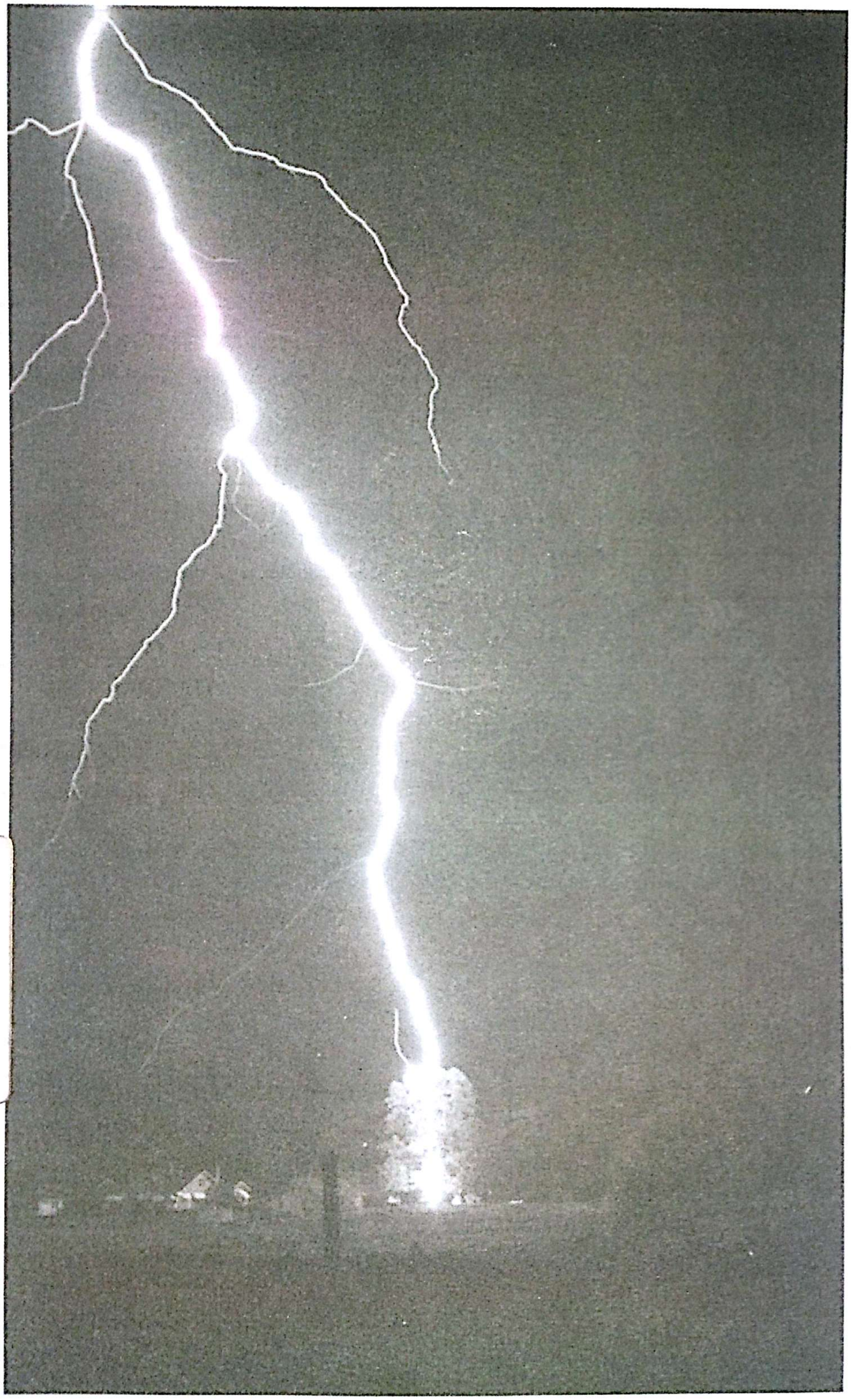
$$E_p = ۲kq\left(\frac{z^{۲}+\frac{d^{۲}}{۴}}{\left(z^{۲}-\frac{d^{۲}}{۴}\right)^{۲}}\right)$$

$$z >> d \Rightarrow E_p = ۲kq\frac{z^{۲}}{z^{۴}} \Rightarrow E_p = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{۲q}{z^{۲}}$$

Scanned by CamScanner

۱۹

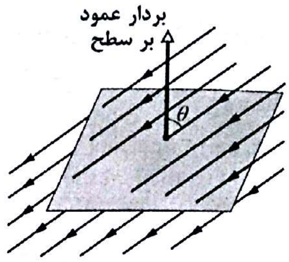
قانون گاؤس



Scanned by CamScanner

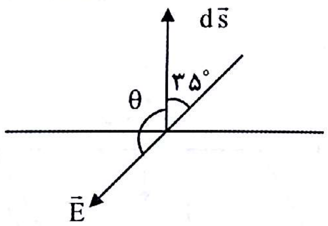
بخش ۱۹-۳ شار میدان الکتریکی

●۱- طول هر ضلع مربع نشان داده شده در شکل ۱۹-۲۶ برابر ۳/۲ mm است. این مربع در میدان الکتریکی یکنواختی با بزرگی $E=۱۸۰۰$ N/C قرار دارد. خطهای این میدان با بردار عمود بر سطح، همان گونه که در شکل نشان داده شده است، زاویه $\theta=۳۵°$ می‌سازند. جهت بردار عمود بر سطح، با فرض آنکه این سطح روی یک وجه جعبه‌ای باشد، «رو به بیرون» است. شار الکتریکی عبوری از این سطح را محاسبه کنید. SSM



شکل ۱۹-۲۶ مسئلهٔ ۱

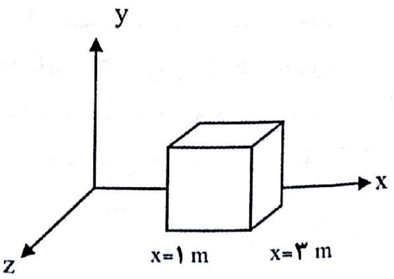
حل:



$$\Phi=\int\vec{E}\cdot\vec{ds}=\int E\cos(۱۴۵)ds\Rightarrow$$
$$\Phi=E\cos(۱۴۵)\int ds=E\cos(۱۴۵)S\Rightarrow$$
$$\Phi=(۱۸۰۰)(\cos۱۴۵)(۳/۲\times۱۰^{-۳})^۲=۰/۰۱۵$$
$$=-۱/۵\times۱۰^{-۲}\ \frac{N\cdot m^۲}{C}$$

●●۲- یک میدان الکتریکی که با $\vec{E}=۴/۰\hat{i}-۳/۰(y^۲+۲/۰)\hat{j}$ داده شده است، از مکعب گاوسی شکل ۱۹-۵ به ضلع ۲/۰ m می‌گذرد. (E برحسب نیوتون بر کولن و x برحسب متر است.) شار الکتریکی عبوری از (الف) وجه بالایی، (ب) وجه پایینی، (پ) وجه سمت چپ، و (ت) وجه عقبی چقدر است؟ (ث) شار الکتریکی خالص عبوری از مکعب چقدر است؟

حل:



ضلع مکعب $a=۳-۱=۲$m

(الف)

$$\vec{ds}=ds\hat{j}\ ,\ y=۲(m)\ ,\ \vec{E}=۴\hat{i}-۳(۴+۲)\hat{j}\Rightarrow$$
$$\vec{E}=۴\hat{i}-۱۸\hat{j}\ ,\ \Phi=\int\vec{E}.\vec{ds}=\int(۴\hat{i}-۱۸\hat{j})\cdot(ds\hat{j})\Rightarrow$$
$$\Phi=-۱۸s=-۱۸(۲)^۲=-۷۲\frac{N\cdot m^۲}{C}$$

(ب)

$$\vec{ds}=-ds\hat{j}\ ,\ y=۰\ ,\ \vec{E}=۴\hat{i}-۶\hat{j}$$
$$\Phi=\int\vec{E}\cdot\vec{ds}=\int(۴\hat{i}-۶\hat{j})\cdot(-ds\hat{j})=۶s=۶(۲)^۲=۲۴\frac{N\cdot m^۲}{C}$$

(پ)

$$\vec{ds}=-ds\hat{i}\ ,\ \Phi=\int\vec{E}\cdot\vec{ds}=\int[۴\hat{i}-۳(y^۲+۲)\hat{j}]\cdot(-ds\hat{i})\Rightarrow$$
$$\Phi=-۴s=-۴(۲)^۲=-۱۶\frac{N\cdot m^۲}{C}$$

(ت)

$$\vec{ds}=-ds\hat{k}\ ,\ \Phi=\int\vec{E}\cdot\vec{ds}=\int[۴\hat{i}-۳(y^۲+۲)\hat{j}]\cdot(-ds\hat{k})=۰$$

چون $\vec{E}$ هیچ مؤلفه‌ای در راستای $\hat{k}$ندارد شار عبوری از این سطح صفر است.

(ث)

شار عبوری از وجه سمت راست و جلویی را نیز محاسبه می‌کنیم.

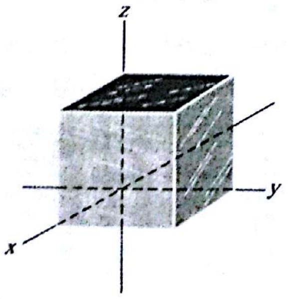
وجه جلویی:

$$\vec{ds}=ds\hat{k}\ ,\ \Phi=\int\vec{E}.\vec{ds}=\int[۴\hat{i}-۳(y^۲+۲)\hat{j}]\cdot(ds\hat{k})=۰$$

وجه سمت راستی:

$$\vec{ds}=ds\hat{i}\ ,\ \Phi=\int\vec{E}\cdot\vec{ds}=\int[۴\hat{i}-۳(y^۲+۲)\hat{j}]\cdot(ds\hat{i})\Rightarrow$$
$$\Phi=۴s=۴(۲)^۲=۱۶\frac{N\cdot m^۲}{C}$$
$$\Phi_{total}=-۷۲+۲۴-۱۶+۰+۰+۱۶=-۴۸\ \frac{N\cdot m^۲}{C}$$

●●۳- طول هر ضلع مکعب شکل ۱۹-۲۷ برابر ۱/۴۰ m است و این مکعب همان گونه که نشان داده شده است در میدان الکتریکی یکنواختی قرار گرفته است. مطلوب است تعیین شار میدان الکتریکی عبوری از وجه سمت راست، در صورتی که میدان الکتریکی برحسب نیوتون بر کولن با (الف) $۶/۰۰\ \hat{i}$، (ب) $-۲/۰۰\ \hat{j}$، و (پ) $-۳/۰۰\hat{i}+۴/۰۰\hat{k}$ داده شده باشد. (ت) شار کل عبوری از مکعب برای هر یک از این میدانها چقدر است؟



شکل ۱۹-۲۷ مسئله‌های ۳، ۴، و ۱۱

Scanned by CamScanner

حل:

$\vec{ds} = ds\hat{j}$

(الف) $\Phi = \int \vec{E}.\vec{ds} \Rightarrow$

$\Phi = \int (۶\hat{i}).(ds\hat{j}) = ۰$

(ب) $\Phi = \int \vec{E}\cdot\vec{ds} = \int(-۲\hat{j})\cdot(ds\hat{j}) = -۲s = -۲(۱/۴)^۲ \Rightarrow$

$\Phi = -۳/۹۲ \ \frac{N\cdot m^۲}{C}$

(پ) $\Phi = \int \vec{E}\cdot\vec{ds} = \int(-۳\hat{i}+۴\hat{k})\cdot(ds\hat{j}) = ۰$

(ت) $\varepsilon_۰\Phi_{total} = q \quad , \quad q = ۰ \Rightarrow \Phi_{total} = ۰$

در هر سه حالت، شار کل صفر است زیرا میدان یکنواخت است و باری درون سطح بسته وجود ندارد.

بخش ۱۹-۴ قانون گاؤس

●۴- در هر نقطه‌ای روی سطح مکعب نشان داده شده در شکل ۱۹-۲۷، میدان الکتریکی موازی محور z است. طول هر ضلع مکعب $۳/۰\ m$ است. در وجه بالایی مکعب $\vec{E} = -۳۴\hat{k}\ N/C$، و در وجه پایینی $\vec{E} = +۲۰\hat{k}\ N/C$ است. بار خالص محصور شده در داخل این مکعب را تعیین کنید.

حل: چون میدان موازی محور z است شاری که از سطح جانبی مکعب می‌گذرد صفر است و شار فقط از سطح بالایی و پایینی مکعب می‌گذرد.

شاری که از سطح بالایی می‌گذرد برابر است با:

$$\Phi = \int \vec{E}\cdot\vec{ds} = \int(-۳۴\hat{k}).(ds\hat{k}) = (-۳۴)(۹) = -۳۰۶\ V\cdot m$$

شاری که سطح پایینی می‌گذرد برابر است با:

$$\Phi = \int \vec{E}\cdot\vec{ds} = \int(-۲۰\hat{k})\cdot(-ds\hat{k}) = (-۲۰)(-۹) = ۱۸۰\ V\cdot m$$

$$\Phi_{total} = -۳۰۶ - ۱۸۰ = -۴۸۶\ V\cdot m$$

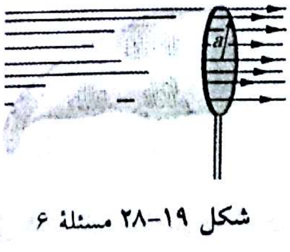
$$\varepsilon_۰\Phi_{total} = q \Rightarrow q = (۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(-۴۸۶) = -۴/۳\times۱۰^{-۹}\ C$$

●۵- بار نقطه‌ای $۱/۸\mu C$ در مرکز یک سطح گاؤسی مکعبی به ضلع $۵۵cm$ قرار دارد. شار الکتریکی خالص عبوری از این سطح چقدر است؟

حل: چون مکعب یک سطح بسته است:

$$\varepsilon_۰\Phi = q \Rightarrow \phi = \frac{q}{\varepsilon_۰} = \frac{۱/۸\times۱۰^{-۶}}{۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}} = ۲/۰۳\times۱۰^{۵}\ V\cdot m$$

●۶- در شکل ۱۹-۲۸، یک تور پروانه‌گیری در میدان الکتریکی یکنواختی به بزرگی $E = ۳/۰ mN/C$ قرار دارد. قاب تور، دایره‌ای به شعاع $a = ۱۱cm$ و عمود بر این میدان الکتریکی قرار گرفته است. تور دارای بار خالصی نیست. شار الکتریکی عبوری از تور را پیدا کنید.



شکل ۱۹-۲۸ مسئلهٔ ۶

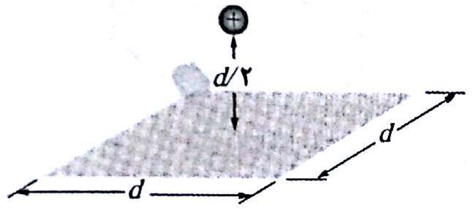
حل: دهانه و بدنه تور تشکیل یک سطح بسته می‌دهند که هیچ چشمهٔ باری داخل آن محصور نشده است. بنابراین شار عبوری از سطح بسته تور برابر صفر است.

$$\Phi_{total} = \oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \int_{I} \vec{E}\cdot\vec{ds} + \int_{II} \vec{E}\cdot\vec{ds} = ۰$$

$$\Phi_I = \int_I \vec{E}\cdot\vec{ds} = ES = (۳\times۱۰^{-۳})(\pi)(۰/۱۱)^۲ = ۱/۱۴\times۱۰^{-۴}\ V\cdot m$$

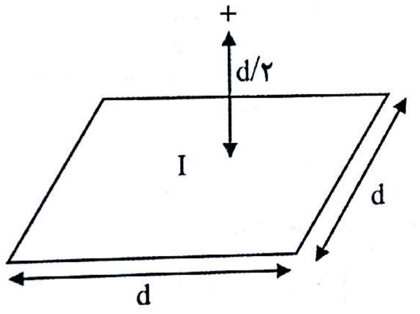
$$\Phi_{II} = -\Phi_I = -۱/۱۴\times۱۰^{-۴}\ V\cdot m$$

●۷- در شکل ۱۹-۲۹، یک پروتون به طور مستقیم به فاصلهٔ $d/۲$ بالای مرکز مربعی به ضلع d قرار دارد. بزرگی شار الکتریکی عبوری از مربع چقدر است؟ (*راهنمایی:* فرض کنید این مربع، یک وجه از مکعبی به ضلع d است.)



شکل ۱۹-۲۹ مسئلهٔ ۷

حل:



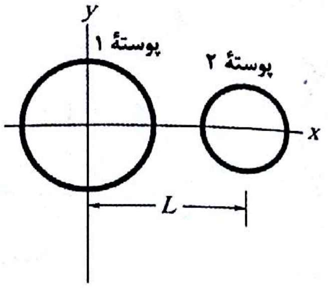
مربع را قسمتی از سطح مکعبی به ضلع d در نظر می‌گیریم که پروتون در مرکز آن قرار دارد. از هر وجه مکعب شار یکسان می‌گذرد.

$$\varepsilon_۰\Phi_{total} = q \Rightarrow \Phi_{total} = \frac{q}{\varepsilon_۰} = \frac{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}{۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}} = ۱/۸۱\times۱۰^{-۸}\ V\cdot m$$

$$\Phi_۱ = \frac{\Phi_{total}}{۶} = \frac{۱/۸۱\times۱۰^{-۸}}{۶} = ۳/۰۱\times۱۰^{-۹}\ V\cdot m$$

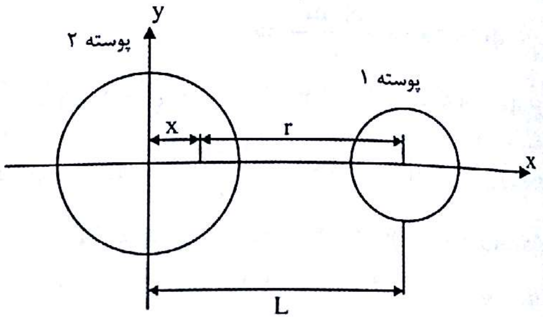
●●۸- شکل ۱۹-۳۰ دو پوستهٔ کروی نارسانا را نشان می‌دهد که در مکان خود ثابت شده‌اند. پوستهٔ ۱ دارای چگالی بار سطحی یکنواخت $+۶/۰\ \mu C/m^۲$ روی سطح خارجی خود و شعاع $۳/۰\ cm$ است؛ پوستهٔ ۲ دارای چگالی بار سطحی یکنواخت $+۴/۰\ \mu C/m^۲$ روی سطح خارجی خود و شعاع $۲/۰\ cm$ است؛ مرکز پوسته‌ها به فاصلهٔ $L = ۱۰\ cm$ از هم قرار گرفته‌اند. میدان الکتریکی خالص در $x = ۲/۰\ cm$، برحسب نماد گذاری بردار یکه چیست؟

Scanned by CamScanner



شکل ۱۹-۳۰ مسئلهٔ ۸

حل:



نقطه $x=۲cm$ درون پوسته ۱ قرار دارد و بنابراین میدان ناشی از آن در نقطه موردنظر صفر است. این نقطه خارج پوسته ۲ قرار دارد. بنابراین میدان ناشی از پوسته ۲ را در نقطه موردنظر به دست می‌آوریم.

$$E_۲=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}r^۲}=\frac{\sigma ۴\pi R_۲^۲}{۴\pi\varepsilon_{\circ}r^۲}=\frac{\sigma R_۲^۲}{\varepsilon_{\circ}r^۲}$$

$$E_۲=\frac{(۴\times ۱۰^{-۶})(۰/۰۲)^۲}{(۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲})(۰/۰۸)^۲}=۲/۸۲\times ۱۰^۴\ \frac{N}{C}$$

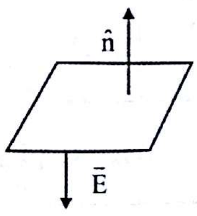
$$E=-۲/۸۲\times ۱۰^۴\ \hat{i}\ \frac{N}{C}$$

●●۹- به طور تجربی معلوم شده است که میدان الکتریکی در ناحیهٔ معینی از جو زمین به طور قائم رو به پایین است. بزرگی میدان الکتریکی در ارتفاع ۳۰۰ m برابر با ۶۰/۰ N/C، و در ارتفاع ۲۰۰m برابر با ۱۰۰ N/C است. مقدار بار خالص محصور شده در مکعبی به ضلع ۱۰۰ m که وجوه افقی آن در ارتفاعهای ۲۰۰ و ۳۰۰ متر قرار دارند، چقدر است؟ SSM

حل: چون میدان قائم و به طرف پایین است شار فقط از سطح بالایی و پایینی این مکعب می‌گذرد.

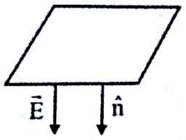
برای سطح بالایی:

$$\Phi_۱=-Es=-(۶۰)(۱۰^۴)=-۶\times ۱۰^۵\ (V\cdot m)$$



برای سطح پایینی:

$$\Phi_۲=Es=(۱۰۰)(۱۰^۴)=۱۰^۶\ V\cdot m$$



$$\Phi_{total}=-۶\times ۱۰^۵+۱۰^۶=۴\times ۱۰^۵\ V\cdot m$$

$$\varepsilon_{\circ}\Phi_{total}=q\Rightarrow q=(۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲})(۴\times ۱۰^۵)$$
$$=۳/۵۴\times ۱۰^{-۶}\ C$$

●●۱۰- وقتی شیر دوش حمام دربسته‌ای را باز می‌کنیم، ترشح آب از وان خالی می‌تواند هوای داخل حمام را با یونهای باردار شدهٔ منفی پر کند و یک میدان الکتریکی به بزرگی ۱۰۰۰ N/C درهوابه‌وجودآورد. حمامی را به ابعاد ۲/۵ m×۳/۰m×۲/۰ m در نظر بگیرید. میدان الکتریکی را در امتداد سقف، کف و چهار دیواره ، یکنواخت و عمود بر این سطحها و بزرگی آن را ۶۰۰ N/C بگیرید. همچنین فرض کنید که این سطحها یک سطح گاؤسی بسته را به دور هوای حمام تشکیل می‌دهند. (الف) چگالی بار حجمی ρ و (ب) تعداد بارهای بنیادی اضافی e بر متر مکعب را در هوای حمام [redacted] محاسبه کنید.

حل: ابتدا از قانون گاوس بار درون فضای حمام را به دست می‌آوریم.

(الف)

$$S=۲S_۱+۲S_۲+۲S_۳=۲[(۲/۵)(۲)+(۲/۵)(۳)+(۲)(۳)]$$
$$=۳۷\ m^۲$$

در تمام سطوح $\vec{E}$ عمود بر آنهاست، پس:

$$\Phi=ES=(۶۰۰)(۳۷)=۲/۲۲\times ۱۰^۴\ V\cdot m$$

$$\varepsilon_{\circ}\Phi=q\Rightarrow (۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲})(۲/۲۲\times ۱۰^۴)=۱/۹۶\times ۱۰^{-۷}\ C$$

بارهای محصور شده، یون‌های منفی در نظر گرفته شده‌اند.

$$\rho=\frac{q}{V}=\frac{-۱/۹۶\times ۱۰^{-۷}}{(۲/۵)(۲)(۳)}=-۱/۳۱\times ۱۰^{-۸}\ \frac{C}{m^۳}$$

(ب)

$$q=Ne\Rightarrow N=\frac{q}{e}=\frac{۱/۳۱\times ۱۰^{-۸}}{۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}}=۸/۱۸\times ۱۰^{۱۰}$$

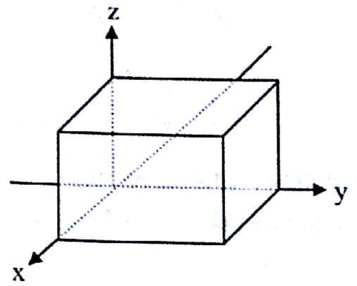
●●۱۱- شکل ۱۹-۲۷ یک سطح گاؤسی به شکل مکعب و به طول ضلع ۱/۴۰ m را نشان می‌دهد. اگر $\vec{E}(=۳/۰۰\,y\hat{j})$N/C باشدکه در آن y برحسب متر است، (الف) شار خالص Φ عبوری از این سطح و (ب) بار خالص q_{enc} محصور شده توسط این سطح چقدر است؟ اگر

$$\vec{E}=[-۴/۰۰\hat{i}+(۶/۰۰+۳/۰۰y)\hat{j}]\ N/C$$

باشد، (پ) Φ و (ت) q_{enc} چقدر است؟ ILW

حل:

Scanned by CamScanner



(الف) چون میدان الکتریکی در جهت محور y است شار فقط از دو سطح سمت راست و چپ می‌گذرد.

سطح سمت چپ: $y=۰ \Rightarrow \vec{E}=۰ \Rightarrow \Phi_۱=۰$

سطح سمت راست:

$y=۱/۴\ m \Rightarrow \vec{E}=(۳)(۱/۴)\hat{j}=۴/۲\hat{j}\frac{N}{C}$

$\Phi_۲=Es=(۴/۲)(۱/۴)^۲=۸/۲۳۲\ V\cdot m$

$\Rightarrow \phi_{total}=۸/۲۳۲\ V\cdot m$

(ب) $q=\varepsilon_۰\Phi_{total}=(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۸/۲۳۲)=۷/۲۸\times۱۰^{-۱۱}\ C$

(پ) شاری که از سطح بالایی و پایینی می‌گذرد صفر است.

$\vec{E}=[-۴\hat{i}+(۶+۳y)\hat{j}]\frac{N}{c}$

سطح سمت چپ: $y=۰ \Rightarrow \vec{E}=(-۴\hat{i}+۶\hat{j})\frac{N}{c}$

$\Phi_۱=\int\vec{E}\cdot\vec{ds}=\int(-۴\hat{i}+۶\hat{j})\cdot(-ds\,\hat{j})=-۶s=(-۶)(۱/۴)^۲$
$=-۱۱/۷۶\ V\cdot m$

سطح سمت راست: $y=۱/۴\ m \Rightarrow \vec{E}=(-۴\hat{i}+۱۰/۲\hat{j})\frac{N}{c}$

$\Phi_۲=(-۴\hat{i}+۱۰/۲\hat{j})\cdot(۱/۴)^۲\hat{j}=۱۹/۹۹۲\ V\cdot m$

سطح پشت:

$\Phi_۳=[-۴\hat{i}+(۶+۳y)\hat{j}]\cdot(۱/۴)^۲(-\hat{i})=۷/۸۴\ V\cdot m$

سطح جلویی:

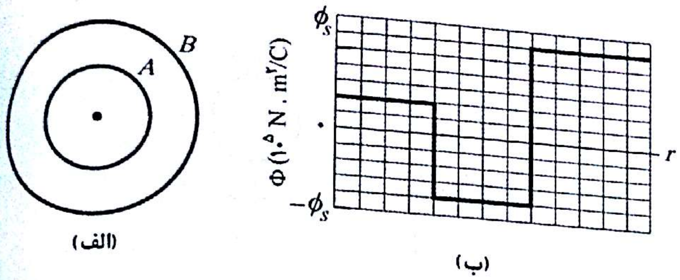
$\Phi_۴=[-۴\hat{i}+(۶+۳y)\hat{j}]\cdot(۱/۴)^۲\hat{i}=-۷/۸۴\ V\cdot m$

$\Phi_{total}=-۱۱/۷۶+۱۹/۹۹۲+۷/۸۴-۷/۸۴=۸/۲۳۲\ V\cdot m$

(ت)

$q=\varepsilon_۰\Phi_{total}=(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۸/۲۳۲)=۷/۲۸\times۱۰^{-۱۱}\ C$

●●۱۲- *شار و پوسته‌های نارسانا.* یک ذرهٔ باردار در مرکز دو پوستهٔ کروی هم‌مرکز که بسیار نازک و از جنس ماده‌ای نارسانا هستند، معلق شده است. شکل ۱۹-۳۱ الف سطح مقطع آنها را نشان می‌دهد. شکل ۱۹-۳۱ ب شار خالص Φ عبوری از یک کرهٔ گاوسی به مرکز ذرهٔ باردار را برحسب تابعی از شعاع r که به دست می‌دهد. مقیاس محور عمودی با $\phi_s=۵/۰\times۱۰^۵\ N.m^۲/C$ مشخص شده است. (الف) بار ذرهٔ مرکزی چقدر است؟ بارخالص (ب) پوستهٔ A و (پ) پوستهٔ B چقدر است؟



شکل ۱۹-۳۱ مسئلهٔ ۱۲

حل: (الف)

$r<r_A \quad \Phi_۱=۲\times۱۰^۵\frac{N\cdot m^۲}{C}\Rightarrow$

$q_۱=\varepsilon_۰\Phi_۱=(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۲\times۱۰^۵)\Rightarrow q_۱=۱/۷۷\times۱۰^{-۶}\ C$

(ب) $r_A<r<r_B \quad , \quad \Phi_۲=-۴\times۱۰^۵\frac{N\cdot m^۲}{C}\Rightarrow q_۲=\varepsilon_۰\phi_۲\Rightarrow$

$q_۲=(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(-۴\times۱۰^۵)=-۳/۵۴\times۱۰^{-۶}\ C$

$q_A=q_۲-q_۱=-۳/۵۴\times۱۰^{-۶}-۱/۷۷\times۱۰^{-۶}=-۵/۳۱\times۱۰^{-۶}\ C$

راه دوم: $\varepsilon_۰\Phi_۲=q_۱+q_A\Rightarrow q_A=\varepsilon_۰\Phi_۲-q_۱\Rightarrow$

$q_A=(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(-۴\times۱۰^۵)-(۱/۷۷\times۱۰^{-۶})$
$=-۵/۳۱\times۱۰^{-۶}\ C$

(پ)

$r>r_B \quad \varepsilon_۰\Phi_۳=q_۱+q_A+q_B\Rightarrow q_B=\varepsilon_۰\Phi_۳-q_۱-q_A\Rightarrow$

$q_B=(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۶\times۱۰^۵)-(۱/۷۷\times۱۰^{-۶})-(-۵/۳۱\times۱۰^{-۶})$

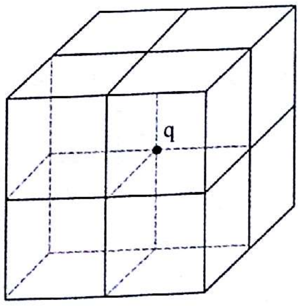
$=۸/۸۵\times۱۰^{-۶}\ C$

●●۱۳- ذره‌ای به بار $+q$ در یکی از گوشه‌های یک مکعب گاوسی قرار گرفته است. برحسب مضربی از $q/\varepsilon_۰$، مطلوب است شار عبوری از (الف) هر وجه مکعب که آن گوشه را می‌سازد و (ب) هر یک از وجوه دیگر مکعب.

حل: هفت مکعب دیگر به ضلع a کنار این مکعب به گونه‌ای قرار می‌دهیم که مکعبی به ضلع $۲a$ به وجود آید به طوری که بار q در مرکز آن قرار گیرد.

شار عبوری از مکعب جدید برابر $\Phi_E=\frac{q}{\varepsilon_۰}$ است.

(الف) از روی شکل پیداست شاری که از سطوح مجاور بار می‌گذرد صفر است.



(ب) هر وجه مکعب جدید از ۴ سطح مربعی تشکیل شده است و بنابراین شار عبوری از هر سطح مربعی برابر با $\Phi=\frac{\Phi E}{۶\times۴}=\frac{q}{۲۴\varepsilon_۰}$ می‌شود. این همان شار عبوری از سه

Scanned by CamScanner

وجه‌ای از مکعب اصلی است که با q تلاقی ندارند. بنابراین شار عبوری از آن سه وجه‌ای که با q تلاقی دارد برابر با صفر است.

راه دوم: شاری که از مکعب اصلی می‌گذرد $\frac{۱}{۸}$ مکعب جدید است. شاری که از سه وجه دیگر می‌گذرد به دلیل تقارن یک سوم شار کل است.

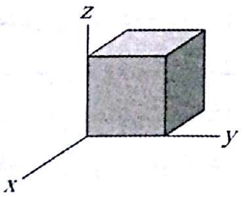
$$\Phi = \frac{\Phi E}{۸} = \frac{q}{۸\varepsilon_۰}$$

$$\Phi' = \frac{۱}{۳}\frac{q}{۸\varepsilon_۰} = \frac{q}{۲۴\varepsilon_۰}$$

۱۴●●- شکل ۱۹-۳۲ سطح گاوسی بسته‌ای به شکل مکعب با طول ضلع ۲/۰۰ m را نشان می‌دهد. این مکعب در ناحیه‌ای که میدان الکتریکی در آنجا با

$$\vec{E} = (۳/۰۰\,x + ۴/۰۰)\hat{i} + ۶/۰۰\hat{j} + ۷/۰۰\hat{k}\ \text{N/C}$$

داده می‌شود، قرار دارد که در آن x برحسب متر است. چه بار خالصی توسط مکعب در بر گرفته شده است؟



شکل ۱۹-۳۲ مسئلهٔ ۱۴

حل: جمله‌های ثابت سهمی در شار میدان الکتریکی ندارند (معادله‌های ۱۹-۴ و ۱۹-۷ را ببینید).

شاری که از هر وجه مکعب می‌گذرد به دست می‌آوریم.

سطح سمت چپ:

$$\Phi_۱ = \int \vec{E}.\vec{ds} = \int[(۳x+۴)\hat{i}+۶\hat{j}+۷\hat{k}]\cdot(-ds\hat{j}) \Rightarrow$$

$$\Phi_۱ = -۶s = -۶(۲)^۲ = -۲۴\ \frac{N\cdot m^۲}{C}$$

سطح سمت راست:

$$\Phi_۲ = \int[(۳x+۴)\hat{i}+۶\hat{j}+۷\hat{k}]\cdot(ds\hat{j}) = ۶(۲)^۲ = ۲۴\ \frac{N\cdot m^۲}{C}$$

سطح بالایی:

$$\Phi_۳ = \int[(۳x+۴)\hat{i}+۶\hat{j}+۷\hat{k}].(ds\hat{k}) = ۷(۲)^۲ = ۲۸\ \frac{N\cdot m^۲}{C}$$

سطح پایینی:

$$\Phi_۳ = \int[(۳x+۴)\hat{i}+۶\hat{j}+۷\hat{k}].(ds\hat{k}) = -۷(۲)^۲ = ۲۸\ \frac{N\cdot m^۲}{C}$$

سطح جلویی:

$$x = ۰ \Rightarrow \Phi_۵ = \int[۴\hat{i}+۶\hat{j}+۷\hat{k}]\cdot(ds\hat{i}) = ۴(۲)^۲ = ۱۶\ \frac{N\cdot m^۲}{C}$$

سطح پشتی:

$$x = -۲m \Rightarrow \Phi_۶ = \int[-۲\hat{i}+۶\hat{j}+۷\hat{k}]\cdot(-ds\hat{i}) = ۲(۲)^۲ = ۸\ \frac{N\cdot m^۲}{C}$$

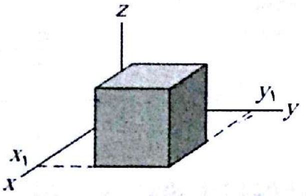
$$\Phi_{total} = -۲۴+۲۴+۲۸-۲۸+۱۶+۸ = ۲۴\ \frac{N\cdot m^۲}{C}$$

$$q = \varepsilon_۰\Phi_{total} = (۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۲۴) = ۲/۱۲۴\times۱۰^{-۱۰}\ C$$

۱۵●●- شکل ۱۹-۳۳ سطح گاوسی بسته‌ای به شکل مکعب با طول ضلع ۲/۰۰m را نشان می‌دهد که یکی از گوشه‌های آن در $x_۱ = ۵/۰۰m$ ، $y_۱ = ۴/۰۰m$ قرار دارد. این مکعب در ناحیه‌ای که میدان الکتریکی در آنجا با

$$\vec{E} = -۳/۰۰\hat{i} - ۴/۰۰y^۲\hat{j} + ۳/۰۰\hat{k}\ \text{N/C}$$

داده می‌شود، قرار دارد که در آن y برحسب متر است. چه بار خالصی توسط مکعب در برگرفته شده است؟



شکل ۱۹-۳۳ مسئلهٔ ۱۵

حل: شاری که از هر وجه این مکعب می‌گذرد به دست می‌آوریم.

سطح سمت راست: $y = ۴m \quad , \quad \hat{n} = \hat{j}$

$$\Phi_۱ = (-۳\hat{i} - ۶۴\hat{j} + ۳\hat{k})\cdot(۴\hat{j}) = -۲۵۶\ \frac{N\cdot m^۲}{C}$$

سطح سمت چپ:

$y = ۲m \quad , \quad \hat{n} = -\hat{j}$

$$\Phi_۲ = (-۳\hat{i} - ۱۶\hat{j} + ۳\hat{k})\cdot(-۴\hat{j}) = ۶۴\ \frac{N\cdot m^۲}{C}$$

سطح بالایی:

$$\Phi_۳ = (۳)(۴) = ۱۲\ \frac{N\cdot m^۲}{C}$$

سطح پایینی:

$$\Phi_۴ = (۳)(-۴) = -۱۲\ \frac{N\cdot m^۲}{C}$$

سطح پشتی:

$$\Phi_۵ = (-۳)(-۴) = ۱۲\ \frac{N\cdot m^۲}{C}$$

سطح جلویی:

$$\Phi_۶ = (-۳)(۴) = -۱۲\ \frac{N\cdot m^۲}{C}$$

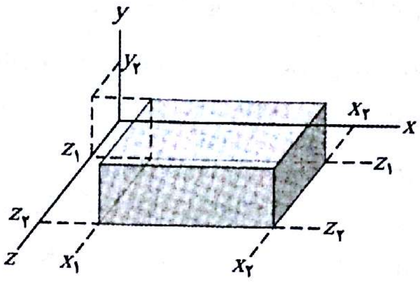
$$\Phi_{total} = -۲۵۶+۶۴+۱۲-۱۲+۱۲-۱۲ = -۱۹۲\ \frac{N\cdot m^۲}{C}$$

$$q = \varepsilon_۰\Phi_{total} = (۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(-۱۹۲) = -۱/۷\times۱۰^{-۹}\ C$$

۱۶●●●- سطح گاوسی جعبه مانند شکل ۱۹-۳۴ بار خالص $+۲۴/۰\,\varepsilon_۰ C$ را در بر دارد و در میدان الکتریکی یک الکترون که با $\vec{E} = [(۱۰/۰ + ۲/۰۰x)\hat{i} - ۳/۰۰\hat{j} + bz\hat{k}]\text{N/C}$ داده می‌شود قرار دارد، x و z برحسب متر و b یک ثابت است. وجه پایینی در صفحهٔ xz و وجه بالایی در صفحهٔ افقی است و از

Scanned by CamScanner

$y_۲ = ۱/۰۰\ \text{m}$ می‌گذرد. به ازای $x_۱ = ۱/۰۰\ \text{m}$ ، $x_۲ = ۴/۰۰\ \text{m}$ ، $z_۱ = ۱/۰۰\ \text{m}$ ، و $z_۲ = ۳/۰۰\ \text{m}$ ، b چقدر است؟



شکل ۱۹-۳۴ مسئلهٔ ۱۶

حل: ابتدا شار میدان الکتریکی را که از صفحات سطح گاوس می‌گذرد به دست می‌آوریم.

سطح سمت چپ:

$x_۱ = ۱\ \text{m}$

$$\Phi_۱ = \int(۱۲\hat{i} - ۳\hat{j} + bz\hat{k})\cdot(-ds\,\hat{i}) = (-۱۲)(z_۲ - z_۱)(y_۲ - y_۱) \Rightarrow$$

$$\Phi_۱ = (-۱۲)(۳-۱)(۱-۰) = (-۱۲)(۲)(۱) = -۲۴\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^۲}{\text{C}}$$

سطح سمت راست:

$x_۲ = ۴\text{m}$

$$\Phi_۲ = \int(۱۸\hat{i} - ۳\hat{j} + bz\hat{k})\cdot(ds\,\hat{i}) = ۱۸\,(y_۲ - y_۱)(z_۲ - z_۱) \Rightarrow$$

$$\Phi_۲ = (۱۸)(۱)(۲) = ۳۶\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^۲}{\text{C}}$$

سطح پایینی:

$$\Phi_۳ = [(۱۰+۲x)\hat{i} - ۳\hat{j} + bg\,\hat{k}]\cdot(-s\,\hat{j}) = ۳(x_۲ - x_۱)(g_۲ - g_۱) \Rightarrow$$

$$\Phi_۳ = (۳)(۴-۱)(۳-۱) = (۳)(۳)(۲) = ۱۸\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^۲}{\text{C}}$$

سطح بالایی:

$$\Phi_۴ = [(۱۰+۲x)\hat{i} - ۳\hat{j} + bz\hat{k}]\cdot(s\hat{j}) = -۳(x_۲ - x_۱)(z_۲ - z_۱) \Rightarrow$$

$$\Phi_۴ = (-۳)(۳)(۲) = -۱۸\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^۲}{\text{C}}$$

سطح پشتی:

$z_۱ = ۱\ \text{m}$

$$\Phi_۵ = [(۱۰+۲x)\hat{i} - ۳\hat{j} + b\hat{k}]\cdot(-s\hat{k}) = -b(x_۲ - x_۱)(y_۲ - y_۱) \Rightarrow$$

$$\Phi_۵ = -b(۳)(۱) = -۳b\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^۲}{\text{C}}$$

سطح جلویی:

$z_۲ = ۳\ \text{m}$

$$\Phi_۶ = [(۱۰+۲x)\hat{i} - ۳\hat{j} + ۳b\hat{k}].(s\hat{k}) = ۳b(x_۲ - x_۱)(y_۲ - y_۱) \Rightarrow$$

$$\Phi_۶ = ۳b(۳)(۱) = ۹\,b\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^۲}{\text{C}}$$

$$\Phi_{\text{total}} = -۲۴ + ۳۶ + ۱۸ - ۱۸ - ۳b + ۹b = ۱۲ + ۶b\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^۲}{\text{C}}$$

از طرفی:

$$\varepsilon_۰\Phi_{\text{total}} = q \Rightarrow \Phi_{\text{total}} = \frac{q}{\varepsilon_۰} = \frac{۲۴\varepsilon_۰}{\varepsilon_۰} = ۲۴\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^۲}{\text{C}}$$

$$۱۲ + ۶b = ۲۴ \Rightarrow b = ۲\ \frac{\text{N}}{\text{cm}}$$

●**۱۷-** فضاپیماهایی که از کمربندهای تابشی زمین می‌گذرند ممکن است با تعداد قابل توجهی از الکترونها برخورد کنند. زیاد شدن بار ایجاد شده بر اثر این برخوردها می‌تواند به اجزای الکترونیکی فضا پیما آسیب برساند و عملکردهای آن را مختل کند. فرض کنید یک ماهوارهٔ فلزی کروی به قطر $۱/۳\ \text{m}$ در یک چرخش مداری، بار $۲/۴\mu\text{C}$ را به دست آورد. (الف) چگالی بار سطحی حاصل را به دست آورید. (ب) بزرگی میدان الکتریکی حاصل از این بار سطحی را درست بیرون سطح ماهواره محاسبه کنید.

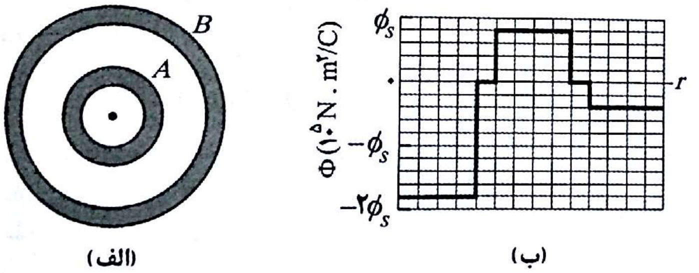
حل: (الف)

$$\sigma = \frac{q}{A} = \frac{q}{۴\pi R^۲} = \frac{۲/۴\times۱۰^{-۶}}{۴\pi(۰/۶۵)^۲} = ۴/۵۲\times۱۰^{-۷}\ \frac{\text{C}}{\text{m}^۲}$$

(ب)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_۰} = \frac{۴/۵۲\times۱۰^{-۷}}{۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}} = ۵/۱۱\times۱۰^۴\ \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

●**۱۸-** *شار و پوسته‌های رسانا.* ذرهٔ بارداری در مرکز دو پوستهٔ کروی رسانای هم‌مرکز قرار داده شده است. شکل ۱۹-۳۵ الف سطح مقطع آنها را نشان می‌دهد. شکل ۱۹-۳۵ ب شار خالص Φ عبوری از یک سطح گاوسی به مرکز ذرهٔ باردار را برحسب تابعی از شعاع r کره به دست می‌دهد. مقیاس محور قائم با $\Phi_s = ۵/۰\times۱۰^۵\ \text{N.m}^۲/\text{C}$ مشخص شده است. (الف) بار ذرهٔ مرکزی و بارهای خالص (ب) پوستهٔ A و (پ) پوستهٔ B چقدر است؟



شکل ۱۹-۳۵ مسئلهٔ ۱۸

حل: (الف)

$$r < r_A \quad , \quad \varepsilon_۰\Phi_۱ = q_۱ \Rightarrow q_۱ = (۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(-۹\times۱۰^۵) \Rightarrow$$
$$q_۱ = -۷/۹۶۵\times۱۰^{-۶}\ \text{C}$$

(ب)

$$r_A < r < r_B \quad , \quad \varepsilon_۰\Phi_۲ = q_۱ + q_A \Rightarrow q_A = \varepsilon_۰\Phi_۲ - q_۱ \Rightarrow$$
$$q_A = (۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۴\times۱۰^۵) + ۷/۹۶۵\times۱۰^{-۶}$$
$$= ۱/۱۵\times۱۰^{-۵}\ \text{C}$$

(پ)

$$r > r_B \quad , \quad \varepsilon_۰\Phi_۳ = q_۱ + q_A + q_B \Rightarrow q_B = \varepsilon_۰\Phi_۳ - q_۱ - q_A \Rightarrow$$
$$q_B = (۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(-۲\times۱۰^۵) + ۷/۹۶۵\times۱۰^{-۶} - ۱/۱۵\times۱۰^{-۵}$$
$$= -۵/۳۰۵\times۱۰^{-۶}\ \text{C}$$

Scanned by CamScanner

● ۱۹- یک کرهٔ رسانای باردار یکنواخت به قطر $۱/۲\ \text{m}$ دارای چگالی بار سطحی $۸/۱\ \mu\text{C/m}^۲$ است. (الف) بار خالص روی کره را پیدا کنید. (ب) شار الکتریکی کلی که از سطح این کره خارج می‌شود، چقدر است؟ SSM

حل: (الف)

$$q = \sigma A = \sigma ۴\pi R^۲ = (۸/۱\times۱۰^{-۶})(۴\pi)(۰/۶)^۲$$
$$= ۳/۶۶\times۱۰^{-۵}\ \text{C}$$

(ب)

$$\varepsilon_۰ \Phi = q \Rightarrow \Phi = \frac{q}{\varepsilon_۰} = \frac{۳/۶۶\times۱۰^{-۵}}{۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}} = ۴/۱۴\times۱۰^{۶}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^۲}{\text{C}}$$

● ۲۰- میدان الکتریکی بالای سطح غلتک باردار دستگاه فتوکپی دارای بزرگی E برابر با $۲/۳\times۱۰^۵\ \text{N/C}$ است. چگالی بار سطحی روی غلتک، با فرض آنکه غلتک رسانا باشد، چقدر است؟

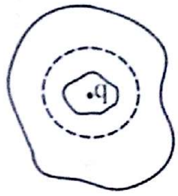
حل: میدان روی سطح و در مجاورت سطح رسانا برابر است با:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_۰} \Rightarrow$$

$$\sigma = E\varepsilon_۰ = (۲/۳\times۱۰^۵)(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}) = ۲/۰۴\times۱۰^{-۶}\ \frac{\text{C}}{\text{m}^۲}$$

●● ۲۱- یک رسانای منزوی با شکلی دلخواه دارای بار خالص $+۱۰\times۱۰^{-۶}\ \text{C}$ است. داخل رسانا، کاواکی است که در داخل آن بار نقطه‌ای $q = +۳/۰\times۱۰^{-۶}\ \text{C}$ قرار دارد. بار (الف) روی دیوارهٔ کاواک و (ب) روی سطح خارجی رسانا چقدر است؟

حل:



(الف) یک سطح گاوسی را درون رسانا طوری در نظر می‌گیریم که حفره درون آن قرار گیرد. چون درون رسانا میدان صفر است، شاری که از سطح گاوسی می‌گذرد نیز صفر است.
چون بار محصور شده در سطح گاوس $۳\times۱۰^{-۶}\ \text{C}$ است بنابراین باید باری معادل با $-۳\times۱۰^{-۶}\ \text{C}$ در دیواره حفره توزیع شود تا بار خالص داخل سطح گاوسی صفر و در نتیجه میدان الکتریکی داخل دیواره نیز صفر شود.

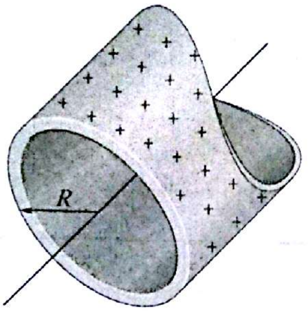
$$\varepsilon_۰\Phi = q + q' \Rightarrow \Phi = \frac{q+q'}{\varepsilon_۰} = ۰ \Rightarrow q' = -q = -۳\times۱۰^{-۶}\ \text{C}$$

(ب) باید پایستگی بار برقرار بماند. امکان ندارد بار $q' = -۳\times۱۰^{-۶}\ \text{C}$ بی‌آنکه با باری معادل خود خنثی شود، ظاهر شود. برای آنکه پایستگی بار برقرار بماند باید بار $-q'$ روی دیواره رسانا توزیع شود و چون روی دیواره رسانا بار Q قرار دارد، بار خالص روی دیواره رسانا چنین می‌شود:

$$q = Q - q' = ۱۰\times۱۰^{-۶} + ۳\times۱۰^{-۶} = ۱۳\times۱۰^{-۶}\ \text{C}$$

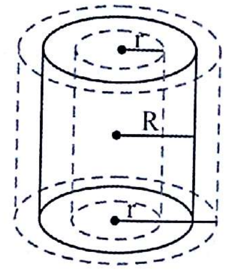
بخش ۱۹-۷ کاربرد قانون گاؤس: تقارن استوانه‌ای

●۲۲- شکل ۱۹-۳۶ مقطعی از یک لولهٔ فلزی نازک و بلند به شعاع $R = ۳/۰۰\ \text{cm}$ را نشان می‌دهد که دارای بار در یکای طول $\lambda = ۲/۰۰\times۱۰^{-۸}\ \text{C/m}$ است. بزرگی E میدان الکتریکی در فاصلهٔ شعاعی (الف) $r = R/۲/۰۰$ و (ب) $r = ۲/۰۰R$ چقدر است؟ (پ) تغییرات E را برحسب r در گسترهٔ $r = ۰$ تا $۲/۰۰\ R$ رسم کنید.



شکل ۱۹-۳۶ مسئلهٔ ۲۲

حل:



(الف) سطح گاوسی را استوانه‌ای به شعاع $r < R$ در نظر می‌گیریم.

$$r = \frac{R}{۲}$$

چون هیچ باری درون سطح گاوسی قرار نمی‌گیرد بنابراین میدان صفر است.

$$E_{in} = ۰$$

(ب) سطح گاوسی را استوانه‌ای به شعاع $r > R$ در نظر می‌گیریم.

$$r = ۲R$$

جهت میدان شعاعی است پس از دو قاعده سطح گاوسی استوانه‌ای شاری نمی‌گذرد.

$$\oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}ds = \frac{q}{\varepsilon_۰}$$

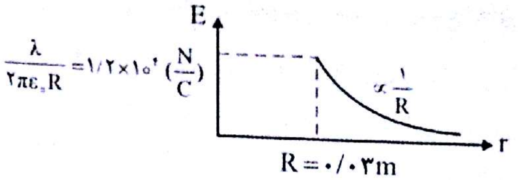
$$E(۲\pi rL) = \frac{q}{\varepsilon_۰} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_۰} \Rightarrow E_{out} = \frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_۰ r} \Rightarrow$$

$$E_{\text{out}} = \frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_۰(۲R)} = \frac{۲\times۱۰^{-۸}}{۲(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۰/۰۶)} = ۵/۹۹۴\times۱۰^۳\ \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

(پ)

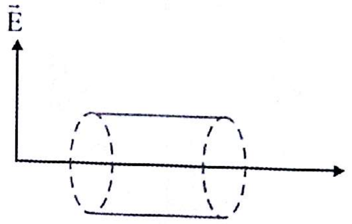
$$E_{\text{man}} = \frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_۰ R} = \frac{۲\times۱۰^{-۸}}{۲\pi(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۰/۰۳)} = ۱/۲\times۱۰^۴\ \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

Scanned by CamScanner



●۲۳- یک خط بار نامتناهی، میدانی به بزرگی $۴/۵\times۱۰^{۴}$ N/C را در فاصلهٔ ۲/۰ m ایجاد می‌کند. چگالی بار خطی را محاسبه کنید. SSM

حل:



سطح گاوسی را استوانه‌ای در نظر می‌گیریم که خط بار محور آن باشد.

$$\oint_s \vec{E}\cdot\hat{n}ds=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

میدان ناشی از خط بار شعاعی است بنابراین از دو قاعده استوانه شاری عبور نمی‌کند.

$$E(۲\pi rL)=\frac{\lambda L}{\varepsilon_0}\Rightarrow E=\frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_0 r}\Rightarrow$$

$$\lambda=۲\pi\varepsilon_0 rE=۲\pi(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۲)(۴/۵\times۱۰^{۴})=۵\times۱۰^{-۶}\,\frac{C}{m}$$

●۲۴- الکترونی از حالت سکون، در فاصلهٔ عمودی ۹/۰ cm از یک خط بار روی یک میلهٔ نارسانای بسیار بلند، رها می‌شود. این بار به طور یکنواخت با بزرگی ۶/۰ μC بر متر توزیع شده است. بزرگی شتاب اولیهٔ الکترون چقدر است؟

حل:

$$E=\frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_0 r}=\frac{۶\times۱۰^{-۶}}{۲\pi(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۰/۰۹)}=۱/۲\times۱۰^{۶}\,\frac{N}{C}$$

$$a=\frac{F}{m}=\frac{qE}{m}=\frac{(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۱/۲\times۱۰^{۶})}{(۹/۱\times۱۰^{-۳۱})}=۲/۱۱\times۱۰^{۱۷}\,\frac{m}{s^۲}$$

●۲۵- (الف) غلتک دستگاه فتوکپی دارای طول ۴۲cm و قطر ۱۲cm است. میدان الکتریکی در بالای سطح غلتک $۲/۳\times۱۰^{۵}$ N/C است. بار کل روی غلتک چقدر است؟ (ب) تولید کننده‌ای می‌خواهد یک نمونهٔ رومیزی از این دستگاه تولید کند. لازمهٔ این کار این است که طول غلتک به ۲۸cm و قطر آن به ۸/۰ cm کاهش یابد. میدان الکتریکی روی سطح این غلتک نباید تغییر کند. بار روی این غلتک جدید باید چقدر باشد؟

حل: (الف) سطح گاوسی را استوانه‌ای به درو غلتک در نظر می‌گیریم. میدان الکتریکی از این رابطه به دست می‌آید:

$$E=\frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_0 r}$$

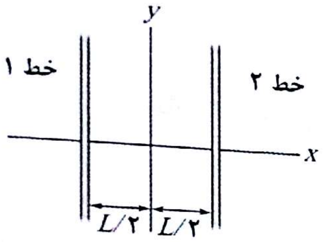
$$q=\lambda h\Rightarrow q=(۲\pi\varepsilon_0 rE)h=\pi\varepsilon_0 DhE\Rightarrow$$

$$q=\pi(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۰/۱۲)(۰/۴۲)(۲/۳\times۱۰^{۵})=۳/۲۲\times۱۰^{-۷}\,C$$

(ب)

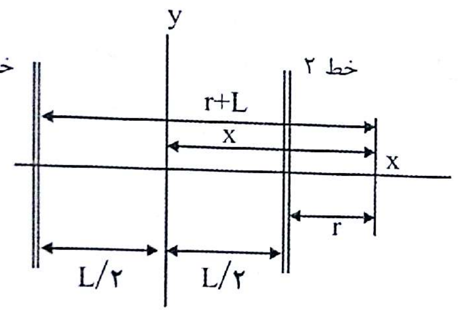
$$q'=\pi(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۰/۰۸)(۰/۲۸)(۲/۳\times۱۰^{۵})=۱/۴۳\times۱۰^{-۷}\,C$$

●●۲۶- در شکل ۱۹-۳۷، مقطع کوتاهی از دو خط بار بسیار بلند موازی که در مکانهای خود، به فاصلهٔ $L=۸/۰$ cm از یکدیگر ثابت شده‌اند، نشان داده شده است. چگالیهای بار خطی یکنواخت عبارت‌اند از ۶/۰+ μC/m برای خط ۱ و ۲/۰- μC/m برای خط ۲. میدان الکتریکی خالص ناشی از دو خط بار در کجای محور x نشان داده شده برابر با صفر است؟



شکل ۱۹-۳۷ مسئلهٔ ۲۶

حل:



نقطه‌ای روی محور x که در آنجا میدان الکتریکی برابر با صفر است، نمی‌تواند میان خطوط بار باشد، زیرا بار دو خط مخالف هم است. همچنین این نقطه در سمت چپ خط ۱ نیست زیرا بزرگی بار بر یکای طول خط ۲ است. بنابراین این نقطه در سمت راست خط ۲ واقع است.

$$E_{total}=E_۱+E_۲=\frac{\lambda_۱}{۲\pi\varepsilon_0(r+L)}+\frac{\lambda_۲}{۲\pi\varepsilon_0 r}=۰\Rightarrow$$

$$\frac{\lambda_۱}{r+L}+\frac{\lambda_۲}{r}=۰\Rightarrow\frac{۶\times۱۰^{-۶}}{r+۰/۰۸}+\frac{-۲\times۱۰^{-۶}}{r}=۰\Rightarrow$$

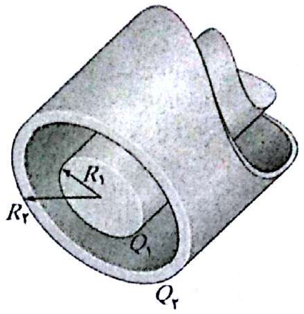
$$۶r=۲r+۰/۱۶\Rightarrow ۴r=۰/۱۶\Rightarrow r=۰/۰۴\,m$$

$$x=r+\frac{L}{۲}=۰/۰۴++۰/۰۴\Rightarrow x=۰/۰۸\,m$$

●●۲۷- شکل ۱۹-۳۸ مقطعی از یک میلهٔ رسانا با شعاع $R_۱=۱/۳۰$ mm و طول $L=۱۱/۰۰$ m را در داخل یک پوستهٔ هم‌محور استوانه‌ای رسانا و نازک به شعاع $R_۲=۱۰/۰R_۱$ و (همان) طول L نشان می‌دهد. بار خالص روی میله $Q_۱=+۳/۴۰\times۱۰^{-۱۲}$ C، و روی پوسته $Q_۲=-۲/۰۰Q_۱$ است.

Scanned by CamScanner

(الف) بزرگی E و (ب) جهت (به طور شعاعی رو به درون یا رو به بیرون) میدان الکتریکی در فاصلهٔ شعاعی $r = ۲/۰۰\ R_۲$ چیست؟ (پ) E و (ت) جهت میدان در $r = ۵/۰۰\ R_۱$ چیست؟ بار روی (ث) سطح داخلی و (ج) سطح خارجی پوسته چقدر است؟ SSM WWW



شکل ۱۹–۳۸ مسئلهٔ ۲۷

حل: سطح گاوسی را استوانه‌ای هم مرکز با استوانه‌ها و به طول L، خارج از پوسته رسانا در نظر می‌گیریم. بار خالص درون سطح گاوسی برابر است با:

$$Q_۱ + Q_۲ = Q_۱ - ۲Q_۱ = -Q_۱$$
$$r = ۲R_۲ = ۲.R_۱$$

(الف)

$$\oint \vec{E}\cdot\hat{n}ds = \frac{q}{\varepsilon_۰} \Rightarrow E۲\pi r\ell = \frac{-Q_۱}{\varepsilon_۰} \Rightarrow E = \frac{-Q_۱}{۲\pi\varepsilon_۰ r\ell} \Rightarrow$$

$$E = \frac{-۳/۴\times۱۰^{-۱۲}}{۲\pi(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۲۰\times۱/۳\times۱۰^{-۳})(۱۱)} = -۰/۲۱۴\ \frac{N}{C}$$

(ب) علامت منفی نشان می‌دهد که جهت میدان شعاعی و به طرف داخل است. بار خالص محصور شده توسط سطح گاوسی برابر $Q_۱$ است.

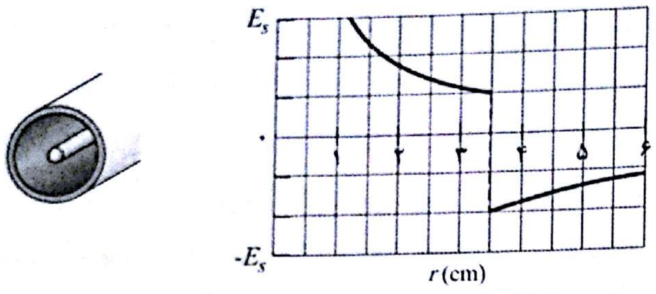
(پ) $r = QR_۱$

$$E = \frac{Q_۱}{۲\pi\varepsilon_۰ r\ell} = \frac{۳/۴\times۱۰^{-۱۲}}{۲\pi(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۵\times۱/۳\times۱۰^{-۳})(۱۱)}$$
$$= ۰/۸۵۵\ \frac{N}{C}$$

(ت) علامت مثبت نشان می‌دهد که جهت میدان شعاعی و به طرف بیرون است.

(ث و ج) میدان داخل پوستهٔ رسانا باید صفر باشد. بار خالص $Q_۱$ حاصل از میلهٔ استوانه‌ای در سطح داخلی پوستهٔ با $-Q_۱$ را القا می‌کند. برای اینکه پایستگی بار برقرار بماند باید بار $+Q_۱$ در سطح بیرونی پوسته القا شود، امابار $-۲Q_۱$ نیز روی سطح بیرونی پوسته از قبل وجود داشت. بنابراین بار خالص روی سطح بیرونی پوسته برابر با $-۲Q_۱ + Q_۱ = -Q_۱$ است. پس بار روی سطح داخلی پوسته و روی سطح بیرونی آن هر دو برابر با $-۳/۴\times۱۰^{-۱۲}$ C است.

۲۸●●- شکل ۱۹–۳۹ الف، استوانهٔ توپر باردار و باریکی را نشان می‌دهد که با یک پوستهٔ استوانه‌ای باردار بزرگتر، هم محور است. هر دو نارسانا و نازک‌اند و دارای چگالی بار سطحی یکنواخت روی سطح‌های خارجی خود هستند. شکل ۱۹–۳۹ ب مؤلفهٔ شعاعی E میدان الکتریکی را برحسب فاصلهٔ شعاعی r از محور مشترک نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $E_s = ۳/۰\times۱۰^۳$ N/C مشخص شده است چگالی بار خطی پوسته چقدر است؟



شکل ۱۹–۳۹ مسئلهٔ ۲۸

حل: وقتی از داخل به فاصله $r = ۳/۵$ cm می‌رسیم داریم:

$$E = ۱\times۱۰^۳\ \frac{N}{C}$$

$$E = \frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_۰ r} \Rightarrow \lambda = ۲\pi\varepsilon_۰ rE = ۲\pi(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۰/۰۳۵)(۱۰^۳) \Rightarrow$$

$$\lambda = ۱/۹۵\times۱۰^{-۹}\ \frac{C}{m}$$

وقتی از بیرون به فاصله $r = ۳/۵$ cm می‌رسیم، داریم:

$$E = -۲\times۱۰^۳\ \frac{N}{C}$$

$$E = \frac{\lambda + \lambda'}{۲\pi\varepsilon_۰ r} \Rightarrow \lambda + \lambda' = ۲\pi\varepsilon_۰ rE \Rightarrow \lambda' = ۲\pi\varepsilon_۰ rE - \lambda \Rightarrow$$

$$\lambda' = ۲\pi(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۰/۰۳۵)(-۲\times۱۰^۳) - ۱/۹۵\times۱۰^{-۹}$$
$$= -۵/۸۴\times۱۰^{-۹}\ \frac{C}{m}$$

۲۹●●- دو پوستهٔ استوانهٔ‌ای هم محور، نازک، باردار و بلند دارای شعاعهای ۳/۰ و ۶/۰ سانتی‌متر هستند. بار بر یکای طول روی پوستهٔ داخلی $۵/۰\times۱۰^{-۶}$ C/m و روی پوستهٔ خارجی $-۷/۰\times۱۰^{-۶}$ C/m است. (الف) بزرگی E و (ب) جهت (به طور شعاعی رو به درون یا رو به بیرون) میدان الکتریکی در فاصلهٔ شعاعی $r = ۴/۰$ cm چیست؟ (پ) E و (ت) جهت در $r = ۸/۰$ cm چیست؟ ILW

حل: (الف)
$$\oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}ds = \frac{q_۱}{\varepsilon_۰} \Rightarrow$$

$$E۲\pi r_۱\ell = \frac{\lambda_۱\ell}{\varepsilon_۰} \Rightarrow E = \frac{\lambda_۱}{۲\pi\varepsilon_۰ r_۱} \Rightarrow$$

$$E = \frac{۵\times۱۰^{-۶}}{۲\pi(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۰/۰۴)} = ۲/۲۵\times۱۰^۶\ \frac{N}{C}$$

(ب) میدان شعاعی و رو به بیرون است.

(پ)

$$E = \frac{\lambda_۱ + \lambda_۲}{۲\pi\varepsilon_۰ r_۲} = \frac{۵\times۱۰^{-۶} - ۷\times۱۰^{-۶}}{۲\pi(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۰/۰۸)} = -۴/۴۹\times۱۰^۵\ \frac{N}{C}$$

(ت) میدان شعاعی و رو به داخل است.

Scanned by CamScanner

●●۳۰- باری با چگالی خطی یکنواخت $2.0\ \mathrm{nC/m}$ روی میلهٔ نارسانا، نازک و بلندی توزیع شده است. میله با پوستهٔ استوانه‌ای رسانای بلندی (به شعاع داخلی $5.0\ \mathrm{cm}$ و شعاع خارجی $10\ \mathrm{cm}$) هم‌محور است. بار خالص روی پوسته برابر صفر است. (الف) بزرگی میدان الکتریکی به فاصلهٔ $15\mathrm{cm}$ از محور پوسته چقدر است؟ چگالی بار سطحی روی (ب) سطح داخلی و (پ) سطح خارجی پوسته چقدر است؟

حل: (الف)

$$E=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{2\times10^{-9}+0}{2\pi(8.85\times10^{-12})(0.15)}=2.39\times10^{2}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

میدان الکتریکی در داخل رسانا باید صفر باشد ولی حضور خط بار، صفر شدن میدان در داخل پوسته رسانا را بر هم می‌زند. پس باید باری به بزرگی بار خط بار، ولی با علامت مخالف روی سطح داخلی پوسته توزیع شود.

یک سطح گاوسی استوانه‌ای داخل پوسته در نظر می‌گیریم. a و b شعاع‌های داخلی و خارجی پوسته هستند.

$$\lambda_1'=-2\times10^{-9}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}\Rightarrow\sigma_1=\frac{q_1}{2\pi a\ell}=\frac{\lambda_1'}{2\pi a}\Rightarrow$$

$$\sigma_1=\frac{-2\times10^{-9}}{2\pi(0.05)}=-6.37\times10^{-9}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

(پ) طبق قانون پایستگی بار، بار جدید نمی‌تواند ایجاد شود، پس باید باری هم اندازه با پوسته داخلی و مخالف علامت آن برروی پوسته خارجی استوانه توزیع شود.

$$\lambda_2'=2\times10^{-9}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}\Rightarrow\sigma_2=\frac{q_2}{2\pi b\ell}=\frac{\lambda_2'}{2\pi b}\Rightarrow$$

$$\sigma_2=\frac{2\times10^{-9}}{2\pi(0.1)}=3.18\times10^{-9}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

●●۳۱- سیم مستقیم و بلندی دارای باری منفی با چگالی بار خطی $3.6\ \mathrm{nC/m}$ است. این سیم، توسط یک پوستهٔ استوانه‌ای نارسانای نازک و هم‌محور به شعاع $1.5\ \mathrm{cm}$، در بر گرفته شده است. پوسته دارای بار مثبت با چگالی بار سطحی σ روی سطح خارجی خود است که باعث می شود میدان الکتریکی خارجی خالص برابر با صفر باشد. σ را محاسبه کنید.

حل:

$$\oint\vec{E}\cdot\hat{n}ds=\frac{q}{\varepsilon_0}=0\Rightarrow\lambda_1+\lambda_2=0\Rightarrow\lambda_2=3.6\ \frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$$

$$\sigma=\frac{q}{2\pi a\ell}=\frac{\lambda_2}{2\pi a}=\frac{3.6\times10^{-9}}{2\pi(0.015)}=3.82\times10^{-8}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

●●●۳۲- استوانهٔ توپر، نارسانا و بلندی به شعاع $4.0\mathrm{cm}$ دارای چگالی بار حجمی نایکنواخت ρ است. ρ تابعی از فاصلهٔ شعاعی r از محور استوانه است: $\rho=Ar^2$. به‌ازای $A=2.5\ \mu\mathrm{C/m^5}$، بزرگی میدان الکتریکی در (الف) $r=3.0\ \mathrm{cm}$ و (ب) $r=5.0\ \mathrm{cm}$ چقدر است؟

حل: (الف)

$$\oint_S\vec{E}_1\cdot\hat{n}ds=\frac{q}{\varepsilon_0}=\frac{\int\rho dV}{\varepsilon_0}$$

$$V=\pi r^2\ell\Rightarrow dV=2\pi r\ell dr\Rightarrow E_1 2\pi r\ell=\frac{\int_0^r(Ar^2)(2\pi r\ell dr)}{\varepsilon_0}$$

$$=\frac{2\pi A\ell}{\varepsilon_0}\int_0^r r^3dr=\frac{2\pi A\ell}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{4}r^4\right)\Rightarrow E_1=\frac{Ar^3}{4\varepsilon_0}\Rightarrow$$

$$E_1=\frac{(2.5\times10^{-6})(0.03)^3}{4\times8.85\times10^{-12}}=1.91\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

(ب)

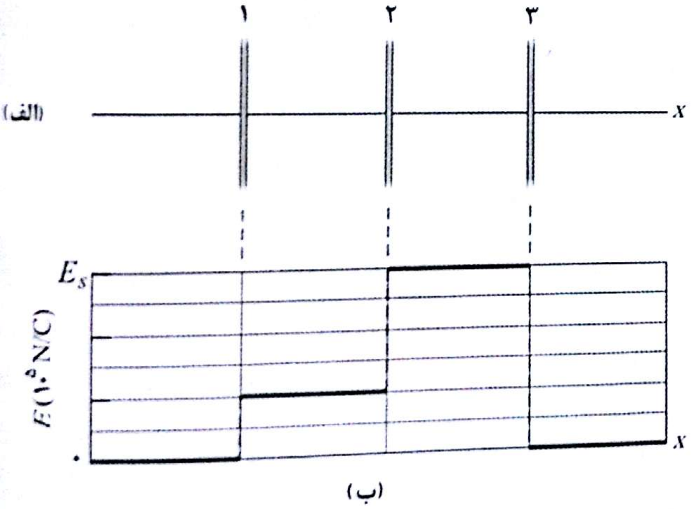
$$\oint_S\vec{E}_2\cdot\hat{n}ds=\frac{q}{\varepsilon_0}=\frac{\int\rho dV}{\varepsilon_0}=\frac{\int_0^R(Ar^2)(2\pi r\ell)dr}{\varepsilon_0}$$

$$=\frac{2\pi A\ell}{\varepsilon_0}\int_0^R r^3dr\Rightarrow\frac{2\pi A\ell}{\varepsilon_0}=\left(\frac{1}{4}R^4\right)=E^2 2\pi r\ell\Rightarrow$$

$$E_2=\frac{AR^4}{4\varepsilon_0 r}=\frac{(2.5\times10^{-6})(0.04)^4}{4(8.85\times10^{-12})(0.05)}=3.62\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

بخش ۱۹–۸ کاربرد قانون گاؤس: تقارن صفحه‌ای

●۳۳- شکل ۱۹–۴۰ الف، سه برگهٔ پلاستیکی بزرگ و موازی را نشان می‌دهد که به طور یکنواخت باردار شده‌اند. شکل ۱۹–۴۰ ب، مؤلفهٔ میدان الکتریکی خالص در امتداد محور x از برگه‌ها را نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $6.0\times10^5\ \mathrm{N/C}$ مشخص شده است نسبت چگالی بار روی برگهٔ ۳ به مقدار آن روی برگهٔ ۲ چقدر است؟



شکل ۱۹–۴۰ مسئلهٔ ۳۳

حل: در ناحیه میان ورقه‌های ۱ و ۲، میدان الکتریکی خالص (برآیند) برابر $E_1-E_2+E_3=2\times10^5\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$ است. در ناحیه میان ورقه‌های ۲ و ۳ میدان الکتریکی خالص، بزرگترین مقدار را دارد:

$$E_1+E_2+E_3=6\times10^5\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

Scanned by CamScanner

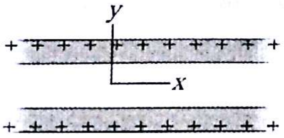
میدان الکتریکی خالص در ناحیه سمت راست ورقه ۳ صفر می‌شود و در آنجا $E_1+E_2=E_3$ است. این بدین معناست که σ_3 منفی و دارای بزرگترین چگالی سطحی است. این شرطها برای به دست آوردن میدان‌ها کفایت می‌کنند:

$$E_1=1\times10^{5}\ \frac{N}{C}\quad ,E_2=2\times10^{5}\ \frac{N}{C},\ E_3=-3\times10^{5}\ \frac{N}{C}$$

داریم $E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$، بنابراین:

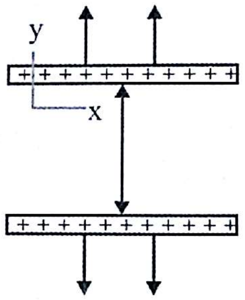
$$\frac{E_3}{E_2}=\frac{\sigma_3}{\sigma_2}=\frac{-3\times10^{5}}{2\times10^{5}}=-1/5$$

●۳۴- شکل ۱۹-۴۱ مقطع دو برگهٔ نارسانا، موازی و بزرگ را با توزیع یکسان بار مثبت با چگالی بار سطحی $\sigma=1/77\times10^{-22}\ C/m^2$ نشان می‌دهد. برحسب نماد گذاری بردارهای یکه، $\vec{E}$ در نقطه‌های (الف) بالای برگه‌ها، (ب) میان آنها، و (پ) پایین آنها، چگونه است؟



شکل ۱۹-۴۱ مسئلهٔ ۳۴

حل: (الف)



$$\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{j}+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{j}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{j}$$

$$=\frac{1/77\times10^{-22}}{8/85\times10^{-12}}\hat{j}=2\times10^{-11}\ \frac{N}{C}\hat{j}$$

(ب)

$$\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{j}-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{j}=0$$

(پ)

$$\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{j}-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{j}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{j}=-(2\times10^{-11})\hat{j}\frac{N}{C}$$

●۳۵- یک صفحهٔ فلزی مربعی شکل به طول ضلع ۸/۰ cm و ضخامت ناچیز، دارای بار کل $6/0\times10^{-6}\ C$ است. (الف) با فرض آنکه بار به طور یکنواخت روی دو طرف این صفحه پخش شده باشد، بزرگی E میدان الکتریکی را درست خارج از مرکز صفحه (مثلاً در فاصلهٔ ۰/۵۰ mm از مرکز صفحه) محاسبه کنید. (ب) با فرض آنکه صفحه یک بار نقطه‌ای باشد، E را در فاصلهٔ ۳۰ m (که نسبت به اندازهٔ صفحه بزرگ است) محاسبه کنید. SSM WWW

حل: (الف) چون بار روی دو طرف صفحه توزیع شده است:

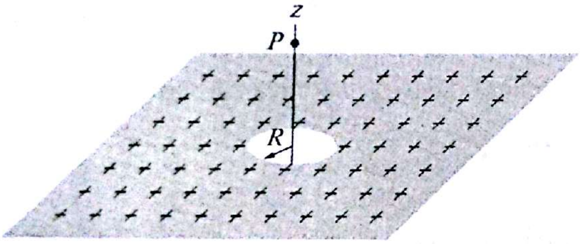
$$\sigma=\frac{q}{2A}=\frac{6\times10^{-6}}{2\times(0/08)^2}=4/69\times10^{-4}\ \frac{C}{m^2}$$

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{4/69\times10^{-4}}{8/85\times10^{-12}}=5/31\times10^{7}\ \frac{N}{C}$$

(ب)

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}=\frac{9\times10^{9}\times6\times10^{-6}}{(30)^2}=60\ \frac{N}{C}$$

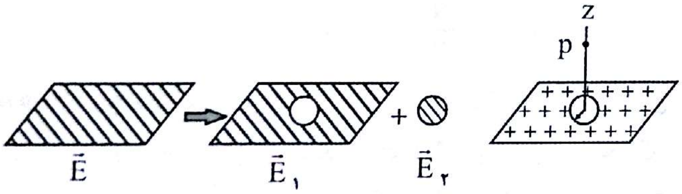
●۳۶- در شکل ۱۹-۴۲، یک حفرهٔ دایره‌ای کوچک به شعاع $R=1/80\ cm$ در وسط یک سطح نارسانای تخت و نامتناهی که دارای چگالی بار یکنواخت $\sigma=4/50\ pC/m^2$ است، کنده شده است. محور z که مبداء آن بر مرکز حفره قرار دارد، عمود



شکل ۱۹-۴۲ مسئلهٔ ۳۶

بر این سطح است. برحسب نماد گذاری بردارهای یکه، میدان الکتریکی در نقطهٔ P واقع در $z=2/56\ cm$ چگونه است؟ (*راهنمایی:* معادلهٔ ۱۸-۲۶ را ببینید و از برهم‌نهی استفاده کنید.)

حل:



میدان یک صفحه بزرگ کامل را می‌توان ناشی از دو توزیع بار دانست، یکی از صفحه‌ای که سوراخی به شعاع R در میان آن است و دیگری قرصی به شعاع R که دارای همان چگالی سطحی است.

$\vec{E}_1$ میدانی است که می‌خواهیم به دست آوریم و $\vec{E}_2$ میدان ناشی از قرص باردار است. $\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2$

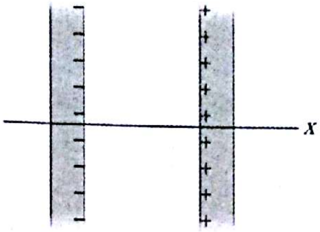
$$\vec{E}_2=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]\hat{k}\Rightarrow$$

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}=E_1\hat{k}+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]\hat{k}\Rightarrow \vec{E}_1=\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0\sqrt{z^2+R^2}}\hat{k}$$

$$=\frac{4/5\times10^{-12}\times2/56\times10^{-2}}{2\times8/85\times10^{-12}\times\sqrt{(2/56\times10^{-2})^2+(1/8\times10^{-2})^2}}$$

$$=0/208\hat{k}\ \frac{N}{C}$$

●۳۷- در شکل ۱۹-۴۳، دو صفحهٔ فلزی نازک و بلند، موازی و نزدیک یکدیگرند. در وجه‌های داخلی آنها، صفحه‌ها دارای چگالی بار سطحی اضافی به بزرگی $۷/۰۰ \times ۱۰^{-۲۲}\ \mathrm{C/m^۲}$ و علامت مخالف‌اند. برحسب نماد گذاری بردارهای یکه، میدان الکتریکی در نقطه‌های (الف) سمت چپ صفحه‌ها، (ب) سمت راست صفحه‌ها، و (پ) میان آنها چگونه است؟



شکل ۱۹-۴۳ مسئلهٔ ۳۷

حل:

$$E_۱ = E_۲ = \frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰} = \frac{۷\times۱۰^{-۲۲}}{۲\times۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}} = ۳/۹۵\times۱۰^{-۱۱}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

(الف)

سمت چپ دو صفحه

$$\vec{E} = E_۱\hat{i} + E_۲(-\hat{i}) = ۰$$

(ب)

سمت راست دو صفحه

$$\vec{E} = E_۱(-\hat{i}) + E_۲(\hat{i}) = ۰$$

(ج)

بین دو صفحه

$$\vec{E} = E_۱(-\hat{i}) + E_۲(-\hat{i}) = -۲\times۳/۹۵\times۱۰^{-۱۱}\ \hat{i}$$
$$= -۷/۹\times۱۰^{-۱۱}\ \hat{i}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

●●۳۸- دو صفحهٔ فلزی بزرگ به مساحت $۱/۰\ \mathrm{m^۲}$ موازی یکدیگرند. فاصلهٔ آنها از یکدیگر $۵/۰\ \mathrm{cm}$، و روی سطحهای داخلی خود بارهای مساوی و مخالف دارند. اگر بزرگی E میدان الکتریکی در میان صفحه‌ها $۵۵\ \mathrm{N/C}$ باشد، بزرگی بار روی هر یک از صفحه‌ها چقدر است؟ از اثر لبه‌ها چشم‌پوشی کنید.

حل:

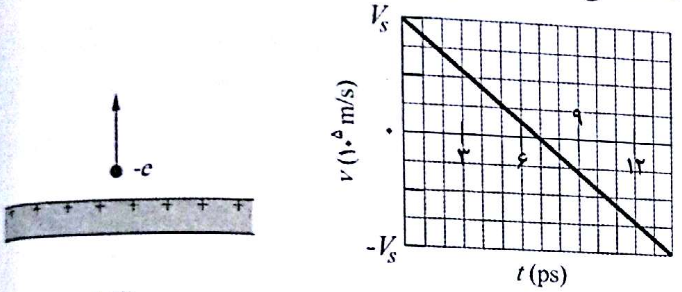
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_۰} = \frac{q}{A\varepsilon_۰} \Rightarrow q = A\varepsilon_۰ E = ۱\times۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\times۵۵$$
$$= ۴/۸۷\times۱۰^{-۱۰}\ \mathrm{C}$$

●●۳۹- الکترونی به طور مستقیم به سوی مرکز یک صفحهٔ فلزی بزرگ که دارای چگالی بار سطحی $-۲/۰\times۱۰^{-۶}\ \mathrm{C/m^۲}$ است، پرتاب می‌شود. اگر انرژی جنبشی اولیهٔ الکترون $۱/۶۰\times۱۰^{-۱۷}\ \mathrm{J}$ باشد و الکترون درست در لحظهٔ رسیدن به صفحه (بر اثر دافعهٔ الکتروستاتیکی صفحه) متوقف شود، نقطهٔ پرتاب در چه فاصله‌ای از صفحه باید قرار داشته باشد؟

حل: کار نیروی الکتریکی برابر تغییر انرژی جنبشی می‌باشد.

$$F = eE = e\frac{\sigma}{\varepsilon_۰} \Rightarrow Fx = w = \Delta k \Rightarrow \frac{e\sigma}{\varepsilon_۰}x = \Delta k \Rightarrow$$
$$x = \frac{\varepsilon_۰\Delta k}{e\sigma} = \frac{۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\times(-۱/۶\times۱۰^{-۱۷})}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\times(-۲\times۱۰^{-۶})} = ۴/۴۳\times۱۰^{-۴}\ \mathrm{m}$$

●●●۴۰- در شکل ۱۹-۴۴ الف، الکترونی به طور مستقیم از یک ورقهٔ پلاستیکی باردار یکنواخت، با تندی $۲/۰\times۱۰^{۵}\ \mathrm{m/s}$ رو به بیرون پرتاب شده است. این ورقه، نارسانا، تخت و بسیار بزرگ است. شکل ۱۹-۴۴ ب، مؤلفهٔ قائم v سرعت الکترون را برحسب زمان t تا هنگام برگشت الکترون به نقطهٔ پرتاب، به دست می‌دهد. چگالی بار سطحی ورقه چقدر است؟



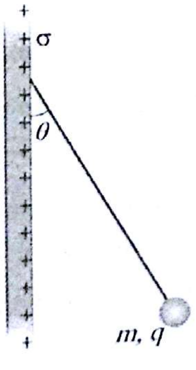
شکل ۱۹-۴۴ مسئلهٔ ۴۰

حل: شیب منحنی، شتاب حرکت الکترون را می‌دهد.

$$\sigma = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۴\times۱۰^{۵}}{۱۴\times۱۰^{-۱۲}} = ۲/۸۶\times۱۰^{۱۶}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^۲}}$$

$$F = ma = eE \Rightarrow ma = e\frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰} \Rightarrow \sigma = \frac{۲\varepsilon_۰ ma}{e}$$
$$= \frac{۲\times۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\times۹/۱\times۱۰^{-۳۱}\times۲/۸۶\times۱۰^{۱۶}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}$$
$$= ۲/۹\times۱۰^{-۶}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m^۲}}$$

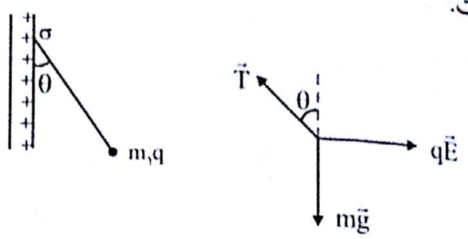
●●۴۱- در شکل ۱۹-۴۵، یک گوی نارسانای کوچک به جرم $m = ۱/۰\ \mathrm{mg}$ و بار $q = ۲/۰\times۱۰^{-۸}\ \mathrm{C}$ (که به طور یکنواخت در حجم آن توزیع شده است) از یک نخ عایق آویزان است و با یک ورقهٔ نارسانای قائم با بار یکنواخت (سطح مقطع آن نشان داده شده) زاویهٔ $\theta = ۳۰^\circ$ می‌سازد. با درنظر گرفتن نیروی گرانشی وارد به گوی و با فرض اینکه ورقه به طور قائم و به سمت داخل و خارج صفحه تا فاصله‌های دور امتداد یابد، چگالی بار سطحی σ ورقه را محاسبه کنید. SSM



شکل ۱۹-۴۵ مسئلهٔ ۴۱

Scanned by CamScanner

حل: چون گوی در حال تعادل است نیروی خالص وارد بر آن صفر است.



نیروهای وادر بر گوی چنین است:

در راستای افقی : $qE - T\sin\theta = ۰ \Rightarrow T\sin\theta = qE$

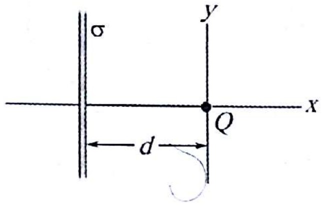
در راستای قائم : $T\cos\theta - mg = ۰ \Rightarrow T\cos\theta = mg$

از تقسیم دو رابطه بالا به دست می‌آید:

$$\tan\theta = \frac{qE}{mg} = \frac{q\sigma}{۲\varepsilon_۰ mg} \Rightarrow \sigma = \frac{۲\varepsilon_۰ mg\tan\theta}{q} =$$

$$\frac{۲\times ۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲}\times ۱\times ۱۰^{-۶}\times ۹/۸\times \tan ۳۰}{۲\times ۱۰^{-۸}} = ۵\times ۱۰^{-۹}\ \frac{C}{m^۲}$$

●●۴۲- شکل ۱۹-۴۶ یک برگهٔ نارسانای خیلی بزرگ را نشان می‌دهد که دارای چگالی بار سطحی یکنواخت $\sigma = -۲/۰۰\ \mu C/m^۲$ است؛ همچنین این شکل ذره‌ای با بار $Q = ۶/۰۰\ \mu C$ را نشان می‌دهد که در فاصلهٔ d از برگه قرار دارد. هر دو در مکانهای خود ثابت شده‌اند. اگر $d = ۰/۲۰۰\ m$ باشد، در چه مختصهٔ (الف) مثبت و (ب) منفی روی محور x (غیر از بینهایت)، میدان الکتریکی خالص $\vec{E}_{net}$ ناشی از برگه و ذره برابر با صفر است؟ (پ) اگر $d = ۰/۸۰۰\ m$ باشد، در چه مختصه‌ای روی محور x، $E_{net} = ۰$ است؟



شکل ۱۹-۴۶ مسئلهٔ ۴۲

حل: چون ورقه و ذره دارای بارهایی مخالفند، نقطه‌ای که در آن میدان‌ها یکدیگر را خنثی می‌کنند در ناحیه میان ورقه و ذره $(-d<x<۰)$ قرار ندارد. نقاطی که در آن میدان‌ها همدیگر را خنثی می‌کنند در ناحیه سمت راست ذره $(x>۰)$ و ناحیه سمت چپ ورقه $(x<-d)$ است.

$$E_۱ = \frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰} = \frac{۲\times ۱۰^{-۶}}{۲\times ۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲}} = ۱/۱۳\times ۱۰^{۵}\ \frac{N}{C}$$

$$E_۲ = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q}{x^۲} = \frac{۹\times ۱۰^{۹}\times ۶\times ۱۰^{-۶}}{x^۲} = \frac{۵/۴\times ۱۰^{۴}}{x^۲}$$

(الف)

$$x>۰ \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_۱ + \vec{E}_۲ = ۰ \Rightarrow -۱/۱۳\times ۱۰^{۵} + \frac{۵/۴\times ۱۰^{۴}}{x^۲} = ۰ \Rightarrow$$

$x = ۰/۶۹\ m$

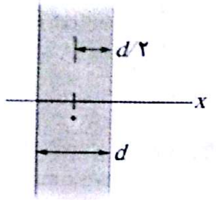
(ب)

$$x<-d \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_۱ + \vec{E}_۲ = ۰ \Rightarrow ۱/۱۳\times ۱۰^{۵} - \frac{۵/۴\times ۱۰^{۴}}{x^۲} = ۰ \Rightarrow$$

$x = -۰/۶۹\ m$

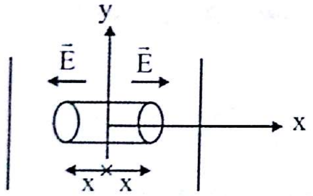
(پ) اگر $d = ۰/۸\ m$ باشد یکی از نقاط به دست آمده در بالا یعنی $x = -۰/۶۹\ m$ در ناحیه بین صفحه و بار قرار می‌گیرد که میدان در آنجا صفر نمی‌شود. بنابراین میدان‌ها همدیگر را در $x = ۰/۶۹\ m$ خنثی می‌کنند.

●●●۴۳- شکل ۱۹-۴۷ مقطع یک قطعهٔ نارسانای خیلی بزرگ را نشان می‌دهد که دارای ضخامت $d = ۹/۴۰\ mm$ و چگالی بار حجمی یکنواخت $\rho = ۵/۸۰\ fC/m^۳$ است. مبداء محور x روی مرکز قطعه قرار دارد. بزرگی میدان الکتریکی قطعه در مختصهٔ x (الف) ۰، (ب) $۲/۰۰\ mm$، (پ) $۴/۷۰\ mm$، و (ت) $۲۶/۰\ mm$، چقدر است؟



شکل ۱۹-۴۷ مسئله ۴۳

حل:



سطح گاوس را به صورت استوانه‌ای در نظر می‌گیریم که نسبت به محور y متقارن است.

میدان الکتریکی موازی با سطح جانبی استوانه است و بنابراین شار عبوری از آن صفر است.

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{q}{\varepsilon_۰}$$

$$۲Es = \frac{\rho V}{\varepsilon_۰} = \frac{\rho s ۲x}{\varepsilon_۰} \Rightarrow E = \frac{\rho x}{\varepsilon_۰}$$

(الف) به ازای $x = ۰$، $E = ۰$ می‌شود.

(ب) به ازای $x = ۲\times ۱۰^{-۳}\ m$ داریم:

$$E = \frac{\rho x}{\varepsilon_۰} = \frac{۵/۸\times ۱۰^{-۱۵}\times ۲\times ۱۰^{-۳}}{۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲}} = ۱/۳۱\times ۱۰^{-۶}\ \frac{N}{C}$$

(ب) به ازای $x = ۴/۷\times ۱۰^{-۳}\ m$ نیز تمام حجم درون سطح گاوس دارای بار است و داریم:

$$E = \frac{\rho x}{\varepsilon_۰} = \frac{۵/۸\times ۱۰^{-۱۵}\times ۴/۷\times ۱۰^{-۳}}{۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲}} = ۳/۱\times ۱۰^{-۶}\ \frac{N}{C}$$

(ت) هر چند $x = ۲/۶\times ۱۰^{-۲}\ m$ از $\frac{d}{۲}$ بزرگتر است اما وقتی قانون گاوس را به کار می‌بریم با بار محصور شده در سطح گاوس سر و کار داریم. هر چند ارتفاع سطح گاوس در اینجا

Scanned by CamScanner

بیشتر است اما بار محصور شده در آن برابر با بار محصور شده در $x=\frac{d}{۲}$ است.

$$\oint E\cdot ds=\frac{q}{\varepsilon_۰}\Rightarrow ۲Es=\frac{\rho sd}{\varepsilon_۰}\Rightarrow E=\frac{\rho d}{۲\varepsilon_۰}$$

$$=\frac{۵/۸\times۱۰^{-۱۵}\times۹/۴\times۱۰^{-۳}}{۲\times۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}}=۳/۱\times۱۰^{-۶}\ \frac{N}{C}$$

بخش ۱۹-۹ کاربرد قانون گاؤس: تقارن کروی

۴۴●- یک بار نقطه‌ای باعث می‌شود که شار الکتریکی $-۷۵۰\ N.m^۲/C$ از یک سطح گاؤسی کروی با شعاع $۱۰/۰\ cm$ و به مرکز آن بار، عبور کند. (الف) اگر شعاع سطح گاؤسی دو برابر شود، چقدر شار از این سطح می‌گذرد؟ (ب) مقدار بار نقطه‌ای چقدر است؟

حل: (الف) طبق قانون گاوس شار عبوری فقط به مقدار بار محصور شده بستگی دارد، بنابراین تغییر نمی‌کند.

(ب)

$$\varepsilon_۰\Phi=q\Rightarrow q=۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\times(-۷۵۰)=-۶/۶۴\times۱۰^{-۹}\ C$$

۴۵●- یک بار نامعلوم روی کرهٔ توپر رسانایی به شعاع $۱۰\ cm$ قرار دارد. اگر میدان الکتریکی در فاصلهٔ $۱۵\ cm$ از مرکز کره دارای بزرگی $۳/۰\times۱۰^۳\ N/C$ و جهت آن به طور شعاعی به طرف درون باشد، بار خالص روی کره چقدر است؟ SSM

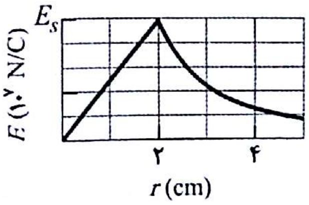
حل:

$$E=\frac{kq}{r^۲}\Rightarrow q=\frac{Er^۲}{k}=\frac{۳\times۱۰^۳\times(۰/۱۵)^۲}{۹\times۱۰^۹}$$

چون جهت میدان به طرف داخل است، بار منفی است.

$$q=-۷/۵\times۱۰^۹\ C$$

۴۶●- شکل ۱۹-۴۸ بزرگی میدان الکتریکی در داخل و خارج کره‌ای را به دست می‌دهد که بار مثبت به طور یکنواخت در سرتا سر حجم آن توزیع شده است. مقیاس محور قائم با $E_s=۵/۰\times۱۰^۷\ N/C$ مشخص شده است. بار روی کره چقدر است؟



شکل ۱۹-۴۸ مسئلهٔ ۴۶

حل: میدان درون کره از رابطه $E=\frac{qr}{۴\pi\varepsilon_۰R^۳}$ به دست می‌آید که در سطح کره $(r=R)$ بیشینه است.

$$E=\frac{kq}{R^۲}\Rightarrow q=\frac{ER^۲}{k}=\frac{۵\times۱۰^۷\times(۰/۰۲)^۲}{۹\times۱۰^۹}=۲/۲۲\times۱۰^{-۶}\ C$$

۴۷●- دو پوستهٔ کروی باردار هم‌مرکز دارای شعاعهای $۱۰/۰\ cm$ و $۱۵/۰\ cm$ هستند. بار روی پوستهٔ داخلی $۴/۰۰\times۱۰^{-۸}\ C$، و روی پوستهٔ خارجی $۲/۰۰\times۱۰^{-۸}\ C$ است. میدان الکتریکی را (الف) در $r=۱۲/۰\ cm$ و (ب) در $r=۲۰/۰\ cm$ پیدا کنید.

حل: (الف) سطح گاوس را کره‌ای به شعاع r و هم مرکز با دو پوسته در نظر می‌گیریم.

$a<r<b$

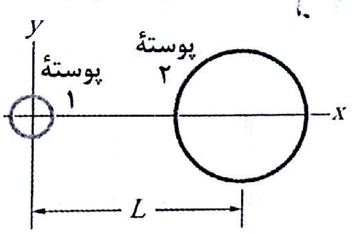
$$E=\frac{q_۱}{۴\pi\varepsilon_۰r^۲}=\frac{۹\times۱۰^۹\times۴\times۱۰^{-۸}}{(۰/۱۲)^۲}=۲/۵\times۱۰^۴\ \frac{N}{C}$$

(ب)

$$r>b\Rightarrow E=\frac{q_۱+q_۲}{۴\pi\varepsilon_۰r^۲}=(۹\times۱۰^۹)\times\frac{۴\times۱۰^{-۸}+۲\times۱۰^{-۸}}{(۰/۲)^۲}$$

$$=۱/۳۵\times۱۰^۴\ \frac{N}{C}$$

۴۸●●- شکل ۱۹-۴۹، دو پوستهٔ کروی نارسانا را نشان می‌دهد که در مکانهای خود روی محور x ثابت شده‌اند. پوستهٔ ۱ دارای شعاع $۰/۵۰\ cm$ و چگالی بار سطحی یکنواخت $+۴/۰\ \mu C/m^۲$ روی سطح خارجی‌خود، و پوستهٔ ۲ دارای شعاع $۲/۰\ cm$ و چگالی بار سطحی یکنواخت $-۲/۰\ \mu C/m^۲$ روی سطح خارجی خود است. مرکز پوسته‌ها به فاصلهٔ $L=۶/۰\ cm$ از هم قرار دارند. به جز در $x=\infty$، میدان الکتریکی خالص در کجای محور x برابر صفر است؟ GO



شکل ۱۹-۴۹ مسئلهٔ ۴۸

حل: چون بارها ناهمنام هستند این نقطه روی محور x و خارج از فاصله دوبار و در طرف کره با بار کمتر است و نیز درون دو کره قرار ندارد چون در آنجا فقط یک میدان سهم دارد و نمی‌تواند با سهم میدان دیگر خنثی شود.

$$q_۱=\sigma_۱s_۱=۴\pi R_۱^۲\sigma_۱=۴\pi\times(۰/۵\times۱۰^{-۲})^۲\times۴\times۱۰^{-۶}$$

$$=۱/۲۶\times۱۰^{-۹}\ C$$

$$q_۲=\sigma_۲s_۲=۴\pi R_۲^۲\sigma_۲=۴\pi\times(۰/۰۲)^۲\times(-۲\times۱۰^{-۶})$$

$$=-۱\times۱۰^{-۸}\ C$$

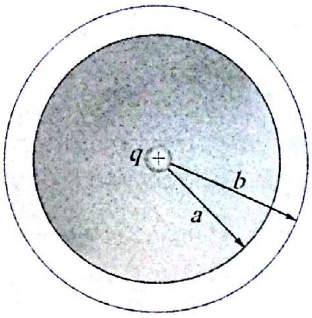
$$E_۱=E_۲\Rightarrow\frac{kq_۱}{x^۲}=\frac{k|q_۲|}{(x+L)^۲}=\frac{۱/۲۶\times۱۰^{-۹}}{x^۲}=\frac{۱\times۱۰^{-۸}}{(۰/۰۶+x)^۲}\Rightarrow$$

$x=-۳/۲۶\ cm$ x در قسمت منفی محور قرار دارد.

۴۹●●- در شکل ۱۹-۵۰، یک پوستهٔ کروی نارسانا به شعاع داخلی $a=۲/۰۰cm$ و شعاع خارجی $b=۲/۴۰cm$، دارای چگالی بار حجمی مثبت $\rho=A/r$ (درون ضخامتش) است

Scanned by CamScanner

که در آن A ثابت و r فاصله از مرکز پوسته است. به‌علاوه، گوی کوچکی با بار $q=۴۵/۰\ fC$ در مرکز آن قرار گرفته است. A باید چقدر باشد تا میدان الکتریکی در پوسته $(a \le r \le b)$ یکنواخت باشد؟ WWW SSM



شکل ۱۹-۵۰ مسئلهٔ ۴۹

حل: سطح گاوس را در فاصله r از مبدأ $(a<r<b)$ در نظر می‌گیریم، میدان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$E=\frac{q_{in}}{۴\pi\varepsilon_0 r^۲}$$

$$q_{in}=q+\int\rho dv=q+\int_{r=a}^{r=r}\frac{A}{r}۴\pi r^۲dr$$

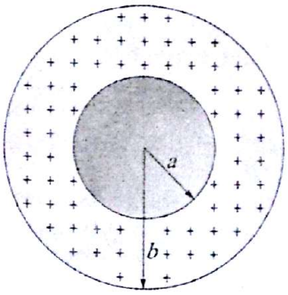
$$=q+۲\pi A(r^۲-a^۲)\Rightarrow E=\frac{q+۲\pi A(r^۲-a^۲)}{۴\pi\varepsilon_0 r^۲}\Rightarrow$$

$$E=\frac{۲\pi A}{۴\pi\varepsilon_0}+\frac{q-۲\pi Aa^۲}{۴\pi\varepsilon_0 r^۲}$$

شرط آنکه میدان یکنواخت و مستقل از r باشد این است که:

$$q-۲\pi Aa^۲=0\Rightarrow A=\frac{q}{۲\pi a^۲}=\frac{۴۵\times۱۰^{-۱۵}}{۲\pi(۰/۰۲)^۲}=۱/۸\times۱۰^{-۱۱}\ \frac{C}{m^۲}$$

●●●۵۰- شکل ۱۹-۵۱ یک پوستهٔ کروی با چگالی بار حجمی یکنواخت $\rho=۱/۸۴\ nC/m^۳$، شعاع داخلی $a=۱۰/۰\ cm$، و شعاع خارجی $b=۲/۰۰\,a$ را نشان می‌دهد. بزرگی میدان الکتریکی در فاصله‌های شعاعی (الف) $r=۰$، (ب) $r=a/۲/۰۰$، (پ) $r=a$، (ت) $r=۱/۵۰\,a$، (ث) $r=b$، و (ج) $r=۳/۰۰\,b$ چقدر است؟



شکل ۱۹-۵۱ مسئلهٔ ۵۰

حل: الف و ب و پ) در ناحیه $r\le a$ هیچ باری وجود ندارد. بنابراین اگر سطح گاوسی کروی هم مرکز با پوسته کروی به شعاع موردنظر اختیار کنیم از قانون گاوس نتیجه می‌گیریم:

$$E=۰$$

(ت و ث)

$$\oint E\cdot ds=q\Rightarrow E=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_0 r^۲}$$

$$q=\int\rho dv=\int_{r=a}^{r=r}\rho(۴\pi r^۲)dr=\rho\frac{۴}{۳}\pi(r^۳-a^۳)$$

$$E=\frac{\rho(r^۳-a^۳)}{۳\varepsilon_0 r^۲}=\frac{۱/۸۴\times۱۰^{-۹}\times[(۱/۵\times۰/۱)^۳-(۰/۱)^۳]}{۳\times۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\times(۱/۵\times۰/۱)^۲}$$

$$=۷/۳۲\frac{N}{C}$$

$$r=b=۲a=۲۰\,cm\Rightarrow E=\frac{(۱/۸۴\times۱۰^{-۹})[(۰/۲)^۳-(۰/۱)^۳]}{۳\times۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\times(۰/۲)^۲}$$

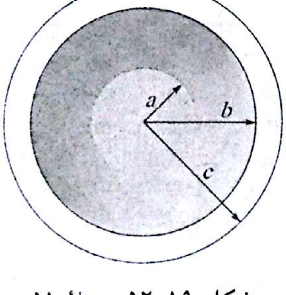
$$=۱۲/۱۳\frac{N}{C}$$

(ج)

$$r=۳b=۶a=۰/۶m\Rightarrow E=\frac{\rho(b^۳-a^۳)}{۳\varepsilon_0 r^۲}\Rightarrow$$

$$E=\frac{(۱/۸۴\times۱۰^{-۹})[(۰/۲)^۳-(۰/۱)^۳]}{۳\times۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\times(۰/۶)^۲}=۱/۳۵\frac{N}{C}$$

●●●۵۱- در شکل ۱۹-۵۲، یک کرهٔ توپر به شعاع $a=۲/۰۰\ cm$ با یک پوستهٔ رسانای کروی به شعاع داخلی $b=۲/۰۰\,a$ و شعاع خارجی $c=۲/۴۰\,a$ هم‌مرکز است. کره دارای بار خالص و یکنواخت $q_1=+۵/۰۰\ fC$ و پوسته دارای بار خالص $q_2=-q_1$ است. بزرگی میدان الکتریکی در فاصله‌های شعاعی (الف) $r=۰$، (ب) $r=a/۲/۰۰$، (پ) $r=a$، (ت) $r=۱/۵۰\,a$، (ث) $r=۲/۳۰\,a$، و (ج) $r=۳/۵۰\,a$ چقدر است؟ بار خالص روی (چ) سطح داخلی و (ح) سطح خارجی پوسته چقدر است؟



شکل ۱۹-۵۲ مسئلهٔ ۵۱

حل: (الف)

$$r=۰\Rightarrow E=۰$$

(ب)

$$r=\frac{a}{۲}\Rightarrow E=\frac{q_1 r}{۴\pi\varepsilon_0 R^۳}$$

$$=\frac{۵\times۱۰^{-۱۵}\times(۰/۰۱)\times۹\times۱۰^۹}{(۰/۰۲)^۳}=۵/۶۳\times۱۰^{-۲}\frac{N}{C}$$

(پ)

$$r=a\Rightarrow E=\frac{q_1}{۴\pi\varepsilon_0 a^۲}=\frac{۹\times۱۰^۹\times۵\times۱۰^{-۱۵}}{(۰/۰۲)^۲}=۰/۱۱۳\frac{N}{C}$$

(ت)

$$r=۱/۵a\Rightarrow E=\frac{q_1}{۴\pi\varepsilon_0 r^۲}=\frac{۹\times۱۰^۹\times۵\times۱۰^{-۱۵}}{(۱/۵\times۰/۰۲)^۲}=۰/۰۵\frac{N}{C}$$

(ث) درون رسانا میدان صفر است.

$$r=۲/۳a\Rightarrow E=۰$$

Scanned by CamScanner

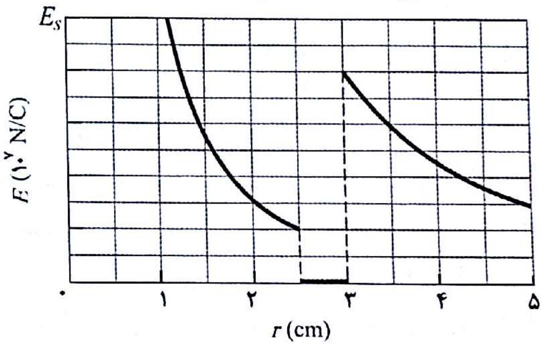
(ج) قانون گاوس را به کار می‌بریم. پس از آنکه بار $-q_1$ روی
$r=3/5a \Rightarrow E=0$
سطح داخلی پوسته القا شد، برای آنکه پایستگی بار برقرار بماند باید بار $+q_1$ روی سطح بیرونی پوسته القا شود. چون خود پوسته بار $-q_1$ داشت پس بار خالص محصور شده صفر است و بنابراین میدان نیز صفر می‌شود.

(چ) روی سطح درونی پوسته بار $-q_1=-5fC$ القا می‌شود.

(ح) چون روی سطح درونی بار $-q_1$ القا می‌شود طبق قانون پایستگی بار باید بار $+q_1$ روی سطح بیرونی القا شود که جمع آن با بار $-q_1$ که بیشتر روی پوسته بیرونی وجود داشت، صفر می‌شود.

$$-q_1+q_1=0$$

●●۵۲- ذرهٔ بارداری در مرکز یک پوستهٔ کروی قرار داده شده است. شکل ۱۹-۵۳ بزرگی E میدان الکتریکی را برحسب فاصلهٔ شعاعی r به دست می‌دهد. مقیاس محور قائم با $E_s=10/0\times10^7$ N/C مشخص شده است به طور تقریبی، چقدر بار خالص روی پوسته قرار دارد؟



شکل ۱۹-۵۳ مسئلهٔ ۵۲

حل: میدان در سطح خارجی پوسته $r=3$cm برابر با 8×10^7 N/c است.

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R^2}\Rightarrow 8\times10^7=(9\times10^9)\frac{q}{(0/03)^2}$$
$$\Rightarrow q=8\times10^{-6}\ C$$

این بار شامل بار نقطه‌ای q_1 و بار روی پوسته q_2 است.

درون پوسته در $r=2/5(cm)$ میدان برابر با $2\times10^7\frac{N}{C}$ است.

$$E=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0r^2}\Rightarrow 2\times10^7=(9\times10^9)\frac{q_1}{(2/5\times10^{-2})^2}$$
$$\Rightarrow q_1=1/39\times10^{-6}\ C$$
$$q=q_1+q_2\Rightarrow q_2=q-q_1=8\times10^{-6}-1/39\times10^{-6}$$
$$=6/61\times10^{-6}\ C$$

●●●۵۳- یک توزیع بار متقارن کروی که به طور شعاعی ناایکنواخت است، میدانی الکتریکی به بزرگی $E=Kr^4$ را که جهت آن به طور شعاعی از مرکز کره به طرف بیرون است، ایجاد می‌کند. در اینجا r فاصلهٔ شعاعی از مرکز کره و K ثابت است. چگالی حجمی ρ توزیع بار چیست؟

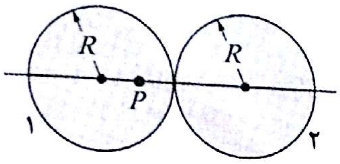
حل:

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}=kr^4\Rightarrow q=4\pi\varepsilon_0kr^6$$
$$q=\int\rho dv=\int_{r=0}^{r}\rho(4\pi r^2)dr=4\pi\varepsilon_0kr^6$$

از طرفین رابطه بالا نسبت به r مشتق می‌گیریم:

$$\rho=(4\pi r^2)=24\pi\varepsilon_0kr^5\Rightarrow\rho=6\varepsilon_0r^3$$

●●●۵۴- شکل ۱۹-۵۴، مقطعی از دو کرهٔ توپر را نشان می‌دهد که بار یکنواخت در سرتاسر حجم آنها توزیع شده است. شعاع هر کدام برابر با R است. نقطهٔ P روی خط واصل مرکز کره‌ها و در فاصلهٔ شعاعی $R/2/00$ از مرکز کرهٔ ۱ قرار دارد. اگر میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ P برابر با صفر باشد، نسبت q_2/q_1 بار کل q_2 در کرهٔ ۲ به بار کل q_1 در کرهٔ ۱ چقدر است؟



شکل ۱۹-۵۴ مسئلهٔ ۵۴

حل:

$$E_1=\frac{q_1r}{4\pi\varepsilon_0R^3}=\frac{q_1}{8\pi\varepsilon_0R^2}$$
$$E_2=\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0(1/5R)^2}=\frac{q_2}{9\pi\varepsilon_0R^2}$$

E_1 و E_2 همدیگر را خنثی کرده‌اند پس بارها همنام‌اند.

$$E_1=E_2$$
$$\frac{q_1}{8\pi\varepsilon_0R^2}=\frac{q_2}{9\pi\varepsilon_0R^2}\Rightarrow\frac{q_2}{q_1}=\frac{9}{8}=1/125$$

●●●۵۵- یک کرهٔ نارسانای توپر به شعاع $R=5/60$ cm دارای توزیع بار ناایکنواختی با چگالی بار حجمی $\rho=(14/1\ pC/m^3)r/R$ است که در آن r فاصلهٔ شعاعی از مرکز کره است. (الف) بار کل کره چقدر است؟ بزرگی E میدان الکتریکی در (ب) $r=0$، (پ) $r=R/2/00$، و (ت) $r=R$ چقدر است؟ (ث) نمودار E برحسب r را رسم کنید. ILW

حل: (الف)

$$\rho=\rho_0\frac{r}{R}\Rightarrow q=\int\rho dv=\int_{r=0}^{r=R}\rho_0\frac{r}{R}4\pi r^2dr$$
$$=\frac{\pi\rho_0}{R}R^4=\pi\rho_0R^3$$
$$\Rightarrow q=\pi\times14/1\times10^{-12}\times(5/6\times10^{-2})^3$$
$$=7/78\times10^{-15}\ C$$

(ب)

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2},q=\int_0^r\rho_0\frac{r}{R}4\pi r^2dr=\frac{\pi\rho_0}{R}r^4$$
$$E=\frac{\pi\rho_0r^4}{R}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0r^2}=\frac{\rho_0r^2}{4\varepsilon_0R}$$
$$r=0\Rightarrow E=0$$

Scanned by CamScanner

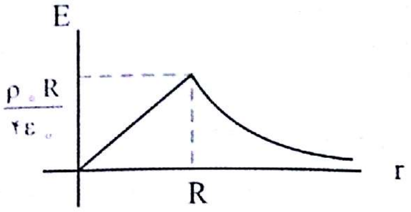
(پ) $r = \frac{R}{۲} \Rightarrow E = \frac{۱۴/۱\times۱۰^{-۱۲}\times\frac{R}{۲}}{۴\varepsilon_\circ R} = \frac{۱۴/۱\times۱۰^{-۱۲} R}{۱۶\varepsilon_\circ}$

$= \frac{۱۴/۱\times۱۰^{-۱۲}\times۰/۰۵۶}{۱۶\times۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}} = ۵/۵۷۶\times۱۰^{-۳}\ \frac{\text{N}}{\text{C}}$

(ت)

$r = R \Rightarrow E = \frac{\rho_\circ R}{۴\varepsilon_\circ} = \frac{۱۴/۱\times۱۰^{-۱۲}\times۰/۰۵۶}{۴\times۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}} = ۲/۲۳\times۱۰^{-۲}\ \frac{\text{N}}{\text{C}}$

(ث)



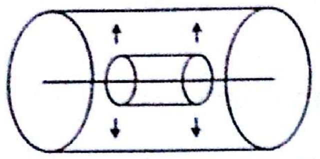
مسئله‌های اضافی

۵۶- *معمای خرده‌های شکلات.* انفجارهایی که به واسطهٔ تخلیهٔ بارهای الکتروستاتیکی (جرقه‌ها) رخ می‌دهند باعث خطرهایی جدی در دستگاههایی می‌شوند که با دانه‌ها و گردها کار می‌کنند. یک چنین انفجاری در گرد خرده‌های شکلات یک کارخانهٔ بیسکویت‌سازی در ۱۹۷۰/۱۳۴۹ رخ داد. کارگران بسته‌های گردی را که تحویل می‌گرفتند به داخل یک سطل بارگیری خالی می‌کردند که از آنجا نیز گردها از طریق لوله‌های پلاستیکی متصل به زمین به یک سیلو جهت نگهداری و انبار دمیده می‌شدند. در قسمتی از این مسیر، دو شرط برای وقوع انفجار وجود داشت: (۱) وقتی بزرگی میدان الکتریکی برابر یا بزرگتر از $۳/۰\times۱۰^{۶}$ N/C می‌شد، فروریزش الکتریکی و در نتیجه جرقهٔ الکتریکی می‌توانست رخ دهد. (۲) انرژی جرقه برابر یا بزرگتر از ۱۵۰ mJ می‌شد که می‌توانست گرد را تا حد انفجار آتش بزند. حال نخستین شرط وقوع انفجار در گردهای داخل لوله‌های پلاستیکی را بررسی می‌کنیم:

جریانی از گرد *باردار منفی* را در نظر بگیرید که به داخل یک لولهٔ استوانه‌ای به شعاع $R = ۵/۰$ cm دمیده می‌شود. فرض کنید که گرد و بار آن با چگالی بار حجمی ρ به طور یکنواخت در طول لوله پخش می‌شوند. (الف) با استفاده از قانون گاؤس عبارتی برای بزرگی میدان الکتریکی $\vec{E}$ در لوله برحسب تابعی از فاصلهٔ شعاعی r از مرکز لوله به دست آورید. (ب) آیا E با افزایش r، بزرگتر می‌شود یا کوچکتر؟ (پ) آیا جهت $\vec{E}$ به طور شعاعی به طرف درون است یا به طرف بیرون؟ (ت) به ازای $\rho = ۱/۱\times۱۰^{-۳}$ C/m³ (یک مقدار نوعی در کارخانه)، بیشینهٔ E را بیابید و تعیین کنید که این میدان بیشینه در کجا رخ می‌دهد؟ (ث) آیا جرقه می‌توانست رخ دهد؟ و اگر ممکن بود، در کجا؟ (این داستان با مسئلهٔ ۶۸ در فصل ۲۰ ادامه می‌یابد.)

حل: (الف) لوله را استوانه‌ای بسیار بلند در نظر می‌گیریم. از تقارن استوانه‌ای نتیجه می‌گیریم میدان شعاعی و عمود بر محور است. در نتیجه شاری از دو قاعده استوانه عبور نمی‌کند.

$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow E۲\pi r l = \frac{\rho\pi r^{۲} l}{\varepsilon_\circ}$



$E = \frac{\rho\pi r^{۲} l}{۲\pi\varepsilon_\circ r l} = \frac{\rho r}{۲\varepsilon_\circ} = \frac{-۱/۱\times۱۰^{-۳}\times r}{۲\times۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}} = -۶/۲۱\times۱۰^{۷}\, r\ \frac{\text{N}}{\text{C}}$

(ب) با افزایش r اندازه میدان نیز افزایش می‌یابد.

(پ) چون بار منفی است جهت میدان شعاعی به طرف درون است.

(ت) در $r = R$ میدان بیشینه است.

$E_{max} = ۶/۲۱\times۱۰^{۷}\times۰/۰۵ = ۳/۱۱\times۱۰^{۶}\ \frac{\text{N}}{\text{C}}$

(ث) چون E_{max} بزرگتر از میدان لازم برای جرقه است بنابراین جرقه می‌توانست رخ دهد.

۵۷- بار Q به طور یکنواخت روی کره‌ای به شعاع R توزیع شده است. (الف) چه کسری از این بار داخل شعاع $r = R/۲/۰۰$ قرار گرفته است؟ (ب) نسبت بزرگی میدان الکتریکی در $r = R/۲$ به مقدار آن روی سطح کره چقدر است؟

حل: (الف)

$\rho = \frac{Q}{\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}} = \frac{۳Q}{۴\pi R^{۳}}$

بار درون کره‌ای به شعاع $\frac{R}{۲}$ را با q نمایش می‌دهیم.

$q = \rho\frac{۴}{۳}\pi\left(\frac{R}{۲}\right)^{۳} = \frac{۳Q}{۴\pi R^{۳}}\frac{۴}{۳}\pi\frac{R^{۳}}{۸} = \frac{Q}{۸} \Rightarrow \frac{q}{Q} = \frac{۱}{۸}$

(ب)

میدان در $r = \frac{R}{۲}$: $E_۱ = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ r^{۲}} = \frac{\frac{Q}{۸}}{۴\pi\varepsilon_\circ\left(\frac{R}{۲}\right)^{۲}} = \frac{Q}{۸\pi\varepsilon_\circ R^{۲}}$

میدان روی سطح کره برابر است با:

$E = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ R^{۲}}$

$\frac{E_۱}{E} = \frac{Q}{۸\pi\varepsilon_\circ R^{۲}}\frac{۴\pi\varepsilon_\circ R^{۲}}{Q} = \frac{۱}{۲}$

۵۸- باری با چگالی حجمی یکنواخت $\rho = ۳/۲\ \mu\text{C/m}^{۳}$، کرهٔ توپر نارسانایی به شعاع ۵/۰ cm را پر کرده است. بزرگی میدان الکتریکی در (الف) ۳/۵ cm و (ب) ۸/۰ cm از مرکز کره چقدر است؟

حل: (الف) $r < R \Rightarrow E = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ r^{۲}} = \frac{\rho\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}}{۴\pi\varepsilon_\circ r^{۲}} = \frac{\rho r}{۳\varepsilon_\circ}$

$= \frac{۳/۲\times۱۰^{-۶}\times(۰/۰۳۵)}{۳\times۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}} = ۴/۲۲\times۱۰^{۳}\ \frac{\text{N}}{\text{C}}$

Scanned by CamScanner

(ب) $r > R \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$

$$= \frac{3.2\times10^{-6}\times(0.05)^3}{3\times8.85\times10^{-12}\times(0.08)^2} = 2.35\times10^{3}\ \frac{N}{C}$$

۵۹- میدان الکتریکی در نقطهٔ P درست بیرون سطح خارجی یک رسانای کروی توخالی به شعاع داخلی ۱۰ cm و شعاع خارجی ۲۰ cm، دارای بزرگی ۴۵۰ N/C و جهت آن به طرف بیرون است. وقتی بار نقطه‌ای نامعلوم Q در مرکز کره قرار داده شود، میدان الکتریکی در نقطهٔ P هنوز به طرف بیرون است، ولی بزرگی آن اکنون ۱۸۰ N/C است. (الف) پیش از آنکه Q در مرکز کره قرار داده شود، چه بار خالصی توسط سطح خارجی کره محصور شده است؟ (ب) بار Q چقدر است؟ پس از آنکه Q قرار داده شود، بار روی سطحهای (الف) داخلی و (ب) خارجی رسانا چقدر است؟

حل: (الف) میدان الکتریکی در سطح کره از رابطه روبرو به دست می‌آید:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

چون میدان به طرف بیرون است بار مثبت می‌باشد.

$$450 = (9\times10^{9})\frac{q}{(0.2)^2} \Rightarrow q = 2\times10^{-9}\ C$$

(ب) با قرار دادن بار Q در مرکز کره روی سطح داخلی بار $-Q$ ورودی سطح خارجی بار $q+Q$ قرار می‌گیرد.

$$E = \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \Rightarrow 180 = (9\times10^{9})\frac{(2\times10^{-9}+Q)}{(0.2)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Q = -1.2\times10^{-9}\ C$$

(پ و ت) با قرار دادن Q بار $-Q$ برابر با $+1.2\times10^{-9}\ C$ روی سطح داخلی کره القا می‌شود. طبق پایستگی بار باید بار $+Q$ روی سطح خارجی کره القا شود که چون بار q قبلاً روی آن قرار داشت، بار روی سطح خارجی کره برابر $q+Q$ است

$$q+Q = 2\times10^{-9} - 1.2\times10^{-9} = 0.8\times10^{-9}\ C$$

۶۰- فرض کنید گویی باردار دارای چگالی بار منفی است که به طور یکنواخت به جز در مجرای شعاعی باریکی که با عبور از مرکز آن، سطح یک طرف را به سطح طرف مقابل وصل می‌کند، توزیع شده است. همچنین فرض کنید که می‌توانیم یک پروتون را در هر جایی داخل مجرا یا خارج گوی قرار دهیم. F_R را بزرگی نیروی الکتروستاتیکی در نظر می‌گیریم که وقتی پروتون روی سطح گوی به شعاع R قرار گیرد، بر آن وارد می‌شود. برحسب مضربی از R، در چه فاصله‌ای از سطح کره نقطه‌ای وجود دارد که اگر پروتون را (الف) از گوی دور کنیم و (ب) به داخل مجرا ببریم، بزرگی نیروی وارد بر آن برابر $0.50\ F_R$ شود؟

حل: طبق مسأله ۵۸ میدان درون کره از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

در $r = R$ میدان بیشینه است.

$$E_{max} = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0}$$

در خارج از کره باردار میدان طبق مسأله ۵۸ به این شکل به دست می‌آید:

$$E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

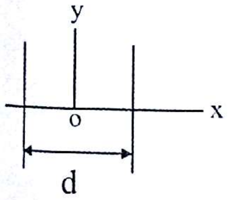
(الف) نیروی وارد بر پروتون $F = eE$ است که بیشینه آن در سطح کره باردار است.

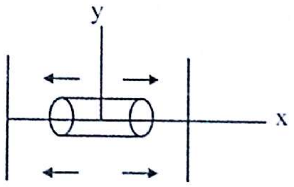
$$eE = \frac{1}{2}eE_{max} \Rightarrow \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{1}{2}\frac{\rho R}{3\varepsilon_0} \Rightarrow r^2 = 2R^2 \Rightarrow r = \sqrt{2}R$$

$$eE = \frac{1}{2}eE_{max} \Rightarrow \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\frac{\rho R}{3\varepsilon_0} \Rightarrow r = \frac{R}{2}$$

۶۱- باری با چگالی حجمی یکنواخت $\rho = 1.2\ nC/m^3$، قطعه‌ای نامتناهی میان $x = -5.0$ cm و $x = +5.0$ cm را پر می‌کند. بزرگی میدان الکتریکی در نقطه‌ای با مختصهٔ (الف) $x = 4.0$ cm و (ب) $x = 6.0$ cm چقدر است؟

حل:

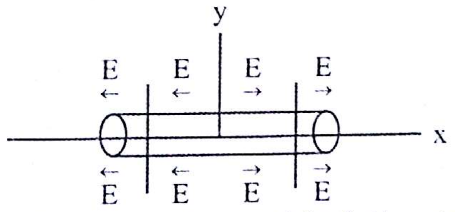




(الف) $x = 4$ cm درون توزیع بار قرار دارد.
به دلیل تقارن میدان موازی محور xها است و بنابراین شاری از سطح جانبی استوانه نمی‌گذرد.

$$\oint_S E\cdot dA = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2EA = \frac{\rho A(2x)}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho x}{\varepsilon_0} =$$
$$\frac{1.2\times10^{-9}\times(0.04)}{8.85\times10^{-12}} = 5.42\frac{N}{C}$$

(ب)



به دلیل تقارن میدان $x = 6\,(cm)$ موازی محور x است و شاری از سطح جانبی استوانه نمی‌گذرد.

$$\oint_S \vec{E}\cdot\vec{dA} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$2EA = \frac{\rho A d}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} = \frac{1.2\times10^{-9}\times(0.1)}{2\times8.85\times10^{-12}} = 6.78\frac{N}{C}$$

Scanned by CamScanner

۶۲- چگالی بار سطحی یکنواخت $۸/۰\ nC/m^{۲}$ روی تمام صفحهٔ xy توزیع شده است. شار الکتریکی عبوری از یک سطح گاوسی کروی به مرکز مبداء دستگاه مختصات و به شعاع $۵/۰$ cm چقدر است؟

حل:

$$\Phi=\frac{q}{\varepsilon_{0}}=\frac{\sigma\pi r^{۲}}{\varepsilon_{0}}=\frac{(۸\times۱۰^{-۹})\pi(۰/۰۵)^{۲}}{۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}}=۷/۱\frac{N\cdot m^{۲}}{C}$$

۶۳- یک پوستهٔ کروی فلزی و نازک دارای شعاع $۲۵/۰$ cm و بار $۲/۰۰\times۱۰^{-۷}$ C است. E را برای نقطه‌ای (الف) در داخل پوسته، (ب) درست خارج پوسته، و (پ) $۳/۰۰$ m از مرکز پوسته، به دست آورید.

حل: (الف) در داخل پوسته باری وجود ندارد، بنابراین میدان صفر است.

(ب)
$$E=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_{0}R^{۲}}=\frac{۲\times۱۰^{-۷}\times۹\times۱۰^{۹}}{(۰/۲۵)^{۲}}=۲/۸۸\times۱۰^{۴}\frac{N}{C}$$

(پ)
$$E=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_{0}r^{۲}}=\frac{۹\times۱۰^{۹}\times۲\times۱۰^{-۷}}{۹}=۲۰۰\frac{N}{C}$$

۶۴- میدان الکتریکی درفضای خاصی برابر با $\vec{E}=(x+۲)\hat{i}$ N/C است، که در آن x برحسب متر است. یک سطح گاوسی استوانه‌ای به شعاع ۲۰ cm را که هم‌محور با محور x است در نظر بگیرید. یک سر استوانه در $x=۰$ قرار دارد. (الف) بزرگی شار الکتریکی عبوری از سر دیگر استوانه در $x=۲/۰$ m، چقدر است؟ (ب) بار خالص محصور شده در داخل استوانه چقدر است؟

حل: (الف)

$$x=۲m\Rightarrow\Phi_{۱}=\vec{E}\cdot\vec{s}=۴\hat{i}\cdot(\pi)(۰/۲)^{۲}\hat{i}=۰/۵۰۲\frac{N\cdot m^{۲}}{C}$$

(ب) چون میدان موازی محور x است، از سطح جانبی استوانه شاری عبور نمی‌کند. شاری که از قاعده استوانه در $x=۰$ می‌گذرد برابر است با:

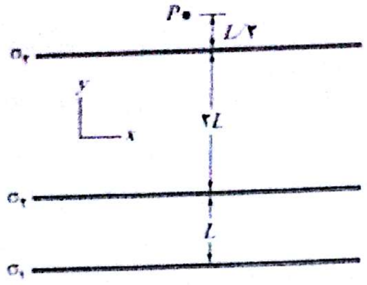
$$\Phi_{۲}=\vec{E}\cdot\vec{s}=۲\hat{i}\cdot\pi(۰/۲)^{۲}(-\hat{i})=-۰/۲۵۱\frac{N\cdot m^{۲}}{C}$$

$$\Phi_{total}=۰/۵۰۲-۰/۲۵۱=۰/۲۵۱\frac{N\cdot m^{۲}}{C}$$

$$\Phi_{total}=\frac{q}{\varepsilon_{0}}\Rightarrow۰/۲۵۱=\frac{q}{۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}}$$

$$\Rightarrow q=۲/۲۲\times۱۰^{-۱۲}C$$

۶۵- شکل ۱۹-۵۵، مقطع سه برگهٔ نارسانای بزرگ نامتناهی را نشان می‌دهد که روی آنها بار به طور یکنواخت پخش شده است. چگالی‌های بار سطحی عبارت‌اند از: $\sigma_{۱}=+۲/۰۰\ \mu C/m^{۲}$، $\sigma_{۲}=+۴/۰۰\ \mu C/m^{۲}$، و $\sigma_{۳}=-۵/۰۰\ \mu C/m^{۲}$، و فاصلهٔ L برابر است با $L=۱/۵۰$ cm. برحسب نمادگذاری بردارهای یکه، میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ P چیست؟



شکل ۱۹-۵۵ مسئلهٔ ۶۵

حل:

$$\vec{E}=\frac{\sigma_{۱}}{۲\varepsilon_{0}}\hat{j}+\frac{\sigma_{۲}}{۲\varepsilon_{0}}\hat{j}+\frac{\sigma_{۳}}{۲\varepsilon_{0}}\hat{j}=\frac{\sigma_{۱}+\sigma_{۲}+\sigma_{۳}}{۲\varepsilon_{0}}\hat{j}=\frac{(۲+۴-۵)\times۱۰^{-۶}}{۲\times۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}}\hat{j}=۵/۵۶\times۱۰^{۴}\hat{j}\frac{N}{C}$$

۶۶- بزرگی شار الکتریکی خالص عبوری از هر وجه یک تاس مضربی از $۱۰^{۳}$ N.m²/C است که این مضرب دقیقاً برابر با تعداد نقطه‌های N روی هر وجه (۱ تا ۶) است. برای N های فرد، شار به طرف درون و برای N های زوج، شار به طرف بیرون است. بار خالص داخل تاس چقدر است؟

حل:

$$\Phi=(-۱+۲-۳+۴-۵+۶)\times۱۰^{۳}=۳\times۱۰^{۳}\frac{N\cdot m^{۲}}{C}$$

$$q=\varepsilon_{0}\Phi=۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\times۳\times۱۰^{۳}=۲/۶۶\times۱۰^{-۸}C$$

۶۷- یک سطح گاوسی به شکل نیمکره‌ای به شعاع $R=۵/۶۸$ cm در میدان الکتریکی یکنواختی به بزرگی $۲/۵۰$ N/C قرار دارد. این سطح، هیچ بار خالصی را در بر ندارد. در قاعدهٔ (تخت) این سطح ، میدان عمود و به طرف این سطح است. شار عبوری از (الف) قاعده و (ب) بخش خمیدهٔ سطح چقدر است؟

حل: (الف) میدان عمود بر سطح قاعده است. شاری که از این سطح می‌گذرد، به طرف داخل نیمکره می‌باشد.

$$\Phi_{۱}=\vec{E}\cdot\vec{s}=-(۲/۵)\times\pi\times(۵/۶۸\times۱۰^{-۲})^{۲}=-۲/۵۳\times۱۰^{-۲}\frac{N\cdot m^{۲}}{C}$$

(ب) سطح نیمکره و قاعده آن تشکیل یک سطح بسته می‌دهند که هیچ باری درون آن نیست. پس:

$$\Phi_{total}=\Phi_{۱}+\Phi_{۲}=۰\Rightarrow\Phi_{۲}=-\Phi_{۱}=۲/۵۳\times۱۰^{-۲}\frac{N\cdot m^{۲}}{C}$$

۶۸- بار نقطه‌ای $q=۱/۰\times۱۰^{-۷}$ C در مرکز یک کاواک کروی به شعاع $۳/۰$ cm در یک قطعهٔ فلزی قرار دارد. با استفاده از قانون گاوس، میدان الکتریکی را در (الف) $۱/۵$ cm از مرکز کاواک و (ب) نقطه‌ای داخل فلز، به دست آورید.

حل: (الف)

$$r=۱/۵(cm)\Rightarrow E=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_{0}r^{۲}}=\frac{۹\times۱۰^{۹}\times۱\times۱۰^{-۷}}{(۰/۰۱۵)^{۲}}=۴\times۱۰^{۶}\frac{N}{C}$$

Scanned by CamScanner

(ب) میدان درون رسانا صفر است. $E = 0$

۶۹- یک پوستهٔ کروی فلزی نازک به شعاع a دارای بار q_a است. این کره با پوستهٔ کروی فلزی نازک دیگری به شعاع $b > a$ و بار q_b هم‌مرکز است. میدان الکتریکی را در نقطه‌هایی به فاصلهٔ r از مرکز مشترک به دست آورید که در آنها (الف) $r < a$، (ب) $a < r < b$، و (پ) $r > b$ است. (ت) دربارهٔ معیاری که با استفاده از آن چگونگی توزیع بار روی سطح‌های داخلی و خارجی پوسته‌ها را تعیین می‌کنید، بحث کنید.

حل: (الف) سطح گاوس را کره‌ای به شعاع r در نظر می‌گیریم که هیچ باری درون آن وجود ندارد پس میدان صفر است.

$r < a$
$E = 0$

(ب) $$a < r < b \Rightarrow E = \frac{q_a}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

(پ) $$r > b \Rightarrow E = \frac{q_a + q_b}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

(ت) بار روی سطح داخلی پوسته a برابر صفر است، چون بار همیشه روی سطح خارجی رسانا قرار می‌گیرد. پس بار q_a روی سطح خارجی پوسته a جمع می‌شود. بار $-q_a$ روی سطح داخلی پوسته b القا می‌شود و در نتیجه بار $q_b + q_a$ روی سطح بیرونی پوسته b قرار می‌گیرد.

۷۰- چه بار خالصی توسط مکعب گاوسی مسئلهٔ ۲ در بر گرفته شده است؟

حل: در مسأله ۲ شار کل که از سطح می‌گذرد را به دست آوردیم:

$$\Phi = -48 \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{C}}$$
$$q = \varepsilon_0 \Phi = 8/85 \times 10^{-12} \times (-48) = -4/24 \times 10^{-10}\ \mathrm{C}$$

۷۱- پروتونی با تندی $v = 3/00 \times 10^5\ \mathrm{m/s}$ درست بیرون کرهٔ بارداری به شعاع $r = 1/00\ \mathrm{cm}$، می‌چرخد. بار روی کره چقدر است؟

حل: نیروی جانب مرکز نیروی جاذبه کولنی است.

$$m\frac{v^2}{R} = \frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \Rightarrow$$
$$q = \frac{4\pi\varepsilon_0 Rmv^2}{e} = \frac{4\pi \times 8/85 \times 10^{-12} \times 0/01 \times 1/67 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^5)^2}{1/6 \times 10^{-19}}$$

نیرو مرکزگرا و به سمت داخل، به طرف مرکز کره است. چون بار پروتون مثبت است و میدان الکتریکی نیز باید رو به داخل باشد پس بار روی کره منفی است.

$$q = -1/04 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}$$

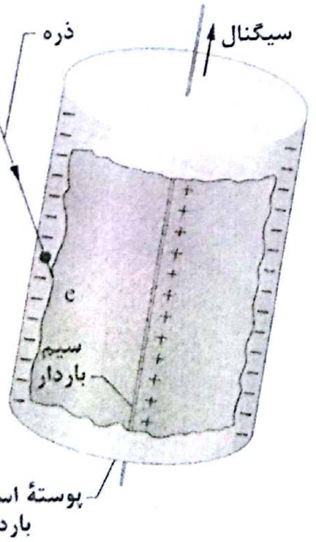
۷۲- معادلهٔ ۱۹-۱۱ $(E = \sigma / \varepsilon_0)$ میدان الکتریکی را در نقطه‌های نزدیک به سطح رسانای بارداری به دست می‌دهد. این معادله را برای یک کرهٔ رسانا به شعاع r و بار q به کار ببرید، و نشان دهید که میدان الکتریکی در بیرون این کره همان میدان ناشی از یک بار نقطه‌ای است که در مرکز کره قرار گرفته باشد.

حل: نقاط نزدیک به سطح کره یعنی نقاطی که تقریباً به شعاع R کره هستند.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\frac{q}{4\pi R^2}}{\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

که مانند میدان یک بار نقطه‌ای است.

۷۳- شکل ۱۹-۵۶ یک شمارندهٔ گایگر[1] را نشان می‌دهد که برای آشکارسازی تابشهای یونیده (تابشهایی که باعث یونیده شدن اتمها می‌شود) به کار می‌رود. این شمارنده، شامل یک سیم مرکزی باردار مثبت است که توسط یک پوستهٔ استوانه‌ای رسانا و هم‌مرکز با بار منفی یکسان احاطه شده است. بنابراین، یک میدان الکتریکی شعاعی قوی در داخل این پوسته ایجاد می‌شود. پوسته دارای یک گاز خنثی با فشار پایین است. یک ذرهٔ تابشی که از طریق دیوارهٔ پوسته وارد دستگاه شود، چند اتم گاز را یونیده می‌کند. در نتیجه، الکترون‌های آزاد (e) به سوی سیم مثبت کشیده می‌شوند. ولی، میدان الکتریکی به حدی قوی است که در بین برخورد اتمهای گاز، الکترونهای آزاد انرژی کافی برای یونیده کردن اتمهای دیگر را نیز به دست می‌آورند و بدین ترتیب الکترونهای آزاد بیشتری ایجاد می‌شوند و این فرایند تا هنگامی که الکترونها به سیم برسند، ادامه می‌یابد. "بهمن" حاصل از الکترونها توسط سیم جمع‌آوری می‌شود و سیگنالی به وجود می‌آید که برای ثبت کردن‌عبور ذرهٔ اصلی تابش به کار می‌رود. فرض کنید که شعاع سیم مرکزی $25\mu m$، شعاع داخلی پوسته $1/4\ \mathrm{cm}$، و طول پوسته $16\ \mathrm{cm}$ باشد. اگر میدان الکتریکی روی دیوارهٔ درونی پوسته $2/9 \times 10^4\ \mathrm{N/C}$ باشد، بار مثبت کل در سیم مرکزی چقدر است؟



شکل ۱۹-۵۶ مسئلهٔ ۷۳

حل: چون طول استوانه بسیار بزرگتر از شعاع قاعده است، می‌توان آن را بسیار طویل در نظر گرفت. سطح گاوسی را

1. Geiger

Scanned by CamScanner

استوانه‌ای به دور سیم مرکزی و هم محور با آن در نظر می‌گیریم و قانون گاوسی را به کار می‌بریم. چون بزرگی میدان روی دیواره درونی پوسته معلوم است شعاع سطح گاوسی را برابر با R می‌گیریم. جداره داخلی استوانه بدون بار است، بنابراین بار محصور شده در سطح گاوسی همان بار سیم مرکزی است.

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{ds}=\frac{q}{\varepsilon_۰}\Rightarrow E۲\pi RL=\frac{q}{\varepsilon_۰}\Rightarrow E=\frac{q}{۲\pi\varepsilon_۰ RL}$$

$$۲/۹\times۱۰^{۴}=\frac{q}{۲\pi\times۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\times(۱/۴\times۱۰^{-۲})\times۰/۱۶}$$
$$=۳/۶\times۱۰^{-۹}\,\mathrm{C}$$

۷۴- باری به طور یکنواخت در سرتاسر حجم استوانه‌ای توپر به شعاع R و طول نامتناهی توزیع شده است. (الف) نشان دهید در فاصلهٔ $r<R$ از محور استوانه داریم

$$E=\frac{\rho r}{۲\varepsilon_۰}$$

که در آن ρ چگالی بار حجمی است. (ب) عبارتی برای E، وقتی $r>R$ است، بنویسید.

حل: (الف) توزیع بار دارای تقارن استوانه‌ای است. میدان شعاعی و عمود بر محور است. بنابراین شاری از دو سطح قاعده استوانه گاوس عبور نمی‌کند.

$$r<R\Rightarrow\oint E\cdot ds=\frac{q}{\varepsilon_۰}\Rightarrow E۲\pi rL=\frac{\rho\pi r^۲L}{\varepsilon_۰}\Rightarrow E=\frac{\rho r}{۲\varepsilon_۰}$$

(ب)

$$r>R\Rightarrow\oint E\cdot ds=\frac{q}{\varepsilon_۰}\Rightarrow E۲\pi rL=\frac{\rho\pi R^۲L}{\varepsilon_۰}\Rightarrow E=\frac{\rho R^۲}{۲\varepsilon_۰ r}$$

۷۵- آب در یک نهر آبیاری به پهنای $w=۳/۲۲\ \mathrm{m}$ و عمق $d=۱/۰۴\ \mathrm{m}$، با تندی $۰/۲۰۷\ \mathrm{m/s}$ جاری می‌شود. شار جرمی آب عبوری از یک سطح فرضی برابر با حاصلضرب چگالی آب ($۱۰۰۰\ \mathrm{kg/m^۳}$) در شار حجمی عبوری آن از این سطح است. شار جرمی عبوری از سطحهای فرضی زیر را پیدا کنید: (الف) سطحی به مساحت wd، کاملاً داخل آب و عمود بر جریان؛ (ب) سطحی به مساحت $۳wd/۲$، که به اندازهٔ wd در آب فرو رفته است و عمود بر جریان؛ (پ) سطحی به مساحت $wd/۲$ که کاملاً داخل آب است و عمود برجریان؛ (ت) سطحی به مساحت wd که نیمی از آن داخل آب و نیمی دیگر در خارج آن است و عمود بر جریان؛ (ث) سطحی به مساحت wd که کاملاً داخل آب است و بردار عمود بر سطح آن با جهت جریان زاویهٔ $۳۴/۰^\circ$ می‌سازد.

حل: (الف) شار جرمی برابر است با:

$$\Phi_m=\omega d\rho v=$$
$$۳/۲۲\times۱/۰۴\times۱۰۰۰\times۰/۲۰۷=۶۹۳\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$$

(ب) چون آب فقط از سطح ωd شارش می‌یابد، شار عبوری از این سطح همان $۶۹۳\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$ است.

(پ)

$$\Phi_m=\left(\frac{\omega d}{۲}\right)\rho v=\frac{۶۹۳}{۲}=۳۴۶/۵\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$$

(ت) آب از سطح $\frac{\omega d}{۲}$ شارش می‌یابد، شار همان $۳۴۶/۵\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$ است.

(ث)

$$\Phi_m=(\omega d\cos\theta)\rho v=۶۹۳\times\cos۳۴=۵۷۵\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$$

۷۶- یک الکترون آزاد میان دو صفحهٔ نارسانای موازی و بزرگ افقی که به فاصلهٔ $۲/۳\ \mathrm{cm}$ از هم واقع‌اند، قرار دارد. یکی از صفحه‌ها دارای بار مثبت یکنواخت و دیگری دارای بار منفی یکنواخت است. نیروی وارد بر الکترون بر اثر میدان الکتریکی $\vec{E}$ میان صفحه‌ها با نیروی گرانشی وارد بر الکترون موازنه کرده است. (الف) بزرگی چگالی بار سطحی روی صفحه‌ها و (ب) جهت (رو به بالا یا رو به پایین) $\vec{E}$ چگونه است؟ SSM

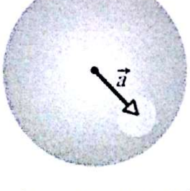
حل: (الف) بین دو صفحه میدان یکنواخت و برابر $\frac{\sigma}{\varepsilon_۰}$ است. در حالت تعادل نیروی کولنی eE نیروی وزن را خنثی می‌کند.

$$mg=eE=\frac{e\sigma}{\varepsilon_۰}$$

$$\Rightarrow\sigma=\frac{mg\varepsilon_۰}{e}=\frac{۹/۱\times۱۰^{-۳۱}\times۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\times۹/۸}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}$$
$$=۴/۹۴\times۱۰^{-۲۲}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m^۲}}$$

(ب) جهت نیروی الکتریکی رو به بالاست. چون بار الکترون منفی است جهت میدان الکتریکی رو به پایین است.

۷۷- یک کره توپر نارسانا دارای چگالی بار حجمی یکنواخت ρ است. فرض کنید $\vec{r}$ برداری از مرکز کره به سوی نقطهٔ دلخواه P در داخل کره است. (الف) نشان دهید که میدان الکتریکی در نقطهٔ P با $\vec{E}=\rho\vec{r}/۳\varepsilon_۰$ داده می‌شود. (توجه کنید که این نتیجه مستقل از شعاع کره است.) (ب) یک کاواک کروی، آن گونه که در شکل ۱۹-۵۷ نشان داده شده، درون کره ایجاد شده است. با استفاده از مفاهیم برهم‌نهی نشان دهید که میدان الکتریکی در تمام نقطه‌های داخل کاواک، یکنواخت و برابر با $\vec{E}=\rho\vec{a}/۳\varepsilon_۰$ است که در آن $\vec{a}$ بردار مکان از مرکز کره به سوی مرکز کاواک است. (توجه کنید که این نتیجه به شعاع کره و شعاع کاواک بستگی ندارد.)



شکل ۱۹-۵۷ مسئلهٔ ۷۷

Scanned by CamScanner

حل: (الف)

$$r<R \Rightarrow \oint \vec{E}\cdot d\vec{s}=\frac{q}{\varepsilon_0}\Rightarrow$$

$$E(4\pi r^2)=\frac{q}{\varepsilon_0}\Rightarrow E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\Rightarrow$$

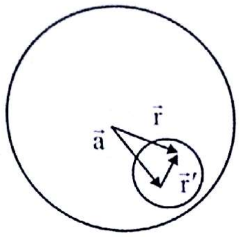
$$E=\frac{\rho\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

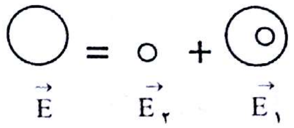
چون میدان شعاعی است:

$$\vec{E}=\frac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0}$$

(ب) از اصل بر هم نهی استفاده می‌کنیم.

میدان کاواک توپر − میدان کره = میدان داخل کاواک





براساس نتیجه قسمت الف میدان کاواک توپر (که یک کره نارساناست) به شعاع $\vec{r}'$، چنین می‌شود: $\vec{E}_2=\frac{\rho\vec{r}'}{3\varepsilon_0}$

۷۸- چگالی بار یکنواخت $500\ \text{nC/m}^3$ در سرتاسر یک حجم کروی به شعاع ۶/۰۰ cm توزیع شده است. یک سطح گاؤسی مکعبی را در نظر بگیرید که مرکز آن بر مرکز کره واقع است. شار الکتریکی عبوری از این سطح مکعبی چقدر است، در صورتی که طول هر ضلع آن (الف) ۴/۰۰ cm و (ب) ۱۴/۰ cm باشد؟

حل: (الف)

$a=4\ \text{cm}\Rightarrow$ قطر مکعب $=a\sqrt{3}=6/92\ \text{cm}$

پس تمام حجم مکعب داخل کره و دارای بار است. شاری که از سطح مکعبی می‌گذرد متناسب با بار درون آن است.

$$\Phi=\frac{q}{\varepsilon_0}=\frac{\rho a^3}{\varepsilon_0}=\frac{500\times10^{-9}\times(0/04)^3}{8/85\times10^{-12}}=3/62\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}}$$

(ب)

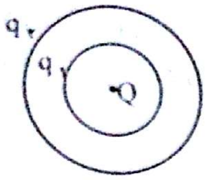
پس تمام بار کره درون مکعب قرار می‌گیرد. $a=14\ \text{cm}$

$$\Phi=\frac{q}{\varepsilon_0}=\frac{\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0}=\frac{\rho 4\pi R^3}{3\varepsilon_0}\Rightarrow$$

$$\Phi=\frac{500\times10^{-9}\times4\pi\times(0/06)^3}{3\times8/85\times10^{-12}}=51/1\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}}$$

۷۹- بار $-14\,\mu C$ روی سطح خارجی یک پوستهٔ رسانای کروی، و یک ذرهٔ باردار در داخل آن قرار دارد. اگر بار خالص روی پوسته $-10\,\mu C$ باشد، بار (الف) روی سطح داخلی پوسته و (ب) ذره، چقدر است؟

حل: (الف) برای آنکه بار خالص $-10(\mu c)$ داشته باشیم هنگامی که بار $-14(\mu c)$ روی سطح خارجی توزیع شده است باید بار $+4(\mu c)$ روی سطح داخلی توزیع شده باشد. چون در حالت الکتروستاتیک بارها روی سطح خارجی رسانا قرار می‌گیرد.



$$q_2=-14\,\mu C\ ,\quad q_1+q_2=-10\,\mu C\Rightarrow q_1=4\,\mu C$$

(ب) برای آنکه میدان داخل رسانا صفر باشد باید میدان ناشی از بار $+4\,\mu C$ روی سطح داخلی توسط میدان حاصل از ذره باردار، خنثی شود. پس بار ذره $-4\,\mu C$ است.

$$Q+q_1=0\Rightarrow Q=-q_1=-4\,\mu C$$

۸۰- بار ۶/۰۰ pC به طور یکنواخت در سر تا سر حجم کره‌ای به‌شعاع $r=4/00$ cm پخش شده است. بزرگی میدان الکتریکی در فاصلهٔ شعاعی (الف) ۶/۰۰ cm و (ب) ۳/۰۰ cm چقدر است؟

حل: (الف)

$$r>R\Rightarrow E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{9\times10^9\times6\times10^{-12}}{(0/06)^2}=15\ \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

(ب) طبق مسأله ۷۷ میدان الکتریکی به دست می‌آید:

$$r<R\Rightarrow E=\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

$$\rho=\frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{3q}{4\pi R^3}=\frac{3\times6\times10^{-12}}{4\pi\times(0/04)^3}=2/24\times10^{-8}\ \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$$

$$E=\frac{2/24\times10^{-8}\times0/03}{3\times8/85\times10^{-12}}=25/3\ \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

۸۱- یک گوی کروی باردار دارای چگالی بار یکنواخت است. برحسب شعاع گوی R، در چه فاصله‌های شعاعی (الف) در داخل و (ب) در خارج گوی، بیشینهٔ میدان الکتریکی برابر با $\frac{1}{4}$ بزرگی بیشینهٔ میدان آن است؟

حل: (الف) طبق مسأله ۷۷ میدان داخل کره از این رابطه به دست آمد:

$$E=\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\Rightarrow$$

$$E=\frac{\frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}r}{3\varepsilon_0}=\frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

میدان در سطح کره بیشینه است. $r=R$

$$E_{max}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$\frac{E}{E_{max}}=\frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\cdot\frac{4\pi\varepsilon_0 R^2}{q}=\frac{r}{R}=\frac{1}{4}\Rightarrow r=\frac{1}{4}R$$

Scanned by CamScanner

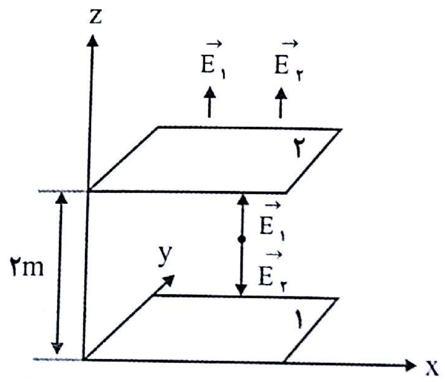
(ب)

$$E=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_0 r^۲}\Rightarrow\frac{E}{E_{max}}=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_0 r^۲}\frac{۴\pi\varepsilon_0 R^۲}{q}=\frac{R^۲}{r^۲}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow$$

$$r^۲=۴R^۲\Rightarrow r=۲R$$

۸۲- باری با چگالی سطحی یکنواخت ۸/۰۰ nC/m^۲ روی تمام صفحهٔ xy توزیع شده‌است؛ باری با چگالی سطحی یکنواخت ۳/۰۰ nC/m^۲ روی صفحه‌ای موازی که با $z=۲/۰۰$ m تعریف شده، توزیع شده است. بزرگی میدان الکتریکی را در نقطه‌ای با مختصهٔ z (الف) ۱/۰۰ m و (ب) ۳/۰۰ m، تعیین کنید.

حل:



$$E_۱=\frac{\sigma_۱}{۲\varepsilon_0}=\frac{۸\times۱۰^{-۹}}{۲\times۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}}=۴۵۲\ \frac{N}{C}$$

$$E_۲=\frac{\sigma_۲}{۲\varepsilon_0}=\frac{۳\times۱۰^{-۹}}{۲\times۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}}=۱۶۹/۵\ \frac{N}{C}$$

(الف) $z=۱$ m بین دو صفحه قرار دارد.

$$E=E_۱-E_۲=۴۵۲-۱۶۹/۵=۲۸۲/۵\ \frac{N}{C}$$

(ب) $z=۳$ m بالای صفحه دوم قرار دارد.

$$E=E_۱+E_۲=۴۵۲+۱۶۹/۵=۶۲۱/۵\ \frac{N}{C}$$

Scanned by CamScanner

۲۰ پتانسیل الکتریکی

Scanned by CamScanner

بخش ۲۰-۳ پتانسیل الکتریکی

●۱- بیشتر مواد سازندهٔ حلقه‌های زحل به شکل دانه‌های غبار ریزی با شعاعی از مرتبهٔ $۱۰^{-۶}$m هستند. این دانه‌ها در ناحیه‌ای که شامل گاز یونیدهٔ رقیقی است قرار گرفته‌اند، و الکترونهای اضافی را جذب می‌کنند. به طور تقریبی، فرض کنید هر دانه، کره‌ای به شعاع $R=۱/۰\times۱۰^{-۶}$m است. هر دانه چه تعداد الکترون را باید جذب کند تا پتانسیل روی سطح آن (با فرض آنکه در بینهایت $V=۰$ است) برابر با -۴۰۰V شود؟

حل:

$$V=\frac{kq}{r}\Rightarrow -۴۰۰=\frac{(۹\times۱۰^۹)}{۱\times۱۰^{-۶}}\Rightarrow q=-۴/۴۴\times۱۰-۱۴\ C$$

$$N=\frac{q}{e}=\frac{-۴/۴۴\times۱۰^{-۱۴}}{-۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}=۲/۷۸\times۱۰^۵$$

●۲- اختلاف پتانسیل الکتریکی میان زمین و ابر در یک توفان تندری خاص، $۱/۲\times۱۰^۶$ V است. بزرگی تغییر در انرژی پتانسیل الکتریکی الکترونی که میان زمین و این ابر حرکت می‌کند، برحسب یکای الکترون – ولت چقدر است؟

حل:

$$\Delta U=q\Delta V=(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۱/۲\times۱۰^۹)=۱/۹۲\times۱۰^{-۱۰}\ J$$
$$=۱/۲\times۱۰^۹\ eV$$

●۳- باتری ۱۲V اتومبیل می‌تواند از طریق یک مدار، بار کل (آمپر- ساعت) ۸۴A.h را از پایانه‌ای به پایانهٔ دیگر بفرستد. (الف) این بار معادل چند کولن است؟ (*راهنمایی:* معادلهٔ ۱۷-۳ را ببینید.) (ب) اگر تمام این بار باعث تغییر اختلاف پتانسیل ۱۲V شود، این چه مقدار انرژی دربر دارد؟ SSM

حل: (الف)

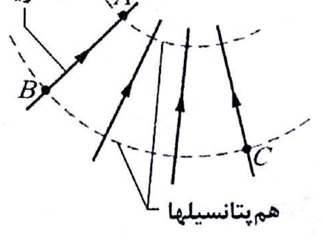
$$q=It=۸۴\,A\cdot h=(۸۴)(۳۶۰۰)=۳/۰۲\times۱۰^۵\ C$$

(ب)

$$\Delta U=q\Delta V=(۱۲)(۳/۰۲\times۱۰^۵)=۳/۶۲\times۱۰^۶\ J$$

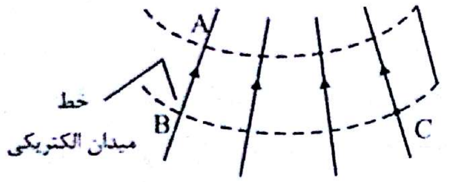
بخش ۲۰-۵ محاسبهٔ پتانسیل از روی میدان

●۴- وقتی یک الکترون در امتداد خط میدان شکل ۲۰-۲۹ از A به B حرکت کند، میدان الکتریکی، کاری به اندازهٔ $۳/۹۴\times۱۰^{-۱۹}$J روی آن انجام می‌دهد. اختلاف پتانسیلهای الکتریکی (الف) V_B-V_A، (ب) V_C-V_A و (پ) V_C-V_B چقدرند؟



شکل ۲۰-۲۹ مسئلهٔ ۴

حل:



(الف) $W=q\Delta V\Rightarrow$

$$۳/۹۴\times۱۰^{-۱۹}=(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})\Delta V\Rightarrow$$
$$\Delta V=V_B-V_A=۲/۴۶\ V$$

(ب) نقاط B و C روی یک سطح هم پتانسیل قرار دارند پس:

$$\Delta V=V_C-V_A=V_B-V_A=۲/۴۶V$$

(پ) نقاط B و C روی یک سطح هم پتانسیل قرار دارند.

$$\Delta V=V_C-V_B=۰$$

●۵- یک ورقهٔ نارسانای نامتناهی دارای باری با چگالی سطحی $\sigma=۰/۱۰\mu C/m^۲$ روی یک طرف خود است. سطحهای هم پتانسیلی که اختلاف پتانسیل آنها ۵۰V است، در چه فاصله‌ای از یکدیگر قرار دارند؟ SSM

حل:

$$E=\frac{\sigma}{۲\epsilon_۰},\Delta V=\int_۱^۲\vec{E}\cdot\vec{dr}=\frac{\sigma}{۲\epsilon_۰}\Delta r\Rightarrow$$
$$۵۰=\frac{(۰/۱\times۱۰^{-۶})\Delta r}{(۲)(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})}\Rightarrow\Delta r=۸/۸۵\times۱۰^{-۳}\ m$$

●۶- دو صفحهٔ رسانای موازی و بزرگ که ۱۲cm از هم فاصله دارند، دارای بارهایی با بزرگی یکسان و علامت مخالف روی سطحهای مقابل‌اند. نیروی الکتروستاتیکی به بزرگی $۳/۹\times۱۰^{-۱۵}$N بر الکترونی که در نقطه‌ای میان این دو صفحه قرار دارد، وارد می‌شود. (از اثر لبه‌ها چشمپوشی کنید). (الف) میدان الکتریکی را در مکان الکترون پیدا کنید. (ب) اختلاف پتانسیل میان صفحه‌ها چقدر است؟

حل: (الف)

$$F=qE\Rightarrow ۳/۹\times۱۰^{-۱۵}=(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})E\Rightarrow E=۲/۴۴\times۱۰^۴\ \frac{N}{C}$$

(ب)

$$\Delta V=\int_۱^۲Edr=E\Delta r=(۲/۴۴\times۱۰^۴)(۰/۱۲)$$
$$=۲/۹۳\times۱۰^۳\ V$$

●●۷- یک ورقهٔ نارسانای نامتناهی دارای چگالی بار سطحی $\sigma=+۵/۸۰pC/m^۲$ است. (الف) اگر ذره‌ای به بار $q=+۱/۶۰\times۱۰^{-۱۹}C$ از روی ورقه به نقطهٔ P به فاصلهٔ $d=۳/۵۶cm$ از ورقه حرکت کند، میدان الکتریکی ناشی از ورقه چقدر کار انجام داده است؟ (ب) اگر پتانسیل الکتریکی V روی ورقه صفر گرفته شود، مقدار V در نقطهٔ P چقدر است؟

حل: (الف)

$$E=\frac{\sigma}{۲\epsilon_۰}=\frac{۵/۸\times۱۰^{-۱۲}}{(۲)(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})}=۰/۳۳\ \frac{N}{C}$$
$$\Delta V=E\Delta r=(۰/۳۳)(۳/۵۶\times۱۰^{-۲})=۱/۱۷\times۱۰^{-۲}\ V$$
$$W=q\Delta V=(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۱/۱۷\times۱۰^{-۲})=۱/۸۷\times۱۰^{-۲۱}\ J$$

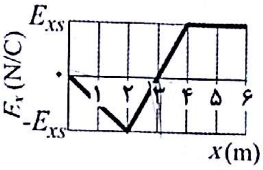
Scanned by CamScanner

از نتیجه قسمت الف استفاده می‌کنیم.

$V_P - 0 = 1/17\times 10^{-2}$ V

(ب)

●●۸- نمودار مؤلفهٔ x میدان الکتریکی برحسب تابعی از x در ناحیه‌ای از فضا، در شکل ۲۰-۳۰ نشان داده شده است. مقیاس محور قائم با $E_{xs} = 20/0$ N/C مشخص شده است در این ناحیه، مؤلفه‌های y و z میدان الکتریکی برابر صفرند. اگر پتانسیل الکتریکی در مبدأ ۱۰V باشد، (الف) پتانسیل الکتریکی در $x = 2/0$m چقدر است؟ (ب) بزرگترین مقدار مثبت پتانسیل الکتریکی برای نقطه‌هایی روی محور x در گسترهٔ $0 \le x \le 6/0$m چقدر است؟ و (پ) به ازای چه مقداری از x، پتانسیل الکتریکی برابر با صفر است؟



شکل ۲۰-۳۰ مسئلهٔ ۶

حل: با استفاده از فرمول مساحت مثلث داریم:

(الف) $V - 10 = -\int_0^{x=2} \vec{E}\cdot\vec{ds}$

$= \left(\frac{1}{2}\right)(2)(20) = 20 \Rightarrow \quad V = 30$ V

(ب) $-\int_0^{x=2} \vec{E}\cdot\vec{ds}$ برای هر ناحیه داخل $0 < x < 3$ m مثبت و برای هر ناحیه‌ای در $x > 3$ m منفی است. پس $V = V_{max}$ در $x = 3$ m رخ می‌دهد. بنابراین داریم:

$$V - 10 = -\int_0^{x=3} \vec{E}\cdot\vec{ds} = \left(\frac{1}{2}\right)(3)(20) = 30 \Rightarrow$$

$V_{max} = 40$ V

(پ) از قسمت ب دریافتیم که در $x = 3$ m، $V = V_{max} = 40$ V می‌شود. آن را به عنوان مبدا پتانسیل اختیار می‌کنیم و به دنبال x ای می‌گردیم که به ازای آن $V = 0$ می‌شود.

$$0 - 40 = -\int_{x=3}^{x} \vec{E} - \vec{ds} = -\left[\left(\frac{1}{2}\right)(1)(20) + (x-4)(20)\right] \Rightarrow$$

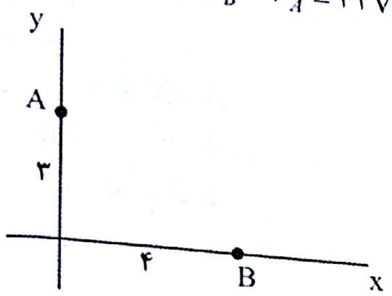
$x = 5/5$ m

عبارت داخل کروشه، به ترتیب مساحت زیر مثلث و مساحت زیر مستطیلی است که طول آن، x، موردنظر است.

●●۹- میدان الکتریکی در ناحیه‌ای از فضا دارای مؤلفه‌های $E_y = E_z = 0$ و $E_x = (4/00\,\text{N/C})x$ است. نقطهٔ A روی محور y در $y = 3/00$m، و نقطهٔ B روی محور x در $x = 4/00$m واقع‌اند. اختلاف پتانسیل $V_B - V_A$ چقدر است؟

حل: $\Delta V = V_A - V_B = -\int_{x=0}^{x=4} E_x d_x$

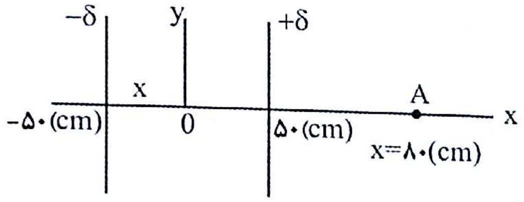
$= -\int_0^4 4x dx = -32\text{ V} \Rightarrow V_B - V_A = 32\text{V}$



●●●۱۰- دو صفحهٔ نارسانای نامتناهی و باردار یکنواخت موازی صفحهٔ yz و در مکان‌های $x = -50$cm و $x = +50$cm قرار گرفته‌اند. چگالیهای بار روی صفحه‌ها به ترتیب $-50\,\text{nC/m}^2$ و $+25\,\text{nC/m}^2$ است. بزرگی اختلاف پتانسیل میان مبدأ و نقطه‌ای روی محور x در $x = +80$ cm چقدر است؟ (*راهنمایی:* از قانون گاوس استفاده کنید.)

حل: پتانسیل در نقطه‌ای به فاصله x از صفحه نامتناهی برابر است با:

$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}x$



$$V_0 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0}x + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}x = \frac{x}{2\epsilon_0}(\sigma_1 + \sigma_2)$$

$$= \frac{(0/5)(25-50)(10^{-9})}{(2)(8/85\times 10^{-12})} = -706/2\text{V}$$

$$V_A = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0}x_1 + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}x_2 = \frac{(25\times 10^{-9})(0/3)}{(2)(8/85\times 10^{-12})}$$

$$+ \frac{(-50\times 10^{-9})(1/3)}{(2)(8/85\times 10^{-12})} = 423/7 - 3672/3$$

$$= -3248/6\text{V}$$

$$V_0 - V_A = -706/2 + 3248/6 = 2542/4\text{V}$$

●●●۱۱- روی کرهٔ نارسانایی به شعاع $R = 2/31$ cm، بار $q = +3/50$ fC به طور یکنواخت توزیع شده است. پتانسیل الکتریکی را در مرکز کره $V_0 = 0$ اختیار کنید. پتانسیل V در فاصلهٔ شعاعی (الف) $r = 1/45$ cm و (ب) $r = R$ چقدر است؟ (*راهنمایی:* بخش ۱۹-۹ را ببینید.)

حل: در مسائل فصل ۱۸ میدان درون کره را به‌دست آوریم:

(الف) $r < R \Rightarrow E = \frac{qr}{4\pi 4_0 R^3}$

$$\Delta V = V_A - V_0 = -\int_{r=0}^{r} \vec{E}\cdot\vec{dr} = -\int_{r=0}^{r} \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}dr \Rightarrow$$

Scanned by CamScanner

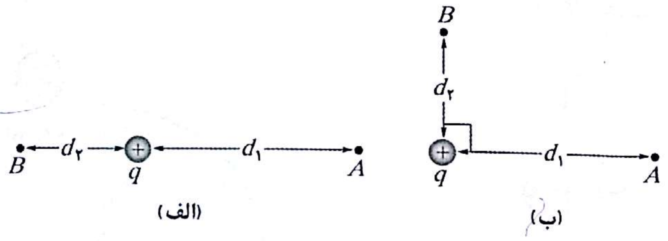
$$V_A - 0 = \frac{qr^2}{2(4\pi\varepsilon_0)R^3} = \frac{-(9\times10^9)(3.5\times10^{15})(1.45\times10^{-2})^2}{(2)(2.31\times10^{-2})^3}$$
$$= -2.69\times10^{-4}\ \text{V}$$

(ب) اگر نقطه B روی سطح کره باشد:

$$r = R \Rightarrow V_B = \frac{-q}{8\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow$$
$$V_B = \frac{-(9\times10^9)(3.5\times10^{-15})}{(2)(2.31\times10^{-2})} = -6.82\times10^{-4}\ \text{V}$$

بخش ۲۰-۷ پتانسیل ناشی از دسته‌ای بار نقطه‌ای

●۱۲- بار نقطه‌ای $q = 1.0\,\mu C$، نقطهٔ A به فاصلهٔ $d_1 = 2.0\,\text{m}$، و نقطهٔ B به فاصلهٔ $d_2 = 1.0\,\text{m}$ از q را در نظر بگیرید. (الف) اگر همان‌طور که در شکل ۲۰-۳۱ الف نشان داده شده است، A و B به طور قطری در برابر یکدیگر قرار گرفته باشند، اختلاف پتانسیل الکتریکی $V_A - V_B$ چقدر است؟ (ب) اگر A و B مطابق شکل ۲۰-۳۱ ب قرار گرفته باشند، این اختلاف پتانسیل الکتریکی چقدر است؟



شکل ۲۰-۳۱ مسئلهٔ ۱۲

حل: (الف) و (ب) چون پتانسیل کمیتی نرده‌ای است فقط مقدار و فاصله بار در آن تاثیر دارد. بنابراین در هر دو حالت، اختلاف پتانسیل یکسان است.

$$\Delta V = V_A - V_B = \frac{kq}{r_A} - \frac{kq}{r_B}$$
$$= \frac{(9\times10^9)(1\times10^{-6})}{2} - \frac{(9\times10^9)(1\times10^{-6})}{1} = 4500\ \text{V}$$

●۱۳- (الف) بار و (ب) چگالی بار روی سطح یک کرهٔ رسانا به شعاع $0.15\,\text{m}$ که پتانسیل آن $200\,\text{V}$ است ($V = 0$ در بینهایت)، چقدر است؟

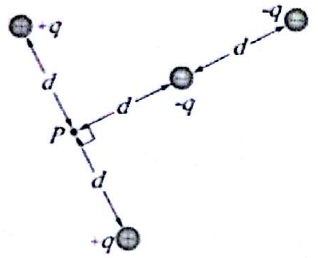
حل: (الف)
$$V = \frac{kq}{R} \Rightarrow 200 = \frac{(9\times10^9)q}{0.15}$$
$$\Rightarrow q = 3.33\times10^{-9}\ \text{C}$$

(ب)
$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2} = \frac{3.33\times10^{-9}}{4\pi(0.15)^2} = 1.18\times10^{-8}\ \text{C/m}^2$$

●۱۴- وقتی یک شاتل فضایی در گاز یونیدهٔ رقیق جو زمین حرکت می‌کند، پتانسیل آن در حین یک دور گردش نوعاً به اندازهٔ $-1.0\,\text{V}$ تغییر می‌کند. با فرض اینکه شاتل کره‌ای به شعاع $10\,\text{m}$ باشد، مقدار باری را که روی آن جمع می‌شود، تخمین بزنید.

حل:
$$V = \frac{kq}{R} \Rightarrow -1 = \frac{(9\times10^9)q}{10} \Rightarrow q = -1.11\times10^{-9}\ \text{C}$$

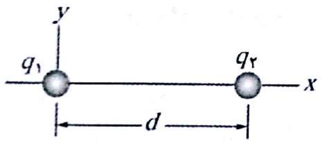
●●۱۵- در شکل ۲۰-۳۲، پتانسیل الکتریکی خالص ناشی از چهار بار در نقطهٔ P چقدر است، در صورتی که در بینهایت $V = 0$ باشد و داشته باشیم $q = 5.00\,\text{fC}$ و $d = 4.00\,\text{cm}$.



شکل ۲۰-۳۲ مسئلهٔ ۱۵

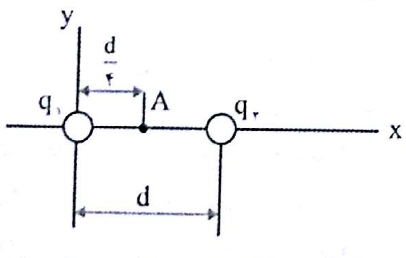
حل:
$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$
$$V = \frac{kq}{d} + \frac{kq}{d} + k\frac{-q}{d} + k\frac{-q}{2d} \Rightarrow$$
$$V = \frac{kq}{2d} = \frac{(9\times10^9)(5\times10^{-15})}{(2)(0.04)} = 5.63\times10^{-4}\ \text{V}$$

●●۱۶- در شکل ۲۰-۳۳، دو ذره به بارهای q_1 و q_2، به فاصلهٔ d از هم قرار گرفته‌اند. میدان الکتریکی خالص ناشی از این دو ذره در $x = d/4$ برابر صفر است. به ازای $V = 0$ در بینهایت، (بر حسب d) نقطه‌ای را روی محور x (غیر از بینهایت) بیابید که در آن پتانسیل الکتریکی ناشی از این دو بار صفر باشد.



شکل ۲۰-۳۳ مسئله‌های ۱۶، ۱۷ و ۹۱

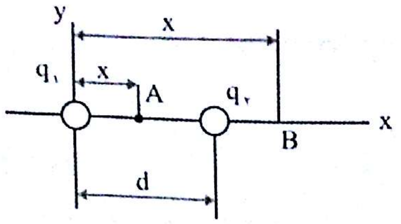
حل: چون میدان در نقطه A که بین دو بار است صفر شده است، دو بار هم علامت هستند. پس در هیچ نقطه‌ای غیر از بی‌نهایت، پتانسیل صفر نمی‌گردد.



●●۱۷- در شکل ۲۰-۳۳، ذره‌هایی با بار $q_1 = +5e$ و $q_2 = -15e$ به فاصلهٔ $d = 24.0\,\text{cm}$ از یکدیگر ثابت شده‌اند. به ازای $V = 0$ در بینهایت، مقدارهای متناهی (الف) مثبت و (ب) منفی x که در آن پتانسیل الکتریکی خالص روی محور x صفر است، کدام‌اند؟

حل: (الف) اول فرض می‌کنیم این نقطه بین دو بار است و فاصله آن از q_1 برابر x می‌باشد.

Scanned by CamScanner



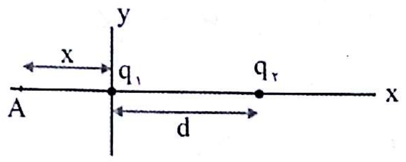
$$\frac{kq_۱}{x}+\frac{kq_۲}{d-x}=۰\Rightarrow\frac{۵}{x}+\frac{-۱۵}{۲۴-x}=۰\Rightarrow x=۶\ \text{cm}$$

حال فرض می‌کنیم این نقطه در $x>d$ باشد.

$$\frac{kq_۱}{x}+\frac{kq_۲}{x-d}=۰\Rightarrow\frac{۵}{x}+\frac{-۱۵}{x-۲۴}=۰\Rightarrow x=-۱۲\ \text{cm}$$

که قابل قبول نیست چون $x>d$ است و باید مثبت باشد.

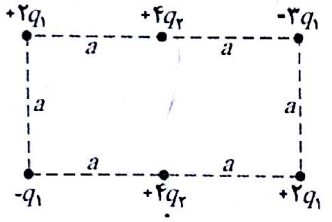
(ب) حال این نقطه را در $x<۰$ در نظر می‌گیریم.



$$\frac{kq_۱}{x}+\frac{kq_۲}{x+۵}=۰\Rightarrow$$

$$\frac{۵}{-x}+\frac{-۱۵}{x+۲۴}=۰\Rightarrow x=-۱۲\ \text{cm}$$

●●۱۸- شکل ۲۰-۳۴ آرایه‌ای مستطیلی از ذره‌های بارداری را نشان می‌دهد که در مکانهای خود، به فاصلهٔ $a=۳۹/۰\ \text{cm}$ ، ثابت شده‌اند. بارهای نشان داده شده در شکل مضربهای درستی از $q_۱=۳/۴۰\ \text{pC}$ و $q_۲=۶/۰۰\ \text{pC}$ هستند. به ازای $V=۰$ در بینهایت، پتانسیل الکتریکی خالص در مرکز مستطیل چقدر است؟ (*راهنمایی:* یک بررسی ذهنی می‌تواند از محاسبه‌ها بکاهد.)



شکل ۲۰-۳۴ مسئلهٔ ۱۸

حل: مجموع چهار بار واقع در گوشه‌های مستطیل برابر با صفر است و چون این ۴ بار به فاصله یکسانی از مرکز مستطیل قرار دارند، سهم آنها در پتانسیل الکتریکی صفر است. پس فقط سهم دوبار $+۴q_۲$ را حساب می‌کنیم.

$$V=K\frac{۴q_۲}{\frac{a}{۲}}+K\frac{۴q_۲}{\frac{a}{۲}}=K\frac{۱۶q_۲}{a}=\frac{(۹\times۱۰^{۹})(۱۶)(۶\times۱۰^{-۱۲})}{۰/۳۹}$$

$$=۲/۲۱\ \text{V}$$

●●۱۹- یک قطرهٔ کروی آب که حامل بار $۳۰\ \text{pC}$ است دارای پتانسیل $۵۰۰\ \text{V}$ (به ازای $V=۰$ در بینهایت) روی سطح خود است. (الف) شعاع قطره چقدر است؟ (ب) اگر دو قطره با همین بار و شعاع، قطرهٔ کروی واحدی را تشکیل دهند، پتانسیل روی سطح این قطرهٔ جدید چقدر است؟ **ILW SSM**

حل: الف)

$$V=\frac{kq}{R}\Rightarrow\frac{(۹\times۱۰^{۹})(۳۰\times۱۰^{-۱۲})}{۸}=۵۰۰\Rightarrow$$

$$R=۵/۴\times۱۰^{-۴}\ \text{m}$$

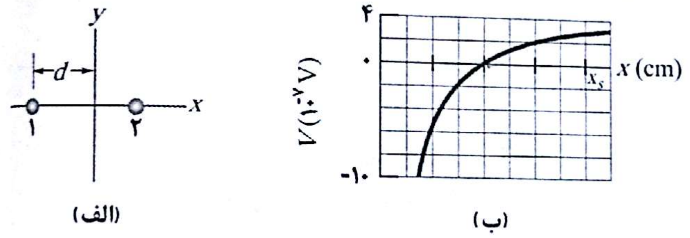
(ب) در این حالت حجم دو قطره با هم جمع می‌شود و شعاع قطره جدید R' برابر است. $q'=۲q$

$$\frac{۴}{۳}\pi R'^{۳}=(۲)\left(\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}\right)\Rightarrow R'=(۲)^{\frac{۱}{۳}}R=(۱/۲۶)(۵/۴\times۱۰^{-۴})$$

$$=۶/۸\times۱۰^{-۴}\ \text{m}$$

$$V'=\frac{kq'}{R'}=\frac{(۹\times۱۰^{۹})(۲)(۳۰\times۱۰^{-۱۲})}{۶/۸\times۱۰^{-۴}}=۷۹۴/۱\ \text{V}$$

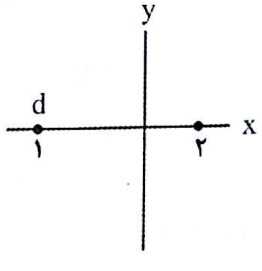
●●۲۰- دو ذرهٔ باردار در شکل ۲۰-۳۵ الف نشان داده شده‌اند. ذرهٔ ۱، با بار $q_۱$ ، در مکان خود به فاصلهٔ d از مبدأ ثابت شده است. ذرهٔ ۲، با بار $q_۲$ ، می‌تواند روی محور x حرکت کند. شکل ۲۰-۳۵ ب، پتانسیل الکتریکی خالص V ناشی از این دو ذرهٔ باردار را در مبدأ، برحسب تابعی از مختصهٔ x ذرهٔ ۲ نشان می‌دهد. مقیاس محور x با $x_s=۱۶/۰\text{cm}$ مشخص شده است. منحنی دارای مجانب $V=۵/۷۶\times۱۰^{-۷}\ \text{V}$ در $x\to\infty$ است. $q_۲$ برحسب e چقدر است؟



شکل ۲۰-۳۵ مسئلهٔ ۲۰

حل: هنگامی که $q_۲$ به بی‌نهایت می‌رود $(x\to\infty)$ پتانسیل در مبدا فقط ناشی از بار $q_۱$ است.

$$V_۱=\frac{kq_۱}{d}=۵/۷۶\times۱۰^{-۷}\ \text{V}$$



در $x=۸\ \text{cm}$ پتانسیل دوبار در مبدا صفر است. پس:

$$V_۱+V_۲=۰\Rightarrow۵/۷۶\times۱۰^{-۷}+\frac{(۹\times۱۰^{۹})q_۲}{(۰/۰۸)}=۰\Rightarrow$$

$$q_۲=-۵/۱۲\times۱۰^{-۱۸}\ \text{C}=-۳۲e$$

بخش ۲۰-۸ پتانسیل ناشی از دو قطبی الکتریکی

●۲۱- مولکول آمونیاک $NH_۳$ دارای گشتاور دو قطبی الکتریکی دائمی برابر با $۱/۴۷\text{D}$ است، که در آن $۱\ \text{D}=۳/۳۴\times۱۰^{-۳۰}\ \text{C.m}$ یکای دبای $۱\ \text{D}$ است. پتانسیل الکتریکی ناشی از یک مولکول آمونیاک را در نقطه‌ای به فاصلهٔ

Scanned by CamScanner

۵۲/۰ nm روی محور دوقطبی محاسبه کنید (در بینهایت $V=0$). ILW

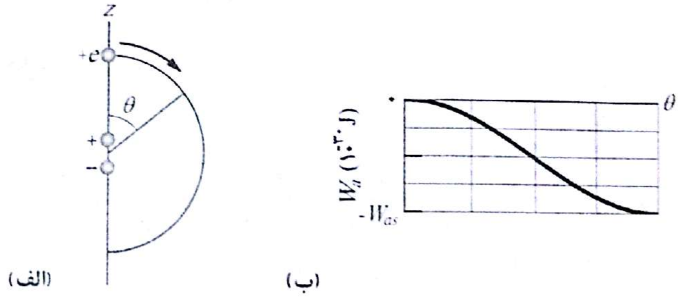
حل: پتانسیل دو قطبی در فاصله r از مرکز آن از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$V=\frac{kP\cos\theta}{r^2}$$

در نقاط روی محور $\theta=0$ است.

$$V=\frac{(9\times10^{9})(1/47)(3/34\times10^{-30})}{(52\times10^{-9})^2}=1/63\times10^{-5}\ \text{V}$$

۲۲●●- در شکل ۲۰-۳۶ الف، ذره‌ای با بار $+e$ در ابتدا در مختصهٔ $z=20\ \text{nm}$ روی محور یک دوقطبی الکتریکی و در طرف مثبت آن قرار دارد. (مبداء z در مرکز دوقطبی است.) سپس ذره روی مسیری دایره‌ای به مرکز دوقطبی حرکت می‌کند تا اینکه به مختصهٔ $z=-20\ \text{nm}$ می‌رسد. شکل ۲۰-۳۶ ب، کار W_a انجام شده توسط نیرویی که ذره را حرکت می‌دهد برحسب زاویهٔ θ که مکان ذره را مشخص می‌کند، نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $W_{as}=4/0\times10^{-30}\ \text{J}$ مشخص شده است بزرگی گشتاور دوقطبی چقدر است؟



شکل ۲۰-۳۶ مسئلهٔ ۲۲

حل: (الف)

$$V=\frac{kP\cos\theta}{r^2}$$

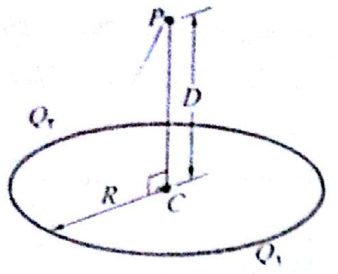
$$\theta=0\Rightarrow V_{(0)}=\frac{kP}{r^2}\quad,\quad \theta=\pi\Rightarrow V_{(\pi)}=\frac{-kP}{r^2}$$

(ب)

$$W_a=e\Delta V=\frac{2kP}{r^2}e\Rightarrow 4\times10^{-30}=\frac{(2)(9\times10^{9})(1/6\times10^{-19})P}{(20\times10^{-9})^2}\Rightarrow$$

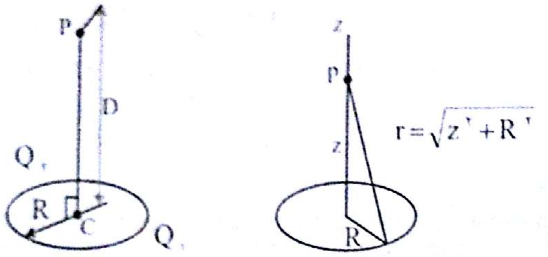
$$P=5/56\times10^{-37}\ \text{cm}$$

۲۳●- یک میلهٔ پلاستیکی به شکل دایره‌ای به شعاع $R=8/20\ \text{cm}$ درآمده است. بار $Q_1=4/20\ \text{pC}$ روی یک‌چهارم پیرامون آن و بار $Q_2=-6Q_1$ روی بقیهٔ پیرامون آن به طور یکنواخت توزیع شده است (شکل ۲۰-۳۷). به ازای $V=0$ در بینهایت، پتانسیل الکتریکی در (الف) مرکز C دایره و (ب) نقطهٔ P، که روی محور مرکزی دایره به فاصلهٔ $D=6/71\ \text{cm}$ از مرکز آن قرار دارد، چقدر است؟ SSM



شکل ۲۰-۳۷ مسئلهٔ ۲۳

حل:



$$dV=\frac{kdq}{r}=\frac{kdq}{\sqrt{z^2+R^2}}\Rightarrow V=\frac{kQ}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

در این رابطه اندازه کمان مهم نیست بلکه بار روی آن اهمیت دارد.

$$V=\frac{k(Q_1+Q_2)}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

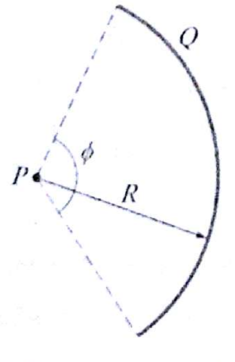
(الف)

$$z=0\Rightarrow V=\frac{(9\times10^{9})(-6+1)(4/2\times10^{-12})}{(8/2\times10^{-2})}=-2/3\ \text{V}$$

(ب)

$$z=D\Rightarrow 6/71\ \text{cm}\Rightarrow V=\frac{(9\times10^{9})(-5)(4/2\times10^{-12})}{\sqrt{(6/71)^2+(8/2)^2\times(10^{-2})}}=-1/78\ \text{V}$$

۲۴●- در شکل ۲۰-۳۸، روی میله‌ای پلاستیکی که به شکل کمانی دایره‌ای به شعاع $R=3/71\ \text{cm}$ و زاویهٔ مرکزی $\phi=120^\circ$ درآمده است، بار $Q=-25/6\ \text{pC}$ به طور یکنواخت توزیع شده است. به ازای $V=0$ در بینهایت، پتانسیل الکتریکی در نقطهٔ P، مرکز خمیدگی میله، چقدر است؟



شکل ۲۰-۳۸ مسئلهٔ ۲۴

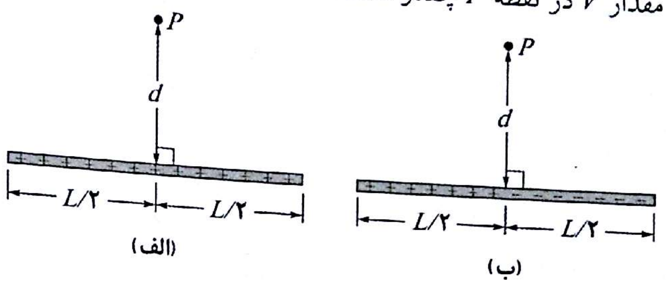
حل:

$$dV=\frac{kdq}{R}\Rightarrow V=\frac{k}{R}\int dq=\frac{kQ}{R}\Rightarrow$$

$$V=\frac{(-25/6\times10^{-12})(9\times10^{9})}{(3/71\times10^{-2})}=-6/21\ \text{V}$$

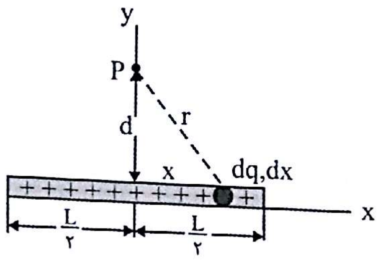
Scanned by CamScanner

۲۵●- (الف) شکل ۲۰-۳۹ الف یک میلهٔ نارسانا به طول $L=۶/۰۰cm$ و چگالی بار خطی یکنواخت $\lambda=+۳/۶۸\ pC/m$ را نشان می‌دهد. به ازای $V=۰$ در بینهایت، پتانسیل V در نقطهٔ P به فاصلهٔ $d=۸/۰۰cm$ روی عمود منصف میله چقدر است؟ (ب) شکل ۲۰-۳۹ ب میلهٔ مشابهی را نشان می‌دهد، با این تفاوت که حالا یک نیمهٔ آن به طور منفی باردار شده است. هر دو نیمه دارای چگالی بار خطی به بزرگی ۳/۶۸ pC/m هستند. به ازای $V=۰$ در بینهایت، مقدار V در نقطهٔ P چقدر است؟



شکل ۲۰-۳۹ مسئلهٔ ۲۵

حل: (الف)



$$dq=\lambda dx$$

$$dV=\frac{kdq}{r}=\frac{k\lambda dx}{\sqrt{x^۲+d^۲}}$$

$$V=K\lambda ۲\int_{x=۰}^{x=L/۲}\frac{dx}{\sqrt{x^۲+d^۲}}=۲k\lambda\left[\ln(x+(x^۲+d^۲)^{۱/۲}\right]_۰^{L/۲}\Rightarrow$$

$$V=۲k\lambda\ln\left[\frac{\frac{L}{۲}+\left(\frac{L^۲}{۴}+d^۲\right)^{۱/۲}}{d}\right]\Rightarrow$$

$$V=(۲)(۹\times۱۰^۹)(۳/۶۸\times۱۰^{-۱۲})$$

$$\ln\left[\frac{(۰/۰۳)+\sqrt{۹\times۱۰^{-۴}+۶۴\times۱۰^{-۴}}}{(۰/۰۸)}\right]=۲/۴۳\times۱۰^{-۲}\ V$$

(ب) دو قسمت کاملاً مشابه هستند ولی علامت آنها مخالف هم است پس حاصل صفر است.
$V=۰$

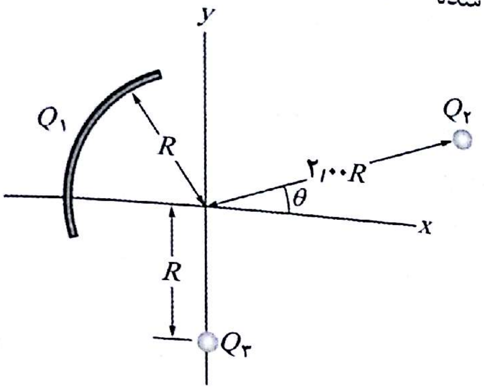
۲۶●- در مرکز یک کرهٔ گاوسی به شعاع ۴/۰۰cm ، گویی به شعاع ۱/۰۰cm با توزیع بار یکنواخت قرار دارد. شار الکتریکی کل (خالص) عبوری از سطح این کرهٔ گاوسی برابر با $+۵/۶۰\times۱۰^۴\ N.m^۲/C$ است. پتانسیل الکتریکی در فاصلهٔ ۱۲/۰cm از مرکز گوی چقدر است؟

حل:

$$q=\varepsilon_۰\Phi=(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۵/۶\times۱۰^۴)=۴/۹۶\times۱۰^{-۷}\ C$$

$$V=\frac{kq}{r}=\frac{(۹\times۱۰^۹)(۴/۹۶\times۱۰^{-۷})}{(۰/۱۲)}=۴/۹۶\times۱۰^{-۷}\ C$$

۲۷●●- در شکل ۲۰-۴۰، پتانسیل الکتریکی خالص ناشی از کمان دایره‌ای با بار $Q_۱=+۷/۲۱pC$ و دو ذره با بارهای $Q_۲=۴/۰۰Q_۱$ و $Q_۳=-۲/۰۰Q_۱$ در مبدأ چقدر است؟ مرکز خمیدگی کمان در مبدأ و شعاع آن $R=۲/۰۰\ m$ است؛ زاویهٔ نشان داده شده $\theta=۲۰/۰°$ است.



شکل ۲۰-۴۰ مسئلهٔ ۲۷

حل: طبق مسئله ۲۴ پتانسیل کمان از رابطه زیر به دست می‌آید:

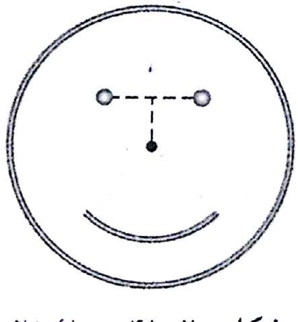
$$V=\frac{kQ_۱}{R}$$

$$V=V_۱+V_۲+V_۳=\frac{kQ_۱}{R}+\frac{k\varepsilon Q_۱}{۲R}+\frac{k(-۲)Q_۱}{R}=\frac{kQ_۱}{R}\Rightarrow$$

$$V=\frac{(۹\times۱۰^۹)(۷/۲۱\times۱۰^{-۱۲})}{۲}=۳/۲۴\times۱۰^{-۲}\ V$$

۲۸●●●- صورت خندان شکل ۲۰-۴۱ از سه بخش تشکیل شده است:

۱. یک میلهٔ باریک با بار $-۳/۰\mu C$ که دایره‌ای کامل به شعاع ۶/۰cm را تشکیل می‌دهد.



شکل ۲۰-۴۱ مسئلهٔ ۲۸

میلهٔ باریک دوم با بار $۲/۰\mu C$ که کمانی دایره‌ای به شعاع ۴/۰cm را با زاویهٔ ۹۰° حول مرکز دایرهٔ کامل تشکیل می‌دهد؛

۳. یک دوقطبی الکتریکی با گشتاوری که عمود بر خط شعاعی و دارای بزرگی $۱/۲۸\times۱۰^{-۲۱}C.m$ است.

پتانسیل الکتریکی خالص در مرکز چقدر است؟

حل: $V_۱=\frac{kQ_۱}{R_۱}=\frac{(۹\times۱۰^۹)(-۳\times۱۰^{-۶})}{۰/۰۶}=-۴/۵\times۱۰^۵\ V$

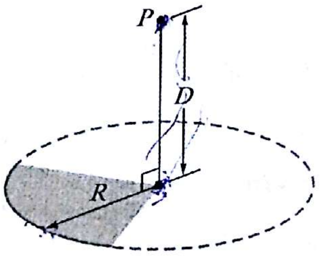
Scanned by CamScanner

$$V_1 = \frac{kQ_1}{R_1} = \frac{(9\times10^9)(2\times10^{-6})}{0/04} = -4/5\times10^5 \text{ V}$$

پتانسیل دو قطبی از رابطه $V = \frac{kP\cos\theta}{2}$ به دست می‌آید که در تمام نقاط روی عمود منصف آن چون $\theta = 90^\circ$ است، صفر می‌باشد.

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 0$$

۲۹●●- یک طرف قرصی پلاستیکی به شعاع $R = 64/0$ cm با چگالی بار سطحی یکنواخت $\sigma = 7/73$ fC/m^2 باردار شده و سپس سه ربع آن برداشته می‌شود. ربع قرص به جای مانده در شکل ۲۰-۴۲ نشان داده شده است. به ازای $V = 0$ در بینهایت، پتانسیل ناشی از ربع به جای مانده در نقطهٔ P، واقع بر محور مرکزی قرص اصلی و به فاصلهٔ $D = 25/9$ cm از مرکز آن، چقدر است؟ WWW SSM



شکل ۲۰-۴۲ مسئلهٔ ۲۹

حل: پتانسیل ناشی از یک قرص باردار در نقطه‌ای روی محور آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

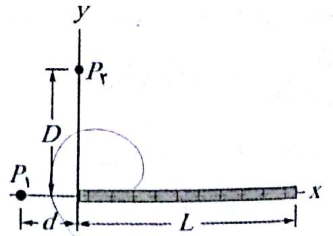
$$V_D = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{z^2 + R^2} - z\right]$$

چون پتانسیل کمیتی نرده‌ای است، اگر قرص را به N قطعه هم شکل تقسیم نماییم پتانسیل هر کدام برابر با $\frac{V_D}{N}$ است.

$$V = \frac{V_D}{4} = \frac{\sigma}{8\varepsilon_0}\left[\sqrt{z^2 + R^2} - z\right] \Rightarrow$$

$$V = \frac{(7/73\times10^{-15})}{(8)(8/85\times10^{-12})}\left[\sqrt{(25/9)^2 + (64)^2} - 25/9\right]\times10^{-2}$$
$$= 4/71\times10^{-5} \text{ V}$$

۳۰●●- شکل ۲۰-۴۳ میله‌ای پلاستیکی به طول $L = 12/0$ cm و بار مثبت یکنواخت $Q = 56/1$ fC را نشان می‌دهد که روی محور x قرار دارد. به ازای $V = 0$ در بینهایت، پتانسیل الکتریکی را در نقطهٔ P_1 روی این محور و به فاصلهٔ $d = 2/50$ cm از یک سر میله پیدا کنید.



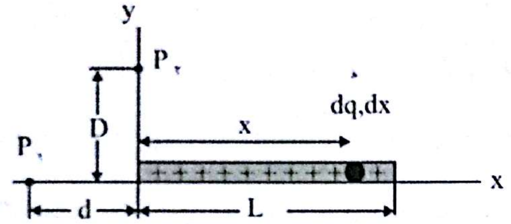
شکل ۲۰-۴۳ مسئله‌های ۳۰، ۳۳، ۳۸ و ۴۰

حل: میله را به قسمت‌های کوچک تقسیم می‌کنیم.

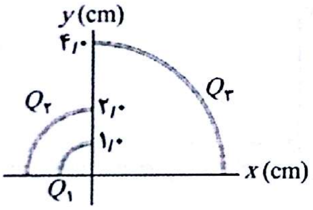
$$dV = \frac{kdq}{x+d} = \frac{k\lambda dx}{x+d}$$

$$V = k\lambda\int_{x=0}^{x=L}\frac{dx}{x+d} = k\lambda\ln\frac{L+d}{d} = \frac{kQ}{L}\ln\frac{L+d}{d} \Rightarrow$$

$$V = \frac{(9\times10^9)(56/1\times10^{-15})}{0/12}\ln\left[\frac{12+2/5}{2/5}\right] = 7/4\times10^{-3} \text{ V}$$



۳۱●●- در شکل ۲۰-۴۴، سه میلهٔ پلاستیکی باریک، ربع دایره‌هایی را تشکیل می‌دهند که مرکز مشترک خمیدگی آنها در مبدأ قرار دارد. بارهای یکنواخت روی میله‌ها عبارت‌اند از $Q_1 = +30$ nC ، $Q_2 = 3/0$ nC، و $Q_3 = -8/0\,Q_1$. پتانسیل الکتریکی خالص ناشی از میله‌ها در مبدأ چقدر است؟



شکل ۲۰-۴۴ مسئلهٔ ۳۱

حل:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 =$$
$$\frac{kQ_1}{R_1} + \frac{kQ_2}{R_2} + \frac{kQ_3}{R_3} \Rightarrow$$
$$V = \frac{kQ_1}{R_1} + \frac{kQ_1}{2R_1} - \frac{8kQ_1}{4R_1} = \frac{-kQ_1}{2R_1} \Rightarrow$$
$$V = \frac{-(9\times10^9)(3\times10^{-9})}{2(0/01)} = 1350 \text{ V}$$

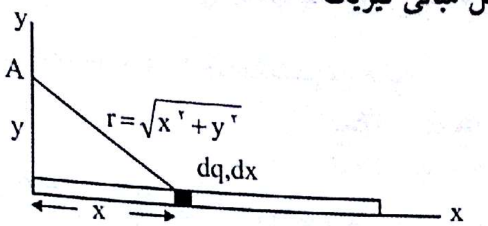
۳۲●●●- توزیع بار خطی نایکنواختی که با $\lambda = bx$ داده می‌شود و در آن b ثابت است، روی محور x از $x = 0$ تا $x = 0/20$ m قرار دارد. اگر $b = 20$ nC/m^2 و در بینهایت $V = 0$ باشد، پتانسیل الکتریکی در (الف) مبدأ و (ب) نقطهٔ $y = 0/15$ m روی محور y چقدر است؟

حل:

(الف)

$$dq = \lambda dx = bx\,dx$$
$$dV = \frac{kdq}{x} = kbdx$$
$$V = kb\int_{x=0}^{x=L}dx = kbL = (9\times10^9)(20\times10^{-9})(0/2) = 36 \text{ V}$$

Scanned by CamScanner



(ب)

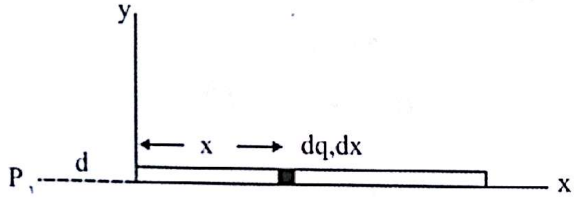
$$dV=\frac{kdq}{r}=\frac{kbx\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow V=kb\int_{x=0}^{x=L}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow$$

$$V=kb\left[\sqrt{x^2+y^2}\right]_0^L=kb\left[\sqrt{L^2+y^2}-y\right]\Rightarrow$$

$$V=(9\times10^9)(20\times10^{-9})\left[\sqrt{(0.2)^2+(0.15)^2}-(0.15)\right]=18\ \text{V}$$

●●●۳۳- میلهٔ پلاستیکی باریک نشان داده شده در شکل ۲۰-۴۳ دارای طول $L=12.0\ \text{cm}$ و چگالی بار خطی نایکنواخت $\lambda=cx$ است که در آن $c=28.9\ \text{pC/m}^2$ است. به ازای $V=0$ در بینهایت، پتانسیل الکتریکی را در نقطهٔ P_1 روی محور و به فاصلهٔ $d=3.00\text{cm}$ از یک سر آن پیدا کنید.

حل:



$$dV=\frac{kdq}{x+d}=\frac{k\lambda\,dx}{x+d}=\frac{kcx\,dx}{x+d}$$

$$V=kc\int_{x=0}^{L}\frac{(x+d-d)dx}{x+d}\Rightarrow$$

$$V=kc\left[\int_{x=0}^{x=L}dx-d\int_{x=0}^{x=L}\frac{dx}{x+d}\right]=kc\left[L-d\ln\frac{L+d}{d}\right]\Rightarrow$$

$$V=(9\times10^9)(28.9\times10^{-12})\left[(0.12)-(0.03)\ln\left(\frac{0.12+0.03}{0.03}\right)\right]=1.87\times10^{-2}\ \text{V}$$

بخش ۲۰-۱۰ محاسبهٔ میدان از روی پتانسیل

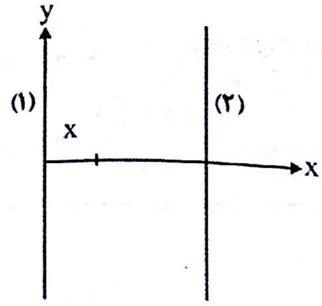
●۳۴- پتانسیل الکتریکی V در فضای میان دو صفحهٔ موازی تخت ۱ و ۲ با $V=1500\,x^2$ (برحسب ولت) داده شده است، که در آن x (برحسب متر) فاصلهٔ عمودی از صفحهٔ ۱ است. در $x=1.3\text{cm}$ ، (الف) بزرگی میدان الکتریکی چقدر است؟ و (ب) آیا این میدان به طرف صفحهٔ ۱ است یا از آن دور می‌شود؟

حل: (الف)

$$E_x=\frac{-\partial V}{\partial x}=-3000x$$

$$E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}=0$$

$$\vec{E}=-3000x\,\hat{i}\Rightarrow E=(3000)(1.3\times10^{-2})=39\ \text{V/m}$$



(ب) جهت میدان در خلاف محور x و به طرف صفحه (۱) می‌باشد.

●۳۵- پتانسیل الکتریکی در نقطه‌های واقع بر صفحهٔ xy با $V=(2.0\ \text{V/m}^2)x^2-(3.0\ \text{V/m}^2)y^2$ داده شده است. برحسب نمادگذاری بردار یکه، میدان الکتریکی در نقطهٔ $(3.0\text{m},2.0\text{m})$ چگونه است؟

حل:

$$V=2x^2-3y^2$$

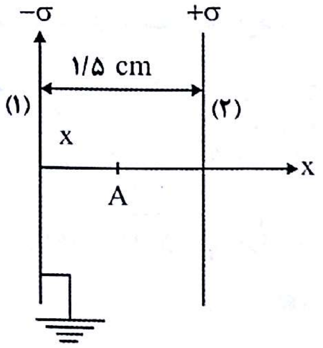
$$E_x=\frac{-\partial V}{\partial x}=-4x\ ,\ E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}=6y$$

$$E=-4x\hat{i}+6y\hat{j}\ \text{V/m}\Rightarrow\vec{E}=(-4)(3)\hat{i}+(6)(2)\hat{j}\ \text{V/m}$$

$$=-12\hat{i}+12\hat{j}\ \text{V/m}$$

●۳۶- دو صفحهٔ فلزی موازی بزرگ که به فاصلهٔ ۱/۵ cm از یکدیگر واقع‌اند، دارای بارهایی با بزرگیهای یکسان ولی علامتهای مخالف روی سطحهای مقابل‌اند. پتانسیل صفحهٔ منفی را صفر اختیار کنید. اگر پتانسیل در میانهٔ این صفحه‌ها $+5.0\text{V}$ باشد، میدان الکتریکی در ناحیهٔ میان صفحه‌ها چقدر است؟

حل:



میدان میان دو صفحه یکنواخت است و پتانسیل از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$V=Ex$$

x فاصله از صفحه (۱) است.

$$x_A=\frac{1.5}{2}=0.75\ \text{cm}=7.5\times10^{-3}\ \text{m}$$

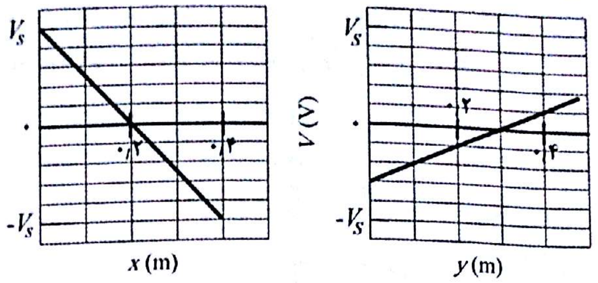
میدان از صفحه پشت به سمت صفحه منفی است.

$$E=\frac{V}{x}=\frac{5}{7.5\times10^{-3}}=666.7\ \text{V/m}$$

●●۳۷- الکترونی در صفحهٔ xy قرار دارد که در آنجا پتانسیل الکتریکی همان‌طور که در شکل ۲۰-۴۵ نشان داده شده است به x و y بستگی دارد (پتانسیل به z بستگی ندارد). مقیاس محور

Scanned by CamScanner

قائم $V_s = ۵۰۰V$ مشخص شده است. برحسب بردار یکه، نیروی الکتریکی وارد بر الکترون چگونه است؟



شکل ۲۰-۴۵ مسئلهٔ ۳۷

حل: E_x منفی شیب نمودار V برحسب x و E_y منفی شیب نمودار V برحسب y می‌باشد.

$$E_x = -\frac{-۵۰۰-۵۰۰}{۰/۴-۰} = ۲۵۰۰\,\text{V/m}$$

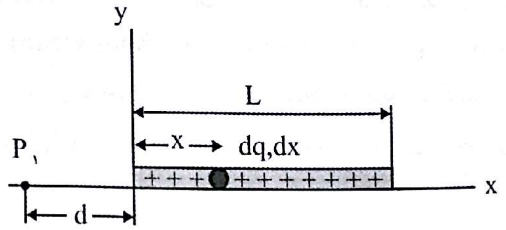
$$E_y = -\frac{۰-(-۳۰۰)}{۰/۳-۰} = -۱۰۰۰\,\text{V/m}$$

$$\vec{E} = ۲۵۰۰\hat{i} - ۱۰۰۰\hat{j}\ \text{V/m}$$

$$\vec{F} = e\vec{E} = (-۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۲۵۰۰\hat{i}-۱۰۰۰\hat{j})$$
$$= (-۴\times۱۰^{-۱۶}\,\hat{i} + ۱/۶\times۱۰^{-۱۶}\,\hat{j})\ \text{N}$$

●●۳۸- شکل ۲۰-۴۳ یک میلهٔ پلاستیکی باریک به طول $L = ۱۳/۵\,\text{cm}$ و بار یکنواخت $۴۳/۶\ \text{fC}$ را نشان می‌دهد. (الف) رابطه‌ای برای پتانسیل الکتریکی در نقطهٔ $P_۱$ برحسب فاصلهٔ d، بیابید. (ب) سپس، متغیر x را به جای d قرار دهید و از آنجا رابطه‌ای را برای بزرگی مؤلفهٔ E_x میدان الکتریکی در $P_۱$ پیدا کنید. (پ) جهت E_x نسبت به جهت مثبت محور x چگونه است؟ (ت) مقدار E_x در $P_۱$ به ازای $x = d = ۶/۲۰\,\text{cm}$ چقدر است؟ (ث) از روی تقارن شکل ۲۰-۴۳، E_y را در $P_۱$ تعیین کنید.

حل: **(الف)** میله را به قسمت‌های کوچک تقسیم می‌کنیم.



$$dV = \frac{kdq}{d+x} = \frac{k\lambda dx}{d+x}$$

$$V = \int dV = k\lambda\int_{x=۰}^{x=L}\frac{dx}{d+x} = k\lambda\ln\frac{d+L}{d}$$

$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{۴۳/۶\times۱۰^{-۱۵}}{۰/۱۳۵} = ۳/۲۳\times۱۰^{-۱۳}\ \text{C/m}$$

$$V = (۹\times۱۰^{۹})(۳/۲۳\times۱۰^{-۱۳})\ln\frac{d+۰/۱۳۵}{d}$$
$$= ۲/۹۱\times۱۰^{-۳}\ln\frac{d+۰/۱۳۵}{d}\ \text{V}$$

(ب)

$$V_x = ۲/۹۱\times۱۰^{-۳}\ln\frac{x+۰/۱۳۵}{x} \Rightarrow$$

$$E = -\frac{dV}{dx} = -۲/۹۱\times۱۰^{-۳}\,\frac{\frac{x-۰/۱۳۵}{x^۲}}{\frac{x+۰/۱۳۵}{x}} = \frac{۳/۹۳\times۱۰^{-۴}}{x(x+۰/۱۳۵)}\ \text{V/m}$$

(پ) چون E_x مثبت است، جهت میدان الکتریکی به طرف قسمت مثبت محور x می‌باشد.

(ت)

$$E_x = \frac{۳/۹۳\times۱۰^{-۴}}{(۰/۰۶۲)(۰/۰۶۲+۰/۱۳۵)} = ۳/۲۲\times۱۰^{-۲}\ \text{V/m}$$

(ث) چون توزیع بار در راستای محور x است و نقطه $P_۱$ نیز روی این محور قرار دارد، E_y صفر است.

●●۳۹- اگر پتانسیل الکتریکی با $V = ۲/۰۰xyz^۲$ داده شده باشد، که در آن V برحسب ولت و x، y و z برحسب مترند، بزرگی میدان الکتریکی در نقطهٔ $(۳/۰۰\hat{i} - ۲/۰۰\hat{j} + ۴/۰۰\hat{k})\text{m}$ چقدر است؟ SSM

حل:

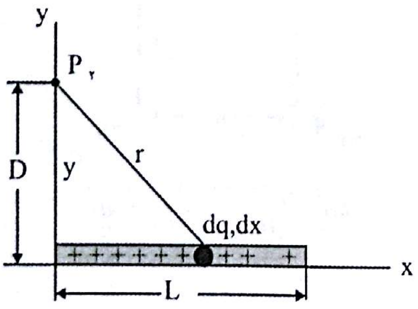
$$V = ۲xyz^۲ \Rightarrow E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -۲yz^۲\ ,\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -۲xz^۲$$
$$,\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -۴xyz$$
$$\vec{E} = -۲yz^۲\hat{i} - ۲xz\hat{j} - ۴xyz\hat{k}$$

در نقطه $(۳,-۲,۴)$ میدان برابر است با:

$$\vec{E} = (-۲)(-۲)(۴)^۲\hat{i} + (-۲)(۳)(۴)^۲\hat{j} + (۴)(۳)(-۲)(۴)\hat{k} \Rightarrow$$
$$\vec{E} = (۶۴\hat{i} - ۹۶\hat{j} + ۹۶\hat{k})\ \text{V/m}$$
$$E = \sqrt{(۶۴)^۲ + (-۹۶)^۲ + (۹۶)^۲} = ۱۵۰/۱\ \text{V/m}$$

●●●۴۰- میلهٔ پلاستیکی باریک به طول $L = ۱۰/۰\,\text{cm}$ در شکل ۲۰-۴۳، دارای چگالی بار خطی نایکنواخت $\lambda = cx$ است که در آن $c = ۴۹/۹\ \text{pC/m}$. (الف) به ازای $V = ۰$ در بینهایت، پتانسیل الکتریکی را در نقطهٔ $P_۲$ روی محور y واقع در $y = D = ۳/۵۶\,\text{cm}$ بیابید. (ب) مؤلفهٔ E_y میدان الکتریکی را در $P_۲$ به دست آورید. (پ) چرا مؤلفهٔ E_x میدان در $P_۲$ را نمی‌توان با استفاده از نتیجهٔ (الف) به دست آورد؟

حل: (الف)



$$\lambda = cx \Rightarrow dq = \lambda dx = cxdx$$

$$dV = \frac{kdq}{r} = \frac{kcxdx}{\sqrt{x^۲+y^۲}}$$

$$V = kc\int_{x=۰}^{x=L}\frac{xdx}{\sqrt{x^۲+y^۲}} = kc\left[\sqrt{x^۲+y^۲}\right]_۰^L = kc\left(\sqrt{L^۲+y^۲} - y\right)$$

Scanned by CamScanner

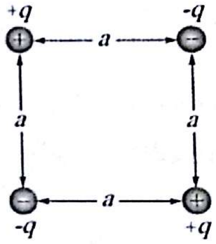
(ب)
$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -kc\left[\frac{y}{\sqrt{L^۲+y^۲}}-۱\right] \Rightarrow$$
$$E_y = -(۹\times ۱۰^۹)(۴۹/۹\times ۱۰^{-۱۲})\left[\frac{۳/۵۶}{\sqrt{۱۰۰+(۳/۵۶)^۲}}-۱\right]$$
$$= ۰/۲۹۷\ V/m$$

(پ) ما پتانسیل را محور شخصی (محور y) به دست آوریم و چون برروی این محور، $x=۰$ است نمی‌توانیم از تغییرات x صحبت کنیم. چون x در پتانسیل ظاهر نمی‌شود و نمی‌توان با مشتق‌گیری E_x را به دست آورد. به همان ترتیب اگر پتانسیل را روی محور x به دست می‌آوریم، مؤلفه E_y را نمی‌توانیم به دست آوریم. برای آنکه $E_x(x,y)$ و یا $E_y(x,y)$ را به دست آوریم باید پتانسیل، $V(x,y)$، را برای نقطه دلخواهی واقع در (x,y) به دست آوریم و آنگاه با استفاده از روابط زیر E_x و E_y را محاسبه کنیم.

$$E_x(x,y) = -\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}\ ,\ E_y(x,y) = -\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}$$

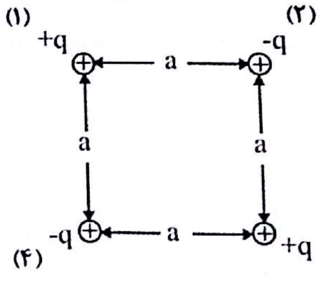
بخش ۲۰-۱۱ انرژی پتانسیل الکتریکی دستگاهی از بارهای نقطه‌ای

●۴۱- برای برقراری آرایش شکل ۲۰-۴۶ چقدر کار لازم است، در صورتی که $q=۲/۳۰\ pC$ ، $a=۶۴/۰\ cm$ ، و ذره‌ها در ابتدا در فاصلهٔ نامتناهی قرار داشته و ساکن باشند. SSM ILW WWW



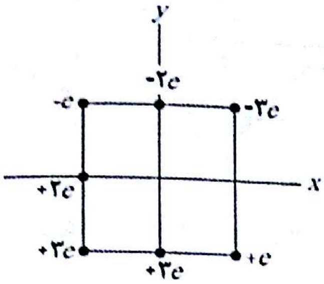
شکل ۲۰-۴۶ مسئلهٔ ۴۱

حل:



$$W_۱ = ۰\ ,\ W_۲ = \frac{-kq^۲}{a}\ ,\ W_۳ = \frac{-kq^۲}{a} + \frac{kq^۲}{\sqrt{۲}a}$$
$$W_۴ = \frac{-kq^۲}{a} - \frac{kq^۲}{a} + \frac{kq^۲}{\sqrt{۲}a}$$
$$W_{total} = \frac{kq^۲}{a}\left[۰-۱-۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}}-۱-۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right] = \frac{۲kq^۲}{a}\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}-۲\right) \Rightarrow$$
$$W_{toltal} = \frac{(۲)(۹\times ۱۰^۹)(۲/۳\times ۱۰^{-۱۲})^۲}{(۰/۶۴)}\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}-۲\right) = -۱/۹۲\times ۱۰^{-۱۳}\ J$$

●۴۲- در شکل ۲۰-۴۷، هفت ذرهٔ باردار برای تشکیل مربعی به ضلع ۴/۰cm در مکانهای خود قرار گرفته‌اند. چقدر کار باید انجام دهیم تا ذره‌ای با بار $+۶e$ را که در ابتدا ساکن است از فاصلهٔ نامتناهی به مرکز مربع بیاوریم؟

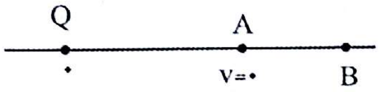


شکل ۲۰-۴۷ مسئلهٔ ۴۲

حل:
$$V = V_۱+V_۲+V_۳+V_۴+V_۵+V_۶+V_۷ \Rightarrow$$
$$V = k\frac{۳e}{\frac{a}{۲}} = \frac{۶ke}{a}$$
$$W = Vq = \left(\frac{۶ke}{a}\right)(۶e) = \frac{۳۶ke^۲}{a} \Rightarrow$$
$$W = \frac{(۳۶)(۹\times ۱۰^۹)(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})^۲}{(۰/۰۴)} = ۲/۰۷\times ۱۰^{-۲۵}\ J$$

●۴۳- ذره‌ای با بار $+۷/۵\mu C$ از حالت سکون در نقطهٔ $x=۶۰\ cm$ روی محور x، رها شده است. این ذره تحت تأثیر بار Q که در مبدأ ثابت شده است، شروع به حرکت می‌کند. انرژی جنبشی ذره در صورتی که (الف) $Q=+۲۰\mu C$ و (ب) $Q=-۲۰\mu C$ باشد، در لحظه‌ای که به اندازهٔ ۴۰cm حرکت کرده است چقدر است؟

حل:



(الف) مقدار اولیه r برابر ۰/۶ m و مقدار نهایی آن برابر $(۰/۶\ m + ۰/۴\ m) = ۱\ m$ است. (مقادیر از آنرو با هم جمع شده‌اند که بارها هم علاقمند و یکدیگر را دفع می‌کنند).
پایستگی انرژی را به کار می‌بریم. چون انرژی جنبشی اولیه صفر است داریم:

$$U_i = K_f + U_f$$
$$K_f = U_۱ - U_f = kqQ\left(\frac{۱}{r_i}-\frac{۱}{r_f}\right) \Rightarrow$$
$$K_f = (۹\times ۱۰^۹)(۷/۵\times ۱۰^{-۶})(۲۰\times ۱۰^{-۶})\left(\frac{۱}{۰/۶}-\frac{۱}{۱}\right) = ۰/۹\ J$$

(ب) این بار علامت بارها مخالف است و تعداد نهایی r برابر است با:

$$r_f = ۰/۶ - ۰/۴ = ۰/۲\ m$$

Scanned by CamScanner

$$K_f = kQq\left(\frac{۱}{r_i}-\frac{۱}{r_f}\right)$$

$$=(۹\times۱۰^{۹})(۷/۵\times۱۰^{-۶})(۲۰\times۱۰^{-۶})\left(\frac{۱}{۰/۶}-\frac{۱}{۱}\right)=۴/۵\ \text{J}$$

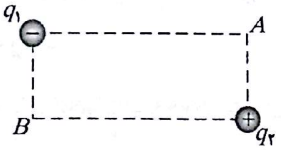
●۴۴- (الف) انرژی پتانسیل الکتریکی دو الکترون به فاصلهٔ $۲/۰۰\text{nm}$ چقدر است؟ (ب) اگر این فاصله افزایش یابد، آیا انرژی پتانسیل افزایش می‌یابد یا کاهش؟

حل: (الف)

$$U = k\frac{e^{۲}}{r}=\frac{(۹\times۱۰^{۹})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})^{۲}}{(۲\times۱۰^{-۹})}=۱/۱۵۲\times۱۰^{-۱۹}\ \text{J}$$

(ب) $U>۰$ و $U\alpha\frac{۱}{r}$، پس انرژی پتانسیل U با افزایش r، کاهش می‌یابد.

●●۴۵- در مستطیل شکل ۲۰-۴۸، ضلعها $۵/۰\text{cm}$ و $۱۵\ \text{cm}$، $q_۱=-۵/۰\ \mu\text{C}$ ، و $q_۲=+۲/۰\ \mu\text{C}$ است. به ازای $V=۰$ در بینهایت، پتانسیل الکتریکی در (الف) گوشهٔ A و (ب) گوشهٔ B چقدر است؟ (پ) چقدر کار باید انجام گیرد تا بار $q_۳=+۳/۰\ \mu\text{C}$ در امتداد قطر مستطیل از B به A حرکت داده شود؟ (ت) آیا این کار، انرژی پتانسیل الکتریکی دستگاه سه بار را افزایش می‌دهد یا کاهش؟ اگر $q_۳$ در امتداد مسیری (ث) داخل مستطیل ولی نه روی قطر و (ج) بیرون مستطیل حرکت داده شود، آیا کار بیشتری لازم است یا کمتر یا مساوی آن؟



شکل ۲۰-۴۸ مسئلهٔ ۴۵

حل: (الف)

$$V_A = V_۱+V_۲ = k\frac{q_۱}{a}+k\frac{q_۲}{b}\Rightarrow$$

$$V_A=\frac{(۹\times۱۰^{۹})(-۵\times۱۰^{-۶})}{۰/۱۵}+\frac{(۹\times۱۰^{۹})(۲\times۱۰^{-۶})}{۰/۰۵}=۶\times۱۰^{۴}\ \text{V}$$

(ب)

$$V_B = k\frac{q_۱}{b}+k\frac{q_۲}{a}=\frac{(۹\times۱۰^{۹})(-۵\times۱۰^{-۶})}{۰/۰۵}+\frac{(۹\times۱۰^{۹})(۲\times۱۰^{-۶})}{۰/۱۵}$$
$$=-۷/۸\times۱۰^{۵}\ \text{V}$$

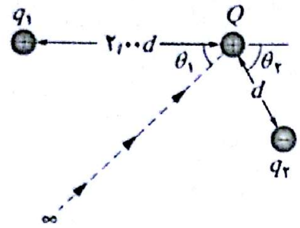
(پ)

$$\Delta V = V_A - V_B = ۶\times۱۰^{۴}+۷/۸\times۱۰^{۵}=۸/۴\times۱۰^{۵}\ \text{V}$$
$$W = q_۳\Delta V = (۳\times۱۰^{-۶})(۸/۴\times۱۰^{۵}) = ۲/۵۲\text{J}$$

(ت) چون کار مثبت است، برای این انتقال کار نیروی خارجی مثبت است. این انرژی در دستگاه بارها به صورت انرژی پتانسیل ذخیره می‌شود و انرژی پتانسیل الکتریکی دستگاه سه بار افزایش می‌یابد.

(ث) و (ج) چون نیرو پایستار است، کار آن مستقل از مسیر انجام کار می‌باشد. پس درهر دو مورد کار یکسان است.

●●۴۶- در شکل ۲۰-۴۹، چقدر کار باید انجام گیرد تا ذره‌ای با بار $Q=+۱۶e$ که در ابتدا ساکن است، در امتداد خطچین از بینهایت به نقطهٔ مشخص شده در نزدیکی دو بار ثابت شدهٔ $q_۱=+۴e$ و $q_۲=-q_۱/۲$ آورده شود؟ فاصله $d=۱/۴۰\text{cm}$ ، $\theta_۱=۴۳^\circ$ و $\theta_۲=۶۰^\circ$ است.



شکل ۲۰-۴۹ مسئلهٔ ۴۶

حل: کار انجام شده مستقل از مسیر است و بنابراین داریم:

$$W=(V_۱+V_۲)Q=k\left[\frac{q_۱}{۲d}+\frac{q_۲}{d}\right]Q=k\left[\frac{q_۱}{۲d}+\frac{-\left(\frac{q_۱}{۲}\right)}{d}\right]Q=۰$$

●●۴۷- ذره‌ای با بار q در نقطهٔ P ثابت شده، و ذرهٔ دومی به جرم m و با همان بار q در ابتدا به فاصلهٔ $r_۱$ از P نگهداشته شده است. سپس ذرهٔ دوم رها می‌شود. تندی آن را هنگامی که به فاصلهٔ $r_۲$ از P است، تعیین کنید. $q=۳/۱\ \mu\text{C}$ ، $m=۲۰\ \text{mg}$ ، $r_۱=۰/۹۰\ \text{mm}$ ، و $r_۲=۲/۵\ \text{mm}$. ILW

حل:

ابتدا اختلاف انرژی مجموعه را در این دو حالت به دست می‌آوریم.

$$\Delta U = k\frac{q^{۲}}{r_۲}-k\frac{q^{۲}}{r_۱}=kq^{۲}\left(\frac{۱}{r_۲}-\frac{۱}{r_۱}\right)\Rightarrow$$

$$\Delta U=(۹\times۱۰^{۹})(۳/۱\times۱۰^{-۶})^{۲}\left(\frac{۱}{۲/۵\times۱۰^{-۳}}-\frac{۱}{۰/۹\times۱۰^{-۳}}\right)$$
$$=-۶۱/۵\ \text{J}$$

چون هیچ نیرویی از خارج سیستم دو ذره به آن وارد نمی‌شود، انرژی مکانیکی در طول حرکت ثابت می‌ماند.

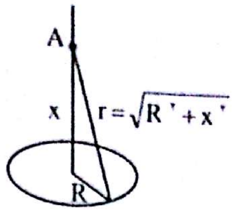
$$\Delta K = -\Delta U = ۶۱/۵\ \text{J}$$

$$\Delta K = \frac{۱}{۲}mv^{۲}\Rightarrow ۶۱/۵=\left(\frac{۱}{۲}\right)(۲۰\times۱۰^{-۶})v^{۲}$$
$$\Rightarrow v = ۲۴۸۰\text{m/s}$$

●●۴۸- بار $-۹/۰\text{nC}$ به دور یک حلقهٔ پلاستیکی باریک واقع در صفحهٔ yz که مرکز آن در مبدأ قرار گرفته، توزیع شده است. بار نقطه‌ای $-۶/۰\text{pC}$ روی محور x در $x=۳/۰\text{m}$ واقع است. برای حلقه‌ای به شعاع $۱/۵\text{m}$، یک نیروی خارجی چقدر کار باید روی این بار نقطه‌ای انجام دهد تا آن را به مبدأ حرکت دهد؟

حل:

Scanned by CamScanner



پتانسیل یک حلقه به شعاع R که بار Q به طور یکنواخت روی آن توزیع شده است، در نقطه‌ای روی محور حلقه و به فاصله x از مرکز حلقه برابر است با:

$$dV=\frac{kdq}{r}\Rightarrow V=\frac{kQ}{\sqrt{R^۲+x^۲}}$$

$$V_A=\frac{(۹\times۱۰^۹)(-۹\times۱۰^{-۹})}{\sqrt{(۳)^۲+(۱/۵)^۲}}=-۲۴/۱۵\,V$$

$$x=۰\Rightarrow V_۰=\frac{kQ}{R}=\frac{(۹\times۱۰^۹)(-۹\times۱۰^{-۹})}{۱/۵}=-۵۴\,V$$

$$\Delta V=V_۰-V_A=-۵۴-(-۲۴/۵)=-۲۹/۵\,V$$

$$W=q\Delta V=(-۶\times۱۰^{-۱۲})(-۲۹/۵)=۱/۷۷\times۱۰^{-۱۰}\,J$$

۴۹●●- *تندی فرار* الکترونی که در ابتدا به حال سکون روی سطح کره‌ای با شعاع ۱/۰cm و بار $۱/۶\times۱۰^{-۱۵}C$ که به طور یکنواخت توزیع شده قرار دارد، چقدر است؟ به عبارت دیگر، تندی اولیهٔ الکترون باید چقدر باشد تا الکترون به فاصله‌ای نامتناهی از کره برسد و در آنجا انرژی جنبشی آن صفر شود؟

حل:

اگر ذره‌ای با تندی فرار پرتاب شود به بی‌نهایت رفته و در آنجا ساکن می‌ماند. یعنی انرژی کل صفر است.

$$\frac{۱}{۲}mv^۲+\frac{-keq}{R}=۰\Rightarrow$$

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)(۹/۱\times۱۰^{-۳۱})v^۲-\frac{(۹\times۱۰^۹)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۱/۶\times۱۰^{-۱۵})}{۰/۰۱}=۰$$

$$\Rightarrow v=۲/۲۵\times۱۰^۴\,m/s$$

۵۰●●- یک پوستهٔ رسانای کروی و باریک به شعاع R روی تکیه‌گاه عایقی قرار دارد و تا پتانسیل $-۱۲۵\,V$ باردار شده است. الکترونی از نقطهٔ P به فاصلهٔ r از مرکز پوسته $(r>>R)$ به طور مستقیم به طرف مرکز پوسته شلیک می‌شود. تندی اولیهٔ $v_۰$ مورد نیاز الکترون باید چقدر باشد تا الکترون پیش از وارونه شدن جهت حرکتش، درست به پوسته برسد؟

حل:

انرژی الکترون در نقاط دور $r>>R$ فقط انرژی جنبشی آن است:

$$E_۱=U_۱+K_۱=K_۱$$

الکترون هنگامی که به پوسته می‌رسد به طور لحظه‌ای می‌ایستد. بنابراین:

$$E_۲=qV+K_۲=(-۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(-۱۲۵)+۰=۲\times۱۰^{-۱۷}\,J$$

چون از خارج سیستم هیچ نیرویی بر آن وارد نشده است، انرژی مکانیکی ثابت می‌ماند.

$$E=E_۱\Rightarrow\frac{۱}{۲}mv_۰^۲=۲\times۱۰^{-۱۷}\Rightarrow\left(\frac{۱}{۲}\right)(۹/۱\times۱۰^{-۳۱})V_۰^۲=۲\times۱۰^{-۱۷}$$

$$\Rightarrow v_۰=۶/۶۳\times۱۰^۶\,m/s$$

۵۱●●- دو کرهٔ فلزی کوچک A و B به جرمهای $m_A=۵/۰۰g$ و $m_B=۱۰/۰g$ دارای بار مثبت یکسان $q=۵/۰۰\mu C$ هستند. کره‌ها با تار نارسانا و بدون جرمی به طول $d=۱/۰۰m$ ، که در مقایسه با شعاع کره‌ها بسیار بزرگتر است، به هم وصل شده‌اند. (الف) انرژی پتانسیل الکتریکی این دستگاه چقدر است؟ (ب) فرض کنید تار را قطع کنیم، در این لحظه، شتاب هر یک از کره‌ها چقدر است؟ (پ) پس از زمانی طولانی از قطع تار، تندی هر یک از کره‌ها چقدر است؟

حل: (الف)

$$U=\frac{kq^۲}{d}=\frac{(۹\times۱۰^۹)(۵\times۱۰^{-۶})^۲}{۱}=۰/۲۲۵\,J$$

از شعاع کره‌ها چون d بسیار بزرگتر از آنهاست صرفنظر کرده‌ایم.

(ب)

$$F_A=ma_A\Rightarrow\frac{kq^۲}{d^۲}=ma_A\Rightarrow\frac{(۹\times۱۰^۹)(۵\times۱۰^{-۶})^۲}{(۱)^۲}=(۵\times۱۰^{-۳})a_A$$

$$\Rightarrow a_A=۴۵m/s^۲\ ,\ \ F_B=ma_B\Rightarrow a_B=۲۲/۵m/s^۲$$

(پ) از آنجایی که هیچ نیروی خارجی بر مجموعه وارد نمی‌شود، انرژی مکانیکی در طول حرکت ثابت می‌ماند، در زمان طولانی پس از پاره شدن تار فاصله دوبار، r بسیار زیاد می‌شود. در این صورت:

$$E=\frac{kq^۲}{r}+K_۱+K_۲\Rightarrow ۰/۲۲۵=\frac{۱}{۲}m_۱v_۱^۲+\frac{۱}{۲}m_۲v_۲^۲\Rightarrow$$

$$۰/۲۲۵=۰/۰۰۰۲۵V_۱^۲+۰/۰۰۵V_۲^۲$$

نیروی دافعه، نیروی داخلی است و پایستگی اندازه حرکت برقرار است:

$$m_۱v_۱=m_۲v_۲\Rightarrow$$

$$۰/۰۰۵v_۱=۰/۰۱v_۲\Rightarrow v_۱=۲v_۲$$

این نتیجه را در رابطه بالا قرار می‌دهیم:

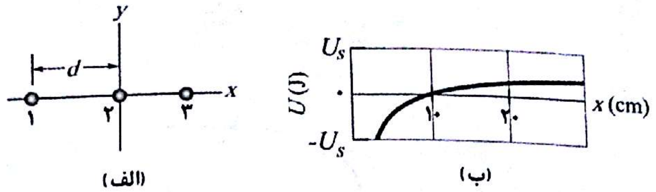
$$۰/۲۲۵=(۲/۵\times۱۰^{-۳})(۴v_۲^۲)+(۵\times۱۰^{-۳})v_۲^۲\Rightarrow v_۲=۳/۸۷\,m/s$$

$$v_۱=۲v_۲=۷/۷۴\,m/s$$

جهت سرعت آنها خلاف یکدیگر است.

۵۲●●- شکل ۲۰-۵۰ الف، سه ذرهٔ باردار را روی محور x نشان می‌دهد. ذرهٔ ۱ (با بار $+۵/۰\mu C$) و ذرهٔ ۲ (با بار $+۳/۰\mu C$) در مکانهای خود در فاصلهٔ $d=۴/۰cm$ از یکدیگر ثابت شده‌اند. ذرهٔ ۳ می‌تواند روی محور x به سمت راست ذرهٔ ۲ حرکت کند. شکل ۲۰-۵۰ ب انرژی پتانسیل الکتریکی U این دستگاه سه ذره‌ای را برحسب تابعی از مختصهٔ x ذرهٔ ۳ به دست می‌دهد. مقیاس محور قائم با $U_s=۵/۰\,J$ مشخص شده است. بار ذرهٔ ۳ چیست؟

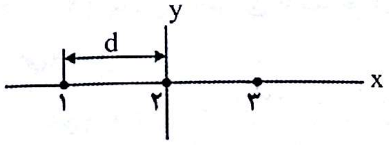
Scanned by CamScanner



شکل ۲۰-۵۰ مسئلهٔ ۵۲

حل:
در $x=۱۰$ cm انرژی پتانسیل مجموعه صفر است پس:

$$U=U_{۱۲}+U_{۱۳}+U_{۲۳}=۰$$
$$\Rightarrow \frac{(۹\times۱۰^{۹})(۵\times۱۰^{-۶})(۳\times۱۰^{-۶})}{۰/۰۴}+\frac{(۹\times۱۰^{۹})(۵\times۱۰^{-۶})q_۳}{۰/۱۴}+\frac{(۹\times۱۰^{۹})(۳\times۱۰^{-۶})q_۳}{۰/۱}=۰$$
$$۳/۳۷۵+۳/۲۱\times۱۰^{۵}\,q_۳+۲/۷\times۱۰^{۵}\,q_۳$$
$$\Rightarrow q_۳=-۵/۷۱\times۱۰^{-۶}\ \text{C}$$



●●۵۳- دو الکترون به فاصلهٔ ۲/۰cm از یکدیگر ثابت شده‌اند. الکترون دیگری از بینهایت پرتاب و در وسط آن دو متوقف می‌شود. تندی اولیهٔ آن چقدر است؟ GO

حل: انرژی پتانسیل مجموعه قبل از نزدیک شدن بار $q۳$:

$$U_i=U_{۱۲}=\frac{ke^۲}{۲a}$$
$$a=۱\ \text{cm}=۰/۰۱\ \text{m}$$

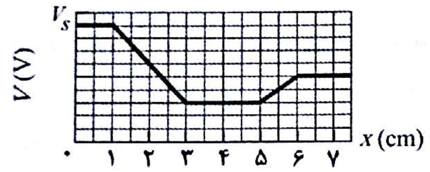
انرژی پتانسیل مجموعه بعد از اینکه بار $q_۳$ بین $q_۲$ و $q_۱$ قرار گرفت:

$$U_f=U_{۱۲}+U_{۱۳}+U_{۲۳}$$
$$U_f=\frac{ke^۲}{۲a}+\frac{ke^۲}{a}+\frac{ke^۲}{a}=\frac{۵ke^۲}{۲a}$$

چون هیچ نیرویی از خارج مجموعه سه بار به آن وارد نمی‌شود، انرژی مکانیکی ثابت می‌ماند.

$$K_i+U_i=K_f+U_f$$
$$\frac{۱}{۲}mv_۰^۲+\frac{ke^۲}{۲a}=۰+\frac{۵ke^۲}{۲a}\Rightarrow\frac{۱}{۲}mv_۰^۲=\frac{۲ke^۲}{a}\Rightarrow$$
$$\left(\frac{۱}{۲}\right)(۹/۱\times۱۰^{-۳۱})v_۰^۲=\frac{(۲)(۹\times۱۰^{۹})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})^۲}{۰/۰۱}$$
$$\Rightarrow v_۰=۳۱۸/۲\text{m/s}$$

●●۵۴- *پروتون در چاه.* شکل ۲۰-۵۱ پتانسیل الکتریکی V در امتداد محور x را نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $V_s=۱۰/۰\text{VA}$ مشخص شده است. پروتونی در $x=۳/۵\text{cm}$ با انرژی جنبشی اولیهٔ $۴/۰۰\text{eV}$ رها می‌شود. (الف) اگر پروتون در ابتدا در جهت منفی محور x حرکت کند، آیا به نقطهٔ برگشت می‌رسد، (اگر می‌رسد، مختصهٔ x آن نقطه چیست) یا از ناحیهٔ رسم شده می‌گریزد (اگر می‌گریزد، تندی آن در $x=۰$ چیست)؟ (ب) اگر پروتون در ابتدا در جهت مثبت محور x حرکت کند، آیا به نقطهٔ برگشت می‌رسد، (اگر می‌رسد، مختصهٔ x آن نقطه چیست) یا از ناحیهٔ رسم شده می‌گریزد (اگر می‌گریزد، تندی آن در $x=۶/۰\text{cm}$ چیست)؟ (پ) بزرگی F و (ت) جهت (مثبت یا منفی محور x) نیروی الکتریکی وارد بر پروتون، در صورتی‌که پروتون فقط در سمت چپ $x=۳/۰\text{cm}$ حرکت کند چگونه است؟ (ث) F و (ج) جهت آن در صورتی‌که پروتون فقط در سمت راست $x=۵/۰\text{cm}$ حرکت کند چگونه است؟



شکل ۲۰-۵۱ مسئلهٔ ۵۴

حل: (الف) انرژی کل پروتون در شروع حرکت برابر است با:

$$E_i=K_i+U_i=۴+۳=۷\ eV$$

اگر خط افقی $E=V$ را رسم کنیم در $x=۱/۵$ cm منحنی V را قطع می‌کند. پس اگر پروتون به طرف جهت منفی محور xها حرکت کند، نقطه بازگشت آن $x=۱/۵$ cm است.

(ب) اگر خط افقی $E=V$ را رسم کنیم، منحنی V را در هیچ نقطه‌ای جز $x=۱/۵$ cm قطع نمی‌کند و در این حالت اگر پروتون به طرف مثبت محور x حرکت کند نقطه بازگشتی وجود ندارد. در $x=۶$cm داریم $V=۵\ eV$ پس:

$$E=V(eV)=V+K=۵(eV)+K\Rightarrow K=\frac{۱}{۲}mv^۲=۲(eV)$$
$$\left(\frac{۱}{۲}\right)(۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷})v^۲=(۲)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})\Rightarrow V=۱/۹۶\times۱۰^{۴}\ \text{m/s}$$

(ب) در سمت راست $x=۳$ cm چون منحنی پتانسیل ثابت است، میدان و در نتیجه نیرو صفر است.

$$E=-\frac{\Delta V}{\Delta x}=-\frac{۳-۹}{(۳-۱)(۱۰^{-۲})}=۳۰۰\ \text{V/m}$$
$$F=eE=(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۳۰۰)=۴/۸\times۱۰^{-۱۷}\ \text{N}$$

(ت) چون میدان و در نتیجه نیرو مثبت است جهت آن به طرف مثبت x می‌باشد.

(ث) $۵<x<۶\text{cm}$

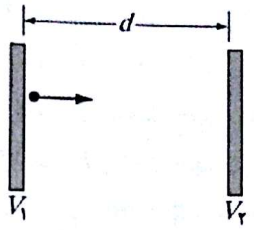
$$E=-\frac{۵-۳}{(۶-۵)(۱۰^{-۲})}=-۲۰۰\text{V/m}\Rightarrow F=eE=(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(-۲۰۰)$$
$$\Rightarrow -۳/۲\times۱۰^{-۱۷}\ \text{N}$$

(ج) چون نیرو منفی است جهت آن به طرف منفی محور x می‌باشد.

●●۵۵- در شکل ۲۰-۵۲، یک ذرهٔ باردار (الکترون یا پروتون) در حال حرکت به سمت راست، میان دو صفحهٔ باردار موازی به فاصلهٔ $d=۲/۰۰\text{mm}$ است. پتانسیل صفحه‌ها عبارت‌اند از $V_۱=-۷۰/۰\ \text{V}$ و $V_۲=-۵۰/۰\ \text{V}$. تندی ذره از مقدار اولیهٔ

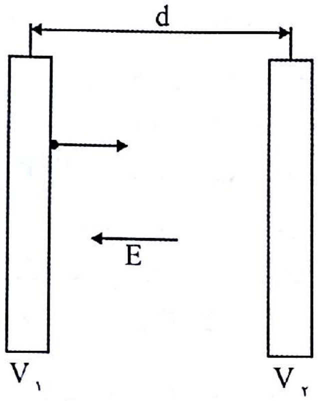
Scanned by CamScanner

۹۰km/s روی صفحهٔ سمت چپ، کند می‌شود. (الف) آیا این ذره، الکترون است یا پروتون؟ (ب) تندی آن وقتی درست به صفحهٔ ۲ می‌رسد چقدر است؟



شکل ۲۰- ۵۲ مسئلهٔ ۵۵

حل: (الف) چون جهت میدان الکتریکی به سمت مقادیر کوچک‌تر پتانسیل است، پس جهت میدان صفحه‌ها به سمت چپ است. چون $\vec{F} = q\vec{E}$ است، نیرو در همان جهت میدان الکتریکی و به سمت چپ است. طبق صورت مسئله، حرکت ذره کندشونده است و بنابراین شتاب آن به سمت چپ است. می‌دانیم که یک ذره با بار مثبت است که در جهت میدان شتاب می‌گیرد پس این ذره، پروتون است.



(ب) چون هیچ نیرویی به ذره وارد نمی‌شود، انرژی مکانیکی ثابت می‌ماند.

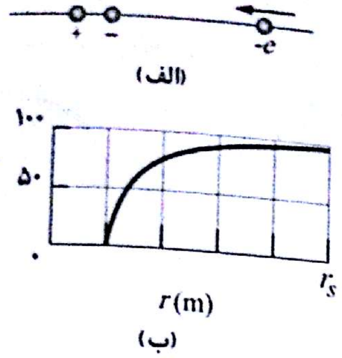
$$U_۱ + K_۱ = U_۲ + K_۲ \Rightarrow$$

$$-V\cdot e + \left(\frac{۱}{۲}\right)(۱/۶۷\times ۱۰^{-۲۷})(۹\times ۱۰^{۲})^{۲} = -۵۰e + \left(\frac{۱}{۲}\right)(۱/۶۷\times ۱۰^{-۲۷})v^{۲}$$

$$\Rightarrow (-۲۰)(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}) + ۶/۷۶\times ۱۰^{-۱۸} = ۰/۸۴\times ۱۰^{-۲۷}V^{۲}$$

$$\Rightarrow U = ۶/۵۳\times ۱۰^{۴}\ \text{m/s}$$

●●۵۶- شکل ۲۰-۵۳ الف، الکترونی را نشان می‌دهد که در حال حرکت روی محور یک دوقطبی الکتریکی به سوی طرف منفی این دوقطبی است. دوقطبی در مکان خود ثابت شده است. الکترون در ابتدا در فاصلهٔ بسیار دوری از دوقطبی، با انرژی جنبشی ۱۰۰eV بوده است. شکل ۲۰-۵۳ ب، انرژی جنبشی K الکترون را برحسب فاصلهٔ r آن از مرکز دوقطبی نشان می‌دهد. مقیاس محور افقی با $r_s = ۰/۱۰\text{m}$ مشخص شده است. بزرگی گشتاور دو قطبی چقدر است؟



شکل ۲۰-۵۳ مسئلهٔ ۵۶

حل: به ازای $\theta = ۱۸۰°$ خواهیم داشت:

$$U = qV = -e\left(\frac{P\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_۰ r^{۲}}\right) = \frac{eP}{۴\pi\varepsilon_۰ r^{۲}}$$

V را با استفاده از پایستگی انرژی به دست می‌آوریم. در فاصله بسیار دور $U_i = ۰$ و $K_i = ۱۰۰(eV)$ انرژی جنبشی الکترون صفر می‌شود $(K_f = ۰)$ بنابراین انرژی پتانسیل در این نقطه برابر $۱۰۰(eV)$ می‌شود.

$$P = \frac{۴\pi\varepsilon_۰ r^{۲}V}{e} = \frac{(۰/۰۲)^{۲}(۱۰۰)(e)}{(۹\times ۱۰^{۹})(e)} = ۴/۴۵\times ۱۰^{-۱۲}\ \text{cm}$$

●●۵۷- الکترونی با تندی اولیهٔ $۳/۲\times ۱۰^{۵}$ m/s به طور مستقیم به طرف پروتونی که در مکان خود ثابت شده است، پرتاب می‌شود. اگر الکترون در ابتدا در فاصلهٔ بسیار دوری از پروتون باشد، در چه فاصله‌ای از پروتون، تندی الکترون به طور لحظه‌ای دو برابر مقدار اولیه می‌شود؟

حل:

چون از خارج مجموعه نیرویی بر آن وارد نمی‌گردد انرژی مکانیکی ثابت می‌ماند.

$$U_i + K_i = U_f + K_f$$

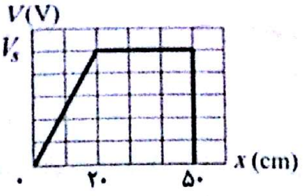
$$۰ + \frac{۱}{۲}mv_۰^{۲} = -\frac{e^{۲}}{۴\pi\varepsilon_۰ r} + \frac{۱}{۲}m(۲v_۰)^{۲} \Rightarrow \frac{e^{۲}}{۴\pi\varepsilon_۰ r} = \frac{۳}{۲}mv_۰^{۲}$$

$$\frac{(۹\times ۱۰^{۹})(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})^{۲}}{r} = \left(\frac{۳}{۲}\right)(۹/۱\times ۱۰^{-۳۱})(۳/۲\times ۱۰^{۵})^{۲}$$

$$\Rightarrow r = ۱/۶۵\times ۱۰^{-۹}\ \text{m}$$

●●۵۸- پوزیترونی (با بار $+e$ و جرمی برابر با جرم الکترون) با تندی $۱/۰\times ۱۰^{۷}$ m/s در جهت مثبت محور x در حرکت است و وقتی به $x = ۰$ می‌رسد با یک میدان الکتریکی که در امتداد محور x است مواجه می‌شود. پتانسیل الکتریکی V وابسته به این میدان در شکل ۲۰-۵۴ نشان داده شده است. مقیاس محور قائم با $V_s = ۵۰۰/۰V$ مشخص شده است.(الف) آیا پوزیترون در $x = ۰$ از میدان خارج می‌شود (یعنی جهت حرکتش عوض می‌شود) یا در $x = ۰/۵۰$ m (یعنی جهت حرکتش عوض نمی‌شود)؟ (ب) تندی آن هنگام خروج از میدان چقدر است؟

Scanned by CamScanner



شکل ۲۰-۵۴ مسئلهٔ ۵۸

حل: با استفاده از $U=qV$ می‌توانیم منحنی پتانسیل را به منحنی انرژی پتانسیل (در یکاهای ev) تبدیل کنیم. انرژی کل پوزیترون در $x=۰$ که برابر انرژی جنبشی آن است به صورت زیر به دست می‌آید.

(الف)

$$K_i=\frac{۱}{۲}mv_i^۲=\left(\frac{۱}{۲}\right)(۹/۱\times۱۰^{-۳۱})(۱\times۱۰^{۷})=۴/۵۵\times۱۰^{-۱۷}\ J$$

$$K_i=(۴/۵۵\times۱۰^{-۱۷})\left(\frac{۱}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}\right)=۲۸۴/۶۹(eV)=E_i$$

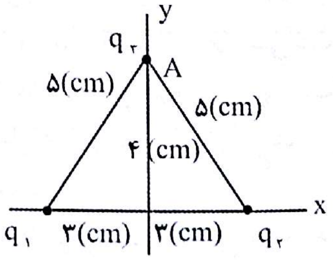
با تبدیل منحنی، ارتفاع سد انرژی پتانسیل $۵۰۰(eV)$ به دست می‌آید. بنابراین E_i از این انرژی کمتر است و پوزیترون در $x=۰$ جهت حرکتش عوض می‌شود.

(ب) پوزیترون در جهت $-x$ و با همان تندی اولیه حرکت می‌کن بنابراین تندی آن $۱\times۱۰^{۷}\ m/s$ است.

●●۵۹- بارهای مشابه $۵۰\mu C$ روی محور x در $x=\pm۳/۰m$ ثابت شده‌اند. سپس ذره‌ای با بار $q=-۱۵\ \mu C$ از حالت سکون در نقطه‌ای واقع بر بخش مثبت محور y رها می‌شود. به دلیل تقارن وضعیت، این ذره روی محور y حرکت می‌کند و به هنگام عبور از نقطهٔ $x=۰$ ، $y=۴/۰m$ دارای $۱/۲J$ انرژی جنبشی است. (الف) انرژی جنبشی ذره به هنگام عبور از مبدأ چقدر است؟ (ب) در چه مقدار منفی از y، ذره به طور لحظه‌ای متوقف خواهد شد؟ SSM

حل: چون از خارج مجموعه هیچ نیرویی بر آن وارد نمی‌شود انرژی آن ثابت می‌ماند. پس:
$E_۰$ انرژی در مبدأ است.

$E_A=E_۰$



(الف)

$$\frac{kq_۱q_۳}{۵}+\frac{kq_۲q_۳}{۵}+\frac{kq_۱q_۲}{۶}+۱/۲=\frac{kq_۱q_۳}{۳}+\frac{kq_۲q_۳}{۳}+\frac{kq_۱q_۲}{۶}+K_۰$$

$$\frac{(۲)(۹\times۱۰^{۹})(۵۰\times۱۰^{-۶})(۱۵\times۱۰^{-۶})}{۳}+K_۰$$

$$\Rightarrow -۲/۷+۱/۲=\frac{(۲)(۹\times۱۰^{۹})(۵۰\times۱۰^{-۶})(-۱۵\times۱۰^{-۶})}{۳}+K_۰$$

$$\Rightarrow -۲/۷+۱/۲=-۴/۵+K_۰\Rightarrow K_۰=۳\ J$$

فرض می‌کنیم ذره در نقطه B متوقف شود. پس:

$E_A=E_B$

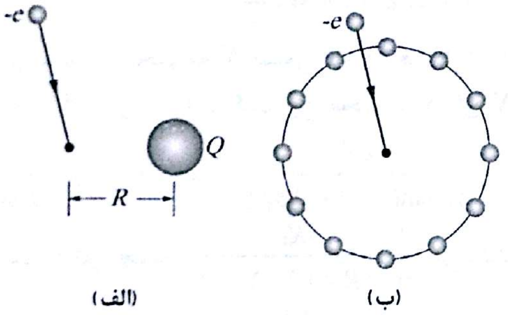
$$-۲/۷+۱/۲=\frac{kq_۱q_۳}{r}+\frac{kq_۲q_۳}{r}=\frac{۲kq_۱q_۳}{r}$$

$$-۱/۵=\frac{(۲)(۹\times۱۰^{۹})(۵۰\times۱۰^{-۶})(-۱۵\times۱۰^{-۶})}{r}\Rightarrow r=۹m$$

$$y^۲+۹=r^۲=۸۱\Rightarrow y=\pm۸/۴۹\ m$$

که جواب منفی موردنظر است.

●●●۶۰- در شکل ۲۰-۵۵ الف، الکترونی را از یک فاصلهٔ نامتناهی تا نقطه‌ای به فاصلهٔ $R=۸/۰۰cm$ از یک گوی باردار کوچک، حرکت می‌دهیم. برای این حرکت باید $W=۲/۱۶\times۱۰^{-۱۳}J$ کار انجام دهیم. (الف) بار Q روی گوی چقدر است؟ در شکل ۲۰-۵۵ ب، گوی به تکه‌هایی با مقدار بار مساوی تقسیم شده است و آن تکه‌ها در مکان شماره‌های یک ساعت دایره‌ای به شعاع $R=۸/۰۰cm$ پخش شده‌اند. حال الکترونی از یک فاصلهٔ نامتناهی به مرکز دایره آورده می‌شود. (ب) بر اثر اضافه شدن این الکترون به دستگاه ۱۲ ذرهٔ باردار، انرژی پتانسیل الکتریکی این دستگاه چقدر تغییر می‌کند؟



شکل ۲۰-۵۵ مسئلهٔ ۶۰

حل: (الف)

$$W=eV=\frac{kqe}{R}\Rightarrow ۲/۱۶\times۱۰^{-۱۳}=\frac{(۹\times۱۰^{۹})(q)(-۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{۰/۰۸}$$

$$\Rightarrow q=-۱/۲\times۱۰^{-۵}\ C=-۱۲\ \mu C$$

ابتدا پتانسیل بارها روی گوی را در مرکز آن بدست می‌آوریم.

(ب) $q'=\frac{q}{۱۲}=-۱\times۱۰^{-۶}\ C$

$$V=۱۲\frac{kq'}{R}=\frac{(۱۲)(۹\times۱۰^{۹})(-۱\times۱۰^{-۶})}{۰/۰۸}=-۱/۳۵\times۱۰^{۶}\ V$$

تغییرات انرژی مجموعه برابر کاری است که باید انجام داد تا الکترون در مرکز گوی قرار گیرد.

$\Delta U=W=eV$

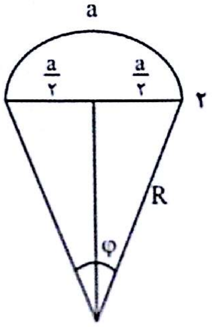
$$\Delta U=(-۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(-۱/۳۵\times۱۰^{۶})=۲/۱۶\times۱۰^{-۱۳}\ J$$

●●●۶۱- فرض کنید N الکترون را می‌توان در یکی از دو پیکربندی زیر قرار داد. در پیکربندی ۱، همهٔ آنها به طور یکنواخت روی پیرامون حلقهٔ باریکی به شعاع R توزیع شده‌اند،

Scanned by CamScanner

به طوری که فاصلهٔ میان الکترونهای مجاور در همه جا یکسان است. در پیکربندی ۲، $N-1$ الکترون به طور یکنواخت روی حلقه و یک الکترون در مرکز حلقه قرار گرفته‌اند. (الف) کمترین مقدار N که به ازای آن انرژی پیکربندی دوم کمتر از پیکربندی اول است، چقدر است؟ (ب) برای آن مقدار N، یکی از الکترونهای واقع بر پیرامون حلقه را در نظر بگیرید و آن را e_0 بنامید. چه تعداد از سایر الکترونهای واقع بر پیرامون حلقه به e_0 نزدیکتر از الکترون مرکزی‌اند؟

حل:



(الف) محیط دایره به N قسمت تقسیم می‌گردد.

$$\varphi = \frac{2\pi}{N}$$

هر ضلع چند ضلعی منتظم محاط در دایره برابر است با:

$$\frac{a}{2} = R\sin\frac{\varphi}{2} \Rightarrow a = 2R\sin\frac{\varphi}{2}$$

اگر انرژی پتانسیل مجموعه N ضلعی که در هر گوشه آن یک الکترون قرار دارد را حساب کنیم این مجموعه دارای N جمله $\frac{ke^2}{2R\sin\varphi/2}$ و ... N جمله $\frac{ke^2}{2R\sin(N/2-1)\varphi/2}$ و اگر N زوج باشد دارای جمله $\frac{N}{2}\frac{Ke^2}{2R\sin N/2\varphi/2}$ می‌باشد. برای Nهای فرد جمله آخر $\frac{NKe^2}{2R\sin(N-1/2)\varphi/2}$ است. در حالتی که $N-1$ الکترون روی دایره و یکی در مرکز آن باشد انرژی مجموعه $\frac{(N-1)ke^2}{R}$ اضافه دارد. در آخر، اگر N زوج باشد اختلاف انرژی حالت اول U_1 و حالت دوم U_2 برابر است با:

$$U_1 - U_2 = \left\{\frac{Nke^2}{2R}\left(\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1}\frac{1}{\sin n\theta/2} + \frac{1}{2}\right)\right\} - \left(\frac{(N-1)ke^2}{2R}\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}}\frac{1}{\sin n\theta/2} + (N-1)\frac{ke^2}{R}\right) \Rightarrow$$

$$U_1 - U_2 = \frac{ke^2}{2R}\times\left\{\left(\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-2}\frac{1}{\sin n\theta/2} + \frac{N}{2}\right) - \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}}\frac{N-1}{\sin n\theta/2} - 2(N-1)\right\}$$

می‌خواهیم بدانیم به ازای چه مقدار N این عبارت مثبت یعنی $U_1 > U_2$ است. با روش عددگذاری $N > 3$ در این عبارت و بدست آوردن نتیجه آن می‌توان به جواب $N = 12$ رسید.

(ب) در $N = 12$ در حالت دوم ۱۱ الکترون روی دایره و یکی در مرکز آن است. فاصله e_0 از همسایگانش برابر است با:

$$\varphi = \frac{2\pi}{11}\ ,\ a_1 = 2R\sin\frac{\pi}{11} = 0/563R$$

فاصله e_0 از دومین همسایگانش:

$$a_2 = 2R\sin\frac{2\varphi}{2} = 2R\sin\frac{2\pi}{11} = 1/08R$$

پس فقط دو عدد از همسایگان به e_0 نزدیکتر از الکترون مرکزی می‌باشند.

بخش ۲۰-۱۲ پتانسیل رسانای منزوی باردار

●۶۲- پتانسیل یک کرهٔ فلزی توخالی نسبت به زمین (که پتانسیل آن $V = 0$ تعریف شده است) برابر با $+400\,V$ و بار آن $5/0\times10^{-9}\,C$ است. پتانسیل الکتریکی را در مرکز کره پیدا کنید.

حل: درون کره فلزی میدان الکتریکی صفر است، پس پتانسیل روی کره و درون آن ثابت است. پس پتانسیل الکتریکی در مرکز کره نیز ۴۰۰ ولت است.

●۶۳- اگر پتانسیل کرهٔ رسانایی به شعاع $r = 0/15\,m$ برابر $1500\,V$ و در بینهایت $V = 0$ باشد، بار اضافی روی این کره چقدر است؟ SSM

حل:

$$V = \frac{kq}{R} \Rightarrow 1500 = \frac{(9\times10^9)(q)}{0/15} \Rightarrow q = 2/5\times10^{-8}\,C$$

●۶۴- کرهٔ ۱ به شعاع R_1 دارای بار مثبت q است. کرهٔ ۲ به شعاع $2/00R_1$ در فاصلهٔ دوری از کرهٔ ۱ قرار دارد و در ابتدا بدون بار است. پس از آنکه کره‌های جدا از هم با سیم به حد کافی نازکی که فقط بار ناچیزی را نگه می‌دارد به هم متصل شوند (الف) آیا پتانسیل V_1 کرهٔ ۱ بزرگتر از پتانسیل V_2 کرهٔ ۲ می‌شود یا کوچکتر یا مساوی آن؟ سرانجام چه کسری از q روی (ب) کرهٔ ۱ و (پ) کرهٔ ۲ باقی می‌ماند؟ (ت) نسبت σ_1/σ_2 چگالیهای بار سطحی کره‌ها چقدر است؟

حل: (الف) پتانسیل هر دو کره یکسان می‌شود زیرا توسط یک رسانا به وصل شده‌اند.

(ب) و (پ) از شرط برابر شدن پتانسیل‌ها خواهیم داشت:

$$\frac{kq_1}{R_1} = \frac{kq_2}{R_2} \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_1}{2R_1} = \frac{1}{2}$$

از قانون پایستگی بار داریم:

$$q = q_1 + q_2 = \frac{q_2}{2} + q_2 = \frac{3q_2}{2} \Rightarrow$$

Scanned by CamScanner

$$\frac{q_۲}{q}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{q_۱}{q}=\frac{۱}{۳}$$

(ت)

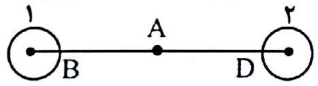
$$\frac{\sigma_۱}{\sigma_۲}=\frac{q_۱/۴\pi R_۱^۲}{q_۲/۴\pi R_۲^۲}=\left(\frac{q_۱}{q_۲}\right)\left(\frac{R_۲}{R_۱}\right)^۲=۲$$

●۶۵- فاصلهٔ مرکز به مرکز دو کرهٔ فلزی، هر یک به شعاع ۳/۰cm ، برابر با ۲/۰m است. کرهٔ ۱ دارای بار $+۱/۰\times۱۰^{-۸}$C و کرهٔ ۲ دارای بار $-۳/۰\times۱۰^{-۸}$ C است. فرض کنید این فاصله به حد کافی بزرگ است به گونه‌ای که می‌توانیم فرض کنیم بار روی هر کره به طور یکنواخت توزیع شده است (کره‌ها بر یکدیگر تأثیر نمی‌گذارند.) به ازای $V=۰$ در بینهایت، مطلوب است محاسبهٔ (الف) پتانسیل در نقطهٔ میان مرکزهای دو کره و پتانسیل روی سطح (ب) کرهٔ ۱ و (پ) کرهٔ ۲. WWW SSM

حل: (الف)

$$V_A=\frac{kq_۱}{r_۱}+\frac{kq_۲}{r_۲}\Rightarrow$$

$$V_A=\frac{۹\times۱۰^۹}{۱}(۱\times۱۰^{-۸}-۳\times۱۰^{-۸})=-۱۸۰V$$



(ب)

$$V_B=\frac{kq_۱}{R_۱}+\frac{kq_۲}{۲-R_۱}=\frac{(۹\times۱۰^۹)(۱\times۱۰^{-۸})}{۰/۰۳}+\frac{(۹\times۱۰^۹)(-۳\times۱۰^{-۸})}{(۲-۰/۰۳)}$$
$$=۳۰۰۰-۱۳۷=۲/۸۶\times۱۰^۳\ V$$

(پ)

$$V_D=\frac{kq_۱}{۲-R_۲}+\frac{kq_۲}{R_۲}=\frac{(۹\times۱۰^۹)(۱\times۱۰^{-۸})}{(۲-۰/۰۳)}+\frac{(۹\times۱۰^۹)(-۳\times۱۰^{-۸})}{۰/۰۳}$$
$$=۴۵/۷-۹۰۰۰=-۸/۹۵\times۱۰^۳\ V$$

●●۶۶- دو پوستهٔ کروی رسانا، هم مرکز و منزوی دارای شعاعهای $R_۱=۰/۵۰۰$m و $R_۲=۱/۰۰$m ، بارهای یکنواخت $q_۱=+۲/۰۰\ \mu C$ و $q_۲=+۱/۰۰\ \mu C$ ، و ضخامتهای ناچیزند. بزرگی میدان الکتریکی E در فاصلهٔ شعاعی (الف) $r=۴/۰۰$m ، (ب) $r=۰/۷۰۰$ m ، و (پ) $r=۰/۲۰۰$ m چقدر است؟ به ازای $V=۰$ در بینهایت، پتانسیل V در (ت) $r=۴/۰۰$m ، (ث) $r=۱/۰۰$m ، (ج) $r=۰/۷۰۰$m ، (چ) $r=۰/۵۰$ m ، (ح) $r=۰/۲۰۰$m ، و (خ) $r=۰$ ، چقدر است؟ (د) نمودارهای $E(r)$ و $V(r)$ را رسم کنید.

حل: (الف)

$$r=۴(m)>R_۲\Rightarrow E=\frac{k(q_۱+q_۲)}{r^۲}=\frac{(۹\times۱۰^۹)(۳\times۱۰^{-۶})}{(۴)^۲}$$
$$=۱/۶۹\times۱۰^۳\ V/m$$

(ب)

$$r=۰/۷(m)\Rightarrow R_۱<r<R_۲\Rightarrow E=\frac{kq_۱}{r^۲}=\frac{(۹\times۱۰^۹)(۳\times۱۰^{-۶})}{(۰/۷)^۲}$$
$$=۳/۶۷\times۱۰^۴\ V/m$$

(پ) $r=۰/۲(m)<R_۱\Rightarrow E=۰$

(ت)

$$r=۴(m)>R_۲\Rightarrow E=\frac{k(q_۱+q_۲)}{r}=\frac{(۹\times۱۰^۹)(۳\times۱۰^{-۶})}{۴}$$
$$=۶/۷۵\times۱۰^۳\ V$$

(ث)

$$r=۱(m)>R_۲\Rightarrow E=\frac{k(q_۱+q_۲)}{R_۲}=\frac{(۹\times۱۰^۹)(۳\times۱۰^{-۶})}{۱}$$
$$=۲/۷\times۱۰^۴\ V$$

(ج)

$$r=۰/۷(m)\Rightarrow R_۱<r<R_۲\Rightarrow V=\frac{kq_۱}{r}+\frac{kq}{R_۲}=$$
$$\frac{(۹\times۱۰^۹)(۲\times۱۰^{-۶})}{۰/۷}+\frac{(۹\times۱۰^۹)(۱\times۱۰^{-۶})}{۱}=۳/۴۷\times۱۰^۴\ V$$

(چ)

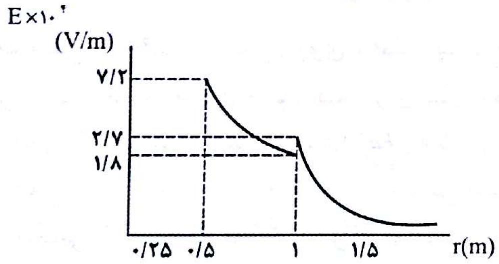
$$r=۰/۵(m)\Rightarrow R_۱\Rightarrow V=\frac{kq_۱}{R_۱}+\frac{kq_۲}{R_۲}=$$
$$\frac{(۹\times۱۰^۹)(۲\times۱۰^{-۶})}{۰/۵}+\frac{(۹\times۱۰^۹)(۱\times۱۰^{-۶})}{۱}=۴/۵\times۱۰^۴\ V$$

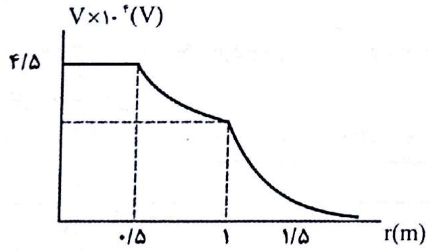
(ح) در نقاط درون کره ۱ پتانسیل برابر نقاط روی سطح آن است.

$$r=۰/۲m\Rightarrow V=۴/۵\times۱۰^۴\ V$$

(خ)

$$r=۰\Rightarrow V=۴/۵\times۱۰^۴\ V$$





●●۶۷- یک کرهٔ فلزی به شعاع ۱۵ cm دارای بار خالص $۳/۰\times۱۰^{-۸}$ C است. (الف) میدان الکتریکی در سطح کره چقدر است؟ (ب) اگر در بینهایت $V=۰$ باشد، پتانسیل الکتریکی در سطح کره چقدر است؟ (پ) در چه فاصله‌ای از سطح کره، پتانسیل الکتریکی به اندازهٔ ۵۰۰V کاهش می‌یابد؟

حل:

(الف)

$$E=\frac{kq}{R_۲}=\frac{(۹\times۱۰^۹)(۳\times۱۰^{-۸})}{(۰/۱۵)^۲}=۱۲۰۰۰\ V/m$$

(ب)

$$V=\frac{kq}{R}=\frac{(۹\times۱۰^۹)(۳\times۱۰^{-۸})}{(۰/۱۵)^۲}=۱۸۰۰\ V$$

Scanned by CamScanner

(ج)

$$V = 1800 - 500 = 1300\ \text{V}$$

$$V = \frac{kq}{r} \Rightarrow 1300 = \frac{(9\times10^{9})(3\times10^{-8})}{r} \Rightarrow r = 0.208\ \text{m}$$

$$d = r - R = 0.208 - 0.15 = 0.059\ \text{m}$$

مسئله‌های اضافی

۶۸- معمای خرده‌های شکلات. این داستان با مسئلهٔ ۵۶ فصل ۱۹ آغاز می‌شود. (الف) با استفاده از پاسخ قسمت (الف) آن مسئله، عبارتی را برای پتانسیل الکتریکی برحسب تابعی از فاصلهٔ شعاعی r از مرکز لوله پیدا کنید. (پتانسیل الکتریکی روی دیوارهٔ لولهٔ متصل به زمین برابر با صفر است.) (ب) برای چگالی بار حجمی نوعی $\rho = -1.1\times10^{-3}\ \text{C/m}^3$، اختلاف پتانسیل الکتریکی میان مرکز لوله و دیوارهٔ داخلی آن چقدر است؟ (این داستان با مسئلهٔ ۵۰ در فصل ۲۱ ادامه می‌یابد.)

حل: (الف) از مسئله ۵۴ فصل ۲۳ میدان الکتریکی درون استوانه‌ای با توزیع جمعی یکنواخت بار برابر است با:

$$E = -\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

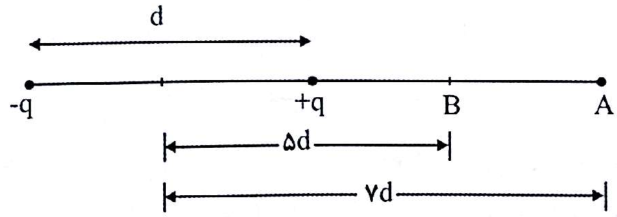
$$V - V_0 = -\int_{r=0}^{r} \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} dr = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0}$$

(ب)

$$V - V_0 = -\frac{(-1.1\times10^{-3})(0.05)^2}{(4)(8.85\times10^{-12})} = 7.77\times10^{4}\ \text{V}$$

۶۹- الکترونی از حالت سکون روی محور یک دوقطبی الکتریکی ثابت شده در مکان خود که دارای بار e و فاصلهٔ بارهای $d = 20\ \text{pm}$ است، رها می‌شود. نقطهٔ رهاشدن در طرف مثبت دوقطبی، و در فاصلهٔ 7.0d از مرکز دوقطبی است. تندی الکترون هنگامی که به نقطهٔ 5.0d از مرکز دوقطبی می‌رسد، چقدر است؟

حل: چون از خارج مجموعه نیرویی بر آن وارد نمی‌گردد، انرژی مکانیکی ثابت می‌ماند.



پتانسیل دو قطبی در نقطه‌ای روی محور آن برابر است با:

$$V = \frac{kq}{r - \frac{d}{2}} + \frac{-kq}{r + \frac{d}{2}} = \frac{kq\left(r + \frac{d}{2} - r + \frac{d}{2}\right)}{\left(r - \frac{d}{2}\right)\left(r + \frac{d}{2}\right)} = \frac{kqd}{r^2 - \frac{d^2}{4}}$$

$$V_A = \frac{kqd}{49d^2 - \frac{d^2}{4}} = \frac{4kq}{195d}, \quad V_B = \frac{kqd}{25d^2 - \frac{d^2}{4}} = \frac{4kq}{99d}$$

$$E_A = E_B \Rightarrow U_A + K_A = U_B + K_B$$

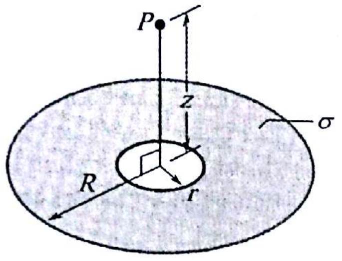
$$\Rightarrow \frac{4kqe}{195d} + 0 = \frac{4kqe}{99d} + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow \frac{-(4)(9\times10^{9})(1.6\times10^{-19})^2}{(195)(20\times10^{-12})} = \frac{-(4)(9\times10^{9})(1.6\times10^{-19})^2}{(99)(20\times10^{-12})} + \frac{1}{2}(9.1\times10^{-31})v^2$$

$$\Rightarrow -2.63\times10^{-19} = -4.455\times10^{-19} + 4.5\times10^{-31}v^2$$

$$v = 7.14\times10^{5}\ \text{m/s}$$

۷۰- شکل ۲۰-۵۶ حلقه‌ای را به شعاع خارجی $R = 13.0\ \text{cm}$، شعاع داخلی $r = 0.200\text{R}$ و چگالی بار سطحی یکنواخت $\sigma = 6.20\ \text{pC/m}^2$ نشان می‌دهد. به ازای $V = 0$ در بینهایت، پتانسیل الکتریکی را در نقطهٔ P واقع بر محور مرکزی حلقه، در فاصلهٔ $z = 2.00\text{R}$ از مرکز حلقه، به دست آورید.



شکل ۲۰-۵۶ مسئلهٔ ۷۰

حل: المان بار را به صورت حلقه‌ای به ضخامت dr و بار dq در نظر می‌گیریم. می‌دانیم پتانسیل الکتریکی در نقطه P روی محور حلقه و به فاصله Z از آن رابطه $V = \frac{kq}{\sqrt{R^2 + Z^2}}$ به دست می‌آید. پس:

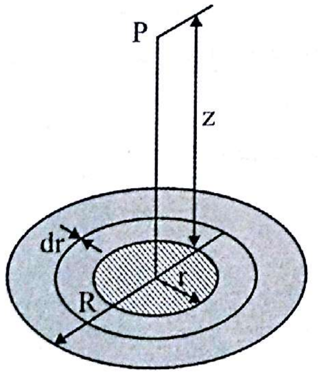
$$dV = \frac{kdq}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{k\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{rdr}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_{r=r}^{R}\frac{rdr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{r^2 + z^2}\right]_r^R \Rightarrow$$

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2 + z^2} - \sqrt{r^2 + z^2}\right] \Rightarrow$$

$$V = \frac{(6.2\times10^{-12})}{(2)(8.85\times10^{-12})}\left[\sqrt{(0.13)^2 + (0.26)^2} - \sqrt{(0.026)^2 + (0.26)^2}\right]$$

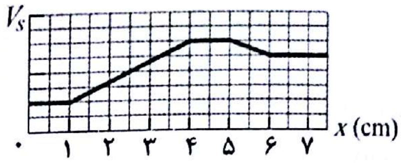
$$= 1.05\times10^{-2}\ \text{V}$$



۷۱- *الکترون در چاه.* شکل ۲۰-۵۷ پتانسیل الکتریکی V را در امتداد محور x نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $V_s = 8.0\ V$ مشخص شده است. الکترونی در $x = 4.5\ \text{cm}$ با انرژی جنبشی اولیهٔ $3.00\ \text{eV}$ رها می‌شود. (الف) اگر جهت حرکت اولیه

Scanned by CamScanner

الکترون به طرف منفی محور x باشد، آیا به نقطهٔ برگشت می‌رسد. (اگر می‌رسد، مختصهٔ x آن نقطه چیست) یا از ناحیهٔ رسم شده می‌گریزد (اگر می‌گریزد، تندی آن در $x=۰$ چقدر است)؟ (ب) اگر الکترون در ابتدا در جهت مثبت محور x حرکت کند، آیا به نقطهٔ برگشت می‌رسد. (اگر می‌رسد، مختصهٔ x آن نقطه چیست) یا از ناحیهٔ رسم شده می‌گریزد (اگر می‌گریزد، تندی آن در $x=۷/۰\ cm$ چقدر است)؟ (پ) بزرگی F و (ت) جهت (مثبت یا منفی محور x) میدان الکتریکی وارد بر الکترون در صورتی‌که الکترون فقط در طرف $x=۴/۰ cm$ حرکت کند چیست؟ (ث) F و (ج) جهت آن در صورتی‌که الکترون فقط در سمت راست $x=۵/۰۰ cm$ حرکت کند چیست؟



شکل ۲۰–۵۷ مسئلهٔ ۷۱

حل: (الف) انرژی کل الکترون برابر است با:

$E=-۶+۳=-۳\ eV$

اگر خط $E=-۳\ eV$ را رسم کنیم (یعنی خط $V=۳$ در منحنی پتانسیل) منحنی را در $x=۱/۵\ cm$ قطع می‌کند. پس اگر الکترون در جهت منفی محور x حرکت کند این نقطه، نقطه برگشت است.

(ب) خط $V=۳$ منحنی را در هیچ نقطه‌ای در جهت مثبت محور x قطع نمی‌کند و نقطه برگشتی وجود ندارد.

$$E_{(۴/۵)}=E_{(v)} \Rightarrow -۳=-۵+k \Rightarrow k=۲(eV)=۳/۲\times ۱۰^{-۱۹}\ J$$

$$K=\frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow ۳/۲\times۱۰^{-۱۹}=\left(\frac{۱}{۲}\right)(۹/۱\times۱۰^{-۳۱})(v^۲)\Rightarrow$$

$v=۸/۳۹\times۱۰^{۵}\ m/s$

(ب)

$$E=-\frac{\Delta V}{\Delta x}=-\frac{۶-۲}{(۴-۱)\times۱۰^{-۲}}=-۱۳۳/۳\ N/C$$

$$F=eE=(-۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(-۱۳۳/۳)=۲/۱۲۸\times۱۰^{-۱۷}\ N$$

(ت) جهت نیرو در جهت مثبت محور x است.

(ث)

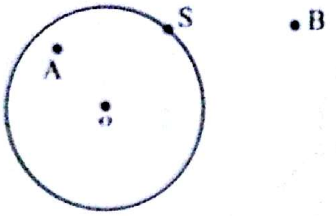
$$E=-\frac{\Delta V}{\Delta x}=-\frac{۵-۶}{(۶-۵)\times۱۰^{-۲}}=۱۰۰\ N/C$$

(ج) جهت نیرو در خلاف جهت محور x است.

$$F=eE=(-۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۱۰۰)=-۱/۶\times۱۰^{-۱۷}\ (N)$$

۷۲- کرهٔ رسانای توپری به شعاع $۳/۰ cm$ دارای بار $۳۰ nC$ است که به طور یکنواخت روی سطح آن توزیع شده است. A را نقطه‌ای به فاصلهٔ $۱/۰ cm$ از مرکز کره، S را نقطه‌ای روی سطح کره، و B را نقطه‌ای به فاصلهٔ $۵/۰ cm$ از مرکز کره در نظر می‌گیریم. اختلاف پتانسیلهای الکتریکی (الف) V_S-V_B و (ب) V_A-V_B چقدر است؟

حل: (الف) میدان الکتریکی درون رسانا صفر است و پتانسیل داخل آن ثابت و برابر پتانسیل روی سطح آن است.



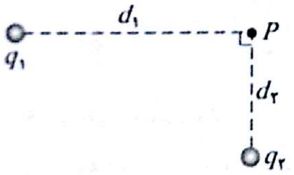
$$V_۰=\frac{kq}{R}=\frac{(۹\times۱۰^{۹})(۳۰\times۱۰^{-۹})}{۰/۰۳}=۹\times۱۰^{۳}\ V=V_A$$

$$V_B=\frac{kq}{r}=\frac{(۹\times۱۰^{۹})(۳۰\times۱۰^{-۹})}{۰/۰۵}=۵/۴\times۱۰^{۳}\ V$$

$$V_۰-V_B=۹\times۱۰^{۳}-۵/۴\times۱۰^{۳}=۳/۶\times۱۰^{۳}\ V$$

(ب) $V_A-V_B=V_۰-V_B=۳/۶\times۱۰^{۳}\ V$

۷۳- در شکل ۲۰–۵۸، نقطهٔ P در فاصلهٔ $d_۱=۴/۰۰ m$ از ذرهٔ ۱ $(q_۱=-۲e)$ و در فاصلهٔ $d_۲=۲/۰۰ m$ از ذرهٔ ۲ $(q_۲=+۲e)$ قرار دارد و هر دو ذره در مکانهای خود ثابت‌اند. (الف) به ازای $V=۰$ در بینهایت، V در نقطهٔ P چقدر است؟ اگر ذره‌ای به بار $q_۳=+۲e$ را از بینهایت به نقطهٔ P بیاوریم، (ب) چقدر کار باید انجام دهیم؟ و (پ) انرژی پتانسیل این دستگاه سه ذره‌ای چقدر است؟



شکل ۲۰–۵۸ مسئلهٔ ۷۳

حل: (الف)

$$V=\frac{kq_۱}{d_۱}+\frac{kq_۲}{d_۲}\Rightarrow$$

$$V=\frac{(۹\times۱۰^{۹})(-۲)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{۴}+\frac{(۹\times۱۰^{۹})(۲)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{۲}\Rightarrow$$

$$V=-۷/۲\times۱۰^{-۱۰}+۱/۴۴\times۱۰^{-۹}=۷/۲\times۱۰^{-۱۰}\ V$$

(ب) $w=q_۲V=(۲)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۷/۲\times۱۰^{-۱۰})$

$=۲/۳۰۴\times۱۰^{-۲۸}\ J$

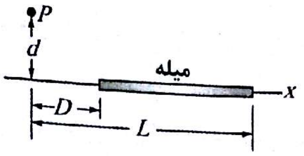
(پ)

$$V=\frac{kq_۱q_۲}{\sqrt{d_۱^۲+d_۲^۲}}+w=\frac{(۹\times۱۰^{۹})(-۲\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۲\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{\sqrt{۱۶+۴}}$$

$+۲/۳۰۴\times۱۰^{-۲۸}\Rightarrow$

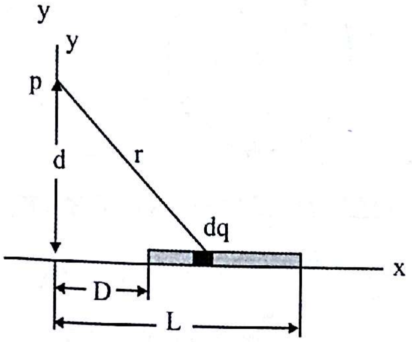
$V=۲/۴۳\times۱۰^{-۲۹}\ J$

۷۴- شکل ۲۰–۵۹ میلهٔ باریکی با چگالی بار یکنواخت $۲/۰۰ \mu C/m$ را نشان می‌دهد. در صورتی‌که $d=D=L/۴/۰۰$ باشد، پتانسیل الکتریکی را در نقطهٔ P محاسبه کنید.



شکل ۲۰-۵۹ مسئلهٔ ۷۴

حل:



$$dV=\frac{kdq}{r}=\frac{k\lambda dx}{\sqrt{x^۲+d^۲}}$$

$$V=k\lambda\int_{x=D}^{L}\frac{dx}{\sqrt{x^۲+d^۲}}=$$

$$k\lambda\left[\ln\left(x+\sqrt{x^۲+d^۲}\right)\right]_D^L=k\lambda\times\ln\frac{L+\sqrt{L^۲+d^۲}}{D+\sqrt{D^۲+d^۲}}\Rightarrow$$

$$V=(۹\times۱۰^۹)(۲\times۱۰^{-۶})\ln\left[\frac{۴D+\sqrt{۱۶D^۲+D^۲}}{D+\sqrt{۲D^۲}}\right]$$

$$=(۱۸۰۰)\ln\left[\frac{۸/۱۲}{۲/۴۱}\right]=۲/۱۸۶\times۱۰^۴\ \text{V}$$

۷۵- سه بار $+۰/۱۲\,\text{C}$ تشکیل مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع $۱/۷\,\text{m}$ را می‌دهند. با استفاده از انرژی وارد شده با آهنگ $۰/۸۳\,\text{kW}$ ، چند روز لازم است تا یکی از بارها به نقطهٔ میانی خط واصل دو بار دیگر آورده شود؟ SSM

حل:

$$W=\Delta U\ ,\ U_i=(۳)(۹\times۱۰^۹)\frac{(۰/۱۲)^۲}{۱/۷}=۲/۲۸۷\times۱۰^۸\ \text{J}$$

$$U_f=(۲)(۹\times۱۰^۹)\frac{(۰/۱۲)^۲}{۰/۸۶}+(۹\times۱۰^۹)\frac{(۰/۱۲)^۲}{۱/۷}=۳/۷۸\times۱۰^۸\ \text{J}$$

$$W=۳/۸۷\times۱۰^۸-۲/۲۸۷\times۱۰^۸=۱/۴۹\times۱۰^۸\ \text{J}$$

$$t=\frac{W}{p}=\frac{۱/۴۹\times۱۰^۸}{۰/۸۳\times۱۰^۳}=۱/۸\times۱۰^۵\ \text{s}=۲/۱\ \text{(روز)}$$

۷۶- بزرگی E یک میدان الکتریکی، با رابطهٔ $E=A/r^۴$ به فاصلهٔ شعاعی r بستگی دارد، که در آن A ثابتی با یکای ولت-متر مکعب است. برحسب مضربی از A، بزرگی اختلاف پتانسیل الکتریکی میان $r=۲/۰۰\,\text{m}$ و $r=۳/۰۰\,\text{m}$ چقدر است؟

حل:

$$V_۲-V_۱=-\int_{r_۱}^{r_۲}\vec{E}.\vec{dr}=-\int_۲^۳\frac{A}{r^۴}dr=A\left(\frac{۱}{۳r^۳}\right)_۲^۳=$$

$$\frac{A}{۳}\left(\frac{۱}{۲۷}-\frac{۱}{۸}\right)=۲/۹۳\times۱۰^{-۲}A\ \ \text{V}$$

۷۷- استوانهٔ رسانای توپر و بلندی دارای شعاع $۲/۰\text{cm}$ است. میدان الکتریکی روی سطح استوانه برابر با $۱۶۰\ \text{N/C}$ و جهت آن به طور شعاعی به طرف بیرون است. A، B، و C را نقطه‌هایی در نظر می‌گیریم که به ترتیب در فاصلهٔ $۱/۰\text{cm}$، $۲/۰\,\text{cm}$ و $۵/۰\text{cm}$ از محور مرکزی استوانه قرار دارند. (الف) بزرگی میدان الکتریکی در C و اختلاف پتانسیلهای الکتریکی (ب) V_B-V_C و (پ) V_A-V_B چقدر است؟

حل: (الف)

$$\oint_S\vec{E}\cdot\hat{n}ds=\frac{q}{\varepsilon_\circ}\Rightarrow E۲\pi r\ell=\frac{\sigma۲\pi R\ell}{\varepsilon_\circ}\Rightarrow E=\frac{\sigma R}{\varepsilon\cdot r}$$

در نقطه B (روی سطح استوانه) $r=R$ است:

$$۱۶۰=\frac{(\sigma)(۰/۰۲)}{(\varepsilon_\circ)(۰/۰۲)}\Rightarrow\sigma=۱/۴۱۶\times۱۰^{-۹}\ \text{C/m}^۲$$

$$E_C=\frac{\sigma R}{\varepsilon_\circ r}=\frac{(۱/۴۱۶\times۱۰^{-۹})(۰/۰۲)}{(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۰/۰۵)}=۶۴\ \text{V/m}$$

(ب)

$$V_C-V_B=-\int_{r_B}^{r_C}\vec{E}\cdot\vec{dr}=-\int_{۰/۰۲}^{۰/۰۵}\frac{\sigma R}{\varepsilon_\circ r}dr=\frac{-\sigma R}{\varepsilon_\circ}\ln r\Big]_{۰/۰۲}^{۰/۰۵}$$

$$=\frac{-(۱/۴۱۶\times۱۰^{-۹})(۰/۰۲)}{(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})}\ln\frac{۰/۰۵}{۰/۰۲}=-۲/۹۳\ \text{V}$$

$$\Rightarrow V_B-V_C=۲/۹۳\ \text{V}$$

(پ) چون میدان الکتریکی در تمام نقاط درون استوانه صفر است، پتانسیل درون آن یکنواخت است و برابر پتانسیل در سطح استوانه می‌باشد.

$$V_A-V_B=۰$$

۷۸- (الف) اگر کرهٔ زمین دارای چگالی بار سطحی خالص $۱/۰\ \text{electron/m}^۲$ باشد (یک فرض بسیار غیر واقعی)، پتانسیل آن چقدر خواهد بود؟ (فرض کنید در بینهایت $V=۰$ است.) (ب) بزرگی و (پ) جهت (به طور شعاعی به طرف درون یا به طرف بیرون) میدان الکتریکی ناشی از کرهٔ زمین درست در بیرون سطح آن چگونه می‌شد؟

حل: (الف)

$$V=\frac{kq}{R}=\frac{k\sigma\varepsilon\pi R^۲}{R}=k\sigma\varepsilon\pi R=$$

$$۴\pi(۹\times۱۰^۹)(-۱\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۶/۴\times۱۰^۶)=-۰/۱۱۶\text{V}$$

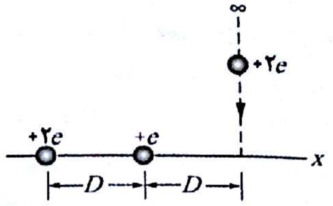
(ب)

$$E=\frac{kq}{R^۲}=\frac{V}{R}=\frac{-۰/۱۱۶}{۶/۴\times۱۰^۶}=-۱/۸۱\times۱۰^{-۸}\ \text{V/m}$$

(پ) چون بار منفی است جهت میدان الکتریکی به طور شعاعی و رو به داخل است.

۷۹- در شکل ۲۰-۶۰، ذره‌ای به بار $+۲e$ را از بینهایت تا محور x حرکت می‌دهیم. چقدر کار باید انجام دهیم؟ فاصلهٔ D برابر با $۴/۰۰\text{m}$ است.

Scanned by CamScanner

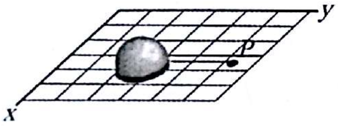


شکل ۲۰-۶۰ مسئلهٔ ۷۹

حل: ابتدا پتانسیل بارهای $q_۱$ و $q_۲$ را در نقطه O به دست می‌آوریم.

$$V=\frac{kq_۱}{۲D}+\frac{kq_۲}{D}=\frac{(۹\times۱۰^{۹})(-۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{(۲)(۴)}+\frac{(۹\times۱۰^{۹})(-۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{۴}$$
$$=-۷/۲\times۱۰^{-۱۰}\ (V)$$
$$W=q_۳V=(۲)(-۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(-۷/۲\times۱۰^{-۱۰})$$
$$=۲/۳۰۴\times۱۰^{-۲۸}\ \text{J}$$

۸۰- شکل ۲۰-۶۱ نیمکره‌ای با بار $۴/۰۰\mu C$ را نشان می‌دهد که این بار به طور یکنواخت در سرتاسر حجم آن توزیع شده است. این نیمکره مثل گریپ فروت نصفه‌ای که ممکن است طرف صاف آن روی میز آشپزخانه باشد، در صفحهٔ xy قرار دارد. نقطهٔ P که روی صفحه واقع شده است در امتداد یک خط شعاعی از مرکز خمیدگی نیمکره، به فاصلهٔ شعاعی ۱۵ cm قرار دارد. انرژی پتانسیل ناشی از نیمکره در نقطهٔ P چقدر است؟



شکل ۲۰-۶۱ مسئلهٔ ۸۰

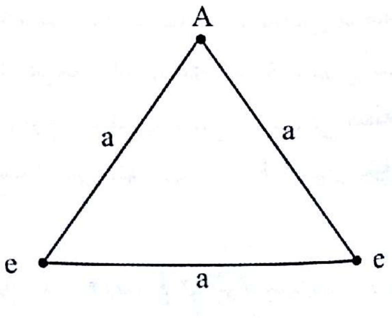
حل: پتانسیل نیمکره نصف پتانسیل کره کامل است (چون پتانسیل یک کمیت نرده‌ای است) که بار $۸\mu c$ دارد.

$$V=\frac{۱}{۲}\frac{kq}{r}=\left(\frac{۱}{۲}\right)\frac{(۹\times۱۰^{۹})(۸\times۱۰^{-۶})}{۰/۱۵}=۲/۴\times۱۰^{۵}\ \text{V}$$

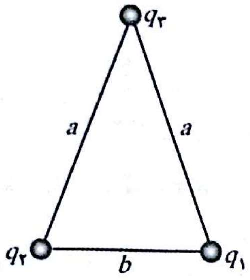
۸۱- در ابتدا دو الکترون به فاصلهٔ $۲/۰۰\mu m$ در مکان‌های خود ثابت شده‌اند. برای آنکه بار سومی را برای تشکیل یک مثلث متساوی الاضلاع از بینهایت بیاوریم، چه مقدار کار باید انجام دهیم؟

حل: ابتدا پتانسیل دوبار ۱ و ۲ را در نقطه A به دست می‌آوریم.

$$V=\frac{۲ke}{a}=\frac{(۲)(۹\times۱۰^{۹})(-۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{۲\times۱۰^{-۶}}=-۱/۴۴\times۱۰^{-۳}\ \text{V}$$
$$W=qV=(-۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(-۱/۴۴\times۱۰^{-۳})=۲/۳\times۱۰^{-۲۲}\ \text{J}$$



۸۲- سه ذره با بارهای $q_۱=+۱۰\mu C$ ، $q_۲=-۲۰\mu C$ و $q_۳=+۳۰\mu C$ در گوشه‌های مثلث متساوی الساقین نشان داده شده در شکل ۲۰-۶۲ قرار گرفته‌اند. اگر $a=۱۰\text{cm}$ و $b=۶/۰\text{cm}$ باشد، یک عامل خارجی چقدر کار باید انجام دهد تا جای بارهای (الف) $q_۱$ و $q_۳$ ، و (ب) $q_۱$ و $q_۲$ را با هم عوض کند؟



شکل ۲۰-۶۲ مسئلهٔ ۸۲

حل:

$$W_i=\frac{kq_۱q_۲}{b}+\frac{kq_۱q_۳}{a}+\frac{kq_۲q_۳}{a}$$
$$=\frac{(۹\times۱۰^{۹})(۱۰\times۱۰^{-۶})(-۲۰\times۱۰^{-۶})}{۰/۰۶}$$
$$+\frac{(۹\times۱۰^{۹})(۱۰\times۱۰^{-۶})(-۲۰\times۱۰^{-۶})}{۰/۱}$$
$$+\frac{(۹\times۱۰^{۹})(-۲۰\times۱۰^{-۶})(-۳۰\times۱۰^{-۶})}{۰/۱}$$
$$=-۳۰+۲۷-۵۴=-۵۷\ \text{J}$$

(الف)

$$W_f=\frac{kq_۱q_۲}{a}+\frac{kq_۱q_۳}{a}+\frac{kq_۲q_۳}{b}$$
$$=\frac{(۹\times۱۰^{۹})(۱۰\times۱۰^{-۶})(-۲۰\times۱۰^{-۶})}{۰/۱}$$
$$+\frac{(۹\times۱۰^{۹})(۱۰\times۱۰^{-۶})(۳۰\times۱۰^{-۶})}{۰/۱}$$
$$+\frac{(۹\times۱۰^{۹})(-۲۰\times۱۰^{-۶})(۳۰\times۱۰^{-۶})}{۰/۰۶}$$
$$=-۱۸+۲۷-۹۰=-۸۱\ \text{J}$$
$$W=W_f-W_i=-۸۱-(-۵۷)=-۲۴\ \text{J}$$

(ب)

$$W=W_f-W_i=۰$$

۸۳- (الف) اگر بار خالص یک کرهٔ رسانای منزوی به شعاع ۱۰cm برابر با $۴/۰\mu C$ و در بینهایت $V=۰$ باشد، پتانسیل روی سطح این کره چقدر است؟ (ب) با فرض اینکه هوای اطراف این کره وقتی که بزرگی میدان الکتریکی از ۳/۰MV/m تجاوز کند دچار فروریزش الکتریکی شود، آیا این وضعیت واقعاً رخ می‌دهد؟

حل: (الف)

$$V=\frac{kq}{r}=\frac{(۹\times۱۰^{۹})(۴\times۱۰^{-۶})}{۰/۱}=۳/۶\times۱۰^{۵}\ \text{V}$$

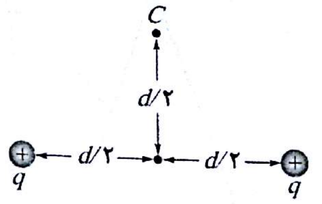
(ب)

$$E=\frac{kq}{r^{۲}}=\frac{(۹\times۱۰^{۹})(۴\times۱۰^{-۶})}{(۰/۱)}$$
$$=۳/۶\times۱۰^{۶}\ \text{V/m}>۳\times۱۰^{۶}\ \text{V/m}$$

پس این وضعیت رخ نمی‌دهد.

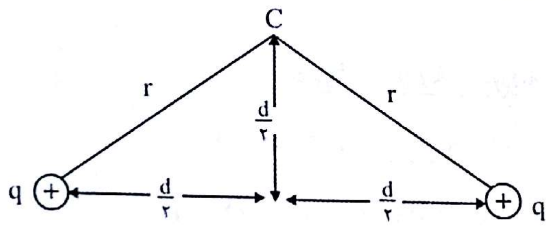
Scanned by CamScanner

۸۴- دو بار $q=+۲/۰\,\mu C$ در فاصلهٔ $d=۲/۰\,cm$ از یکدیگر ثابت شده‌اند (شکل ۲۰-۶۳). (الف) به ازای $V=۰$ در بینهایت، پتانسیل الکتریکی در نقطهٔ C چقدر است؟ (ب) بار سوم $q=+۲/۰\,\mu C$ را از بینهایت به نقطهٔ C می‌آوریم. برای این منظور، چقدر کار باید انجام دهیم؟ (پ) انرژی پتانسیل U پیکربندی سه بار هنگامی که بار سوم در مکان خود قرار گیرد، چقدر است؟



شکل ۲۰-۶۳ مسئلهٔ ۸۴

حل: (الف)



$$r=\frac{\sqrt{۲}d}{۲}$$

$$V_C=\frac{۲kq}{r}=\frac{(۲)(۹\times۱۰^۹)(۲\times۱۰^{-۶})}{\left(\frac{۰/۰۲\sqrt{۲}}{۲}\right)}=۲/۵۵\times۱۰^۶\ V$$

(ب)

$$W=qV=(۲\times۱۰^{-۶})(۲/۵۵\times۱۰^۶)=۵/۱\ J$$

(پ)

$$W=۵/۱+\frac{(۹\times۱۰^۹)(۲\times۱۰^۶)}{۰/۰۲}=۶/۹\ J$$

۸۵- بار یکنواخت $+۱۶/۰\,\mu C$ روی حلقهٔ دایره‌ای باریکی، واقع بر صفحهٔ xy و به مرکز مبداء آن صفحه، قرار گرفته است. شعاع حلقه ۳/۰۰cm است. اگر نقطهٔ A در مبدأ و نقطهٔ B روی محور z در $z=۴/۰۰cm$ باشد، V_B-V_A چقدر است؟ SSM

حل: پتانسیل یک حلقه با توزیع بار یکنواخت روی محور آن از رابطه مقابل به دست می‌آید.

$$V=\frac{kq}{\sqrt{z^۲+R^۲}}$$

در نقطه A (مرکز حلقه) $z=۰$ است.

$$V_A=\frac{kq}{R}=\frac{(۹\times۱۰^۹)(۱۶\times۱۰^{-۶})}{۰/۰۳}=۴/۸\times۱۰^۶\ V$$

$$V_B=\frac{(۹\times۱۰^۹)(۱۶\times۱۰^{-۶})}{\sqrt{(۰/۰۴)^۲+(۰/۰۳)^۲}}=۲/۸۸\times۱۰^۶\ V$$

$$V_B-V_A=۲/۸۸\times۱۰^۶-۴/۸\times۱۰^۶=-۱/۹۲\times۱۰^۶\ V$$

۸۶- بارها و مختصات دو بار نقطه‌ای که در صفحهٔ xy قرار دارند عبارت‌اند از $q_1=+۳/۰۰\times۱۰^{-۶}\,C$ ، $x=+۳/۵۰cm$ ، $y=+۵/۰۰cm$ و $q_2=-۴/۰۰\times۱۰^{-۶}\,C$ ، $x=-۲/۰۰cm$ ، $y=+۱/۵۰cm$. چقدر کار باید انجام گیرد تا این بارها با شروع از فاصلهٔ نامتناهی در مکانهای خود قرار گیرند؟

حل: ابتدا فاصله دوبار را به دست می‌آوریم.

$$r=\sqrt{\Delta x^۲+\Delta y^۲}=\sqrt{(۵/۵)^۲+(۳/۵)^۲}=۶/۵۲cm$$

$$W=W_1+W_2=۰+\frac{kq_1q_2}{r}=\frac{(۹\times۱۰^۹)(۳\times۱۰^{-۶})(-۴\times۱۰^{-۶})}{۰/۰۶۵۲}=۱/۶۶J$$

۸۷- دو صفحهٔ رسانای تخت، موازی و باردار که به فاصلهٔ $d=۱/۰۰cm$ از یکدیگر قرار گرفته‌اند، اختلاف پتانسیلی برابر با $\Delta V=۶۲۵\ V$ میان صفحه‌ها ایجاد می‌کنند. یک الکترون از سطح یکی از صفحه‌ها به طور مستقیم به طرف دیگری پرتاب می‌شود. اگر این الکترون درست روی سطح صفحهٔ دوم متوقف شود، تندی اولیهٔ آن چقدر است؟

حل:

$$K=\Delta U=e\Delta V=(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۶۲۵)=۱\times۱۰^{-۱۶}\ J$$

$$K=\frac{۱}{۲}mv^۲\Rightarrow ۱\times۱۰^{-۱۶}=\left(\frac{۱}{۲}\right)(۹/۱\times۱۰^{-۳۱})v^۲$$

$$\Rightarrow v=۱/۴۸\times۱۰^۷\ m/s$$

۸۸- ذره‌ای با بار مثبت Q در نقطهٔ P ثابت شده است. ذرهٔ دومی به جرم m و بار $-q$ با تندی ثابت روی دایره‌ای به شعاع r_1 و به مرکز P حرکت می‌کند. عبارتی برای کار W که باید توسط یک عامل خارجی روی ذرهٔ دوم انجام گیرد تا شعاع دایرهٔ حرکت آن به r_2 افزایش یابد، به دست آورید.

حل: ذره با بار $-q$ هم انرژی پتانسیل و هم انرژی جنبشی دارد. نیروی جانب مرکز برابر نیروی جاذبه کولنی است.

$$F=\frac{mv^۲}{r}=\frac{kqQ}{r^۲}\Rightarrow mv^۲=\frac{kqQ}{r}$$

$$K=\frac{۱}{۲}mv^۲=\frac{kqQ}{۲r}=\frac{qQ}{۸\pi\varepsilon_0 r}\ ,\ v=\frac{-qQ}{۴\pi\varepsilon_0 r}$$

$$E=K+U=\frac{qQ}{۸\pi\varepsilon_0 r}-\frac{qQ}{۴\pi\varepsilon_0 r}=-\frac{qQ}{۸\pi\varepsilon_0 r}$$

$$W=E_2-E_1=\frac{-qQ}{۸\pi\varepsilon_0 r_2}-\frac{-qQ}{۸\pi\varepsilon_0 r_1}=\frac{qQ}{۸\pi\varepsilon_0}\left(\frac{۱}{r_1}-\frac{۱}{r_2}\right)$$

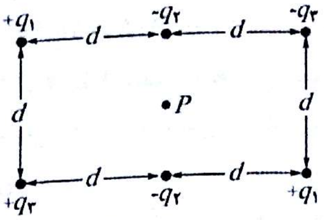
۸۹- میدان الکتریکی که غالباً در نزدیکی سطح کرهٔ زمین مشاهده می‌شود تقریباً برابر با ۱۰۰V/m است. اگر این میدان روی کل سطح زمین باشد، پتانسیل الکتریکی نقطه‌ای روی این سطح چقدر است؟ (در بینهایت $V=۰$ اختیار کنید.)

حل:

$$V=\frac{kq}{r}=Er=(۱۰۰)(۶/۴\times۱۰^۶)=۶/۴\times۱۰^۸\ V$$

Scanned by CamScanner

۹۰- در شکل ۲۰-۶۴، نقطهٔ P در مرکز مستطیل قرار دارد. به ازای $V=0$ در بینهایت، $q_1=5.00\ \text{fC}$ ، $q_2=2.00\ \text{fC}$ ، $q_3=3.00\ \text{fC}$ و $d=2.54\ \text{cm}$. پتانسیل الکتریکی خالص ناشی از شش ذرهٔ باردار در نقطهٔ P چقدر است؟



شکل ۲۰-۶۴ مسئلهٔ ۹۰

حل:

$$V=\frac{kq_1}{\sqrt{d^2+d^2/4}}-\frac{kq_2}{\frac{d}{2}}+\frac{-kq_3}{\sqrt{d^2+d^2/4}}+\frac{kq_1}{\sqrt{d^2+d^2/4}}-$$

$$\frac{kq_2}{\frac{d}{2}}=\frac{kq_3}{\sqrt{d^2+d^2/4}}=\frac{2kq_1}{\sqrt{5}d}-\frac{2kq_2}{d}-\frac{2kq_3}{\sqrt{5}d}+\frac{2kq_1}{\sqrt{5}d}-\frac{2kq_2}{d}+\frac{2kq_3}{\sqrt{5}d}=$$

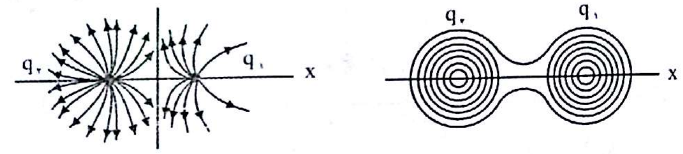
$$\frac{4kq_1}{\sqrt{5}d}-\frac{4kq_2}{d}=\frac{(4)(9\times10^{9})(5\times10^{-15})}{(\sqrt{5})(2.54\times10^{-2})}-\frac{(4)(9\times10^{9})(2\times10^{-15})}{(2.54\times10^{-2})}\Rightarrow$$

$$V=3.17\times10^{-3}-2.83\times10^{-3}=3.4\times10^{-4}\ \text{V}$$

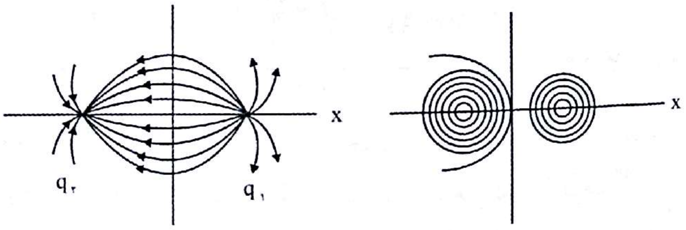
۹۱- شکل ۲۰-۳۳، دو ذرهٔ باردار را روی یک محور نشان می‌دهد. خطهای میدان الکتریکی و سطحهای هم‌پتانسیل را در صفحهٔ کاغذ به ازای (الف) $q_1=+q$ ، $q_2=+2q$ و (ب) $q_1=+q$ ، $q_2=-3q$ رسم کنید.

حل: سطوح هم پتانسیل عمود بر خطوط میدان هستند.

(الف)



(ب)



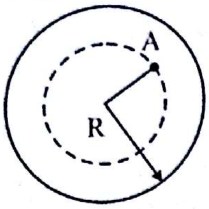
۹۲- بار q به طور یکنواخت در سرتاسر یک حجم کروی به شعاع R توزیع شده است. فرض کنید در بینهایت $V=0$ باشد. (الف) V در فاصلهٔ شعاعی $r<R$ و (ب) اختلاف پتانسیل میان نقطه‌های واقع بر $r=R$ و نقطهٔ $r=0$ چقدر است؟

حل: (الف)

$$E=\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}=\frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

$$V_{(r)}-V_{(A)}=-\int_{r=R}^{r}\vec{E}.\vec{dr}=-\int_R^r\frac{qrdr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\Rightarrow$$

$$V_{(r)}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}=-\frac{q(r^2-R^2)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\Rightarrow V_{(r)}=\frac{q(3R^2-r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$



(ب)

$$V_{(0)}=\frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R}\Rightarrow V_{(R)}-V_{(0)}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}-\frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R}=\frac{-q}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

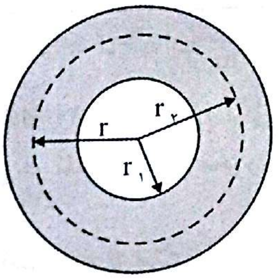
۹۳- یک پوستهٔ کروی ضخیم با بار Q و چگالی بار حجمی یکنواخت ρ در شعاعهای r_1 و $r_2>r_1$ محدود شده است. به ازای $V=0$ در بینهایت، پتانسیل الکتریکی V را برحسب تابعی از فاصلهٔ r از مرکز این توزیع بار، با در نظر گرفتن ناحیه‌های (الف) $r>r_2$ ، (ب) $r_2>r>r_1$ ، و (پ) $r<r_1$ ، به دست آورید. (ت) آیا این پاسخها در $r=r_2$ و $r=r_1$ با یکدیگر سازگارند؟ (*راهنمایی*: بخش ۱۹-۹ را ببینید.)

حل: (الف)

$$r>r_2\Rightarrow E=\frac{kQ}{r^2}$$

$$V_{(r)}-V_{(\infty)}=-\int_{r=\infty}^{r}\vec{E}.\vec{dr}=$$

$$-\int_\infty^r\frac{kQ}{r^2}dr\Rightarrow V_{(r)}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\rho(r_2^3-r_1^3)}{3\varepsilon_0 r}$$



(ب)

$$r_1<r<r_2\ ,\ V_{(r_2)}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}\ ,\ \oint_S E\cdot nds=\frac{q}{\varepsilon_0}\Rightarrow$$

$$E4\pi r^2=\frac{\rho\frac{4}{3}\pi(r^3-r_1^3)}{\varepsilon_0}\Rightarrow E_{(r)}=\frac{\rho(r^3-r_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}$$

$$V_{(r)}-V_{(r_2)}=-\int_{r_2}^{r}\frac{\rho(r^3-r_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}dr\Rightarrow$$

$$V_{(r)}-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}=\frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\int_{r_2}^{r}\left(r-\frac{r_1^3}{r^2}\right)dr=\frac{-Q}{\frac{4}{3}\pi(r_2^3-r_1^3)\times3\varepsilon_0}\left[\frac{r^2}{2}+\frac{r_1^3}{r}\right]_{r_2}^{r}$$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(r_2^3-r_1^3)}\left(\frac{r^2}{2}+\frac{r_1^3}{r}-\frac{r_2^2}{2}-\frac{r_1^3}{r_2}\right)=$$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2(r_2^3-r_1^3)}\left(r_2^3-r_1^3-\frac{r_2r^2}{2}-\frac{r_2r_1^3}{r}+\frac{r_2^3}{2}+r_1^3\right)\Rightarrow$$

Scanned by CamScanner

$$V_{(r)} = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۰(r_۲^۳ - r_۱^۳)}\left(\frac{۳}{۲}r_۲^۲ + \frac{r^۲}{۲} - \frac{r_۱^۳}{r}\right) = \frac{\rho}{۳\varepsilon_۰}\left(\frac{۳r_۲^۲}{۲} - \frac{r^۲}{۲} - \frac{r_۱^۳}{r}\right)$$

(ب) ابتدا پتانسیل را در $r = r_۱$ به دست می‌آوریم:

$$V_{(r_۱)} = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۰(r_۲^۳ - r_۱^۳)}\left(\frac{۳}{۲}r_۲^۲ - \frac{r_۱^۲}{۲} - r_۱^۲\right) \Rightarrow$$

$$V_{(r_۱)} = \frac{۳Q(r_۲^۲ - r_۱^۲)}{۸\pi\varepsilon_۰(r_۲^۳ - r_۱^۳)} = \frac{\rho}{۲\varepsilon_۰}(r_۲^۲ - r_۱^۲)$$

در ناحیه $r < r_۱$ هیچ باری وجود ندارد و $E = ۰$ است. پس پتانسیل ثابت و برابر مقدار بالا است.

(ت) بله. به ازای $r = r_۲$ پاسخ قسمت‌های الف و ب هر دو برابر $V = \frac{\rho}{۳\varepsilon_۰}\left(r_۲^۲ - \frac{r_۱^۳}{r_۲}\right)$ می‌شود و به ازای $r = r_۱$ پاسخ قسمت‌های ب و پ $V = \frac{\rho}{۲\varepsilon_۰}(r_۲^۲ - r_۱^۲)$ می‌شود.

۹۴- یک ذرهٔ آلفا (که دارای دو پروتون است) به طور مستقیم به طرف هستهٔ هدفی که شامل ۹۲ پروتون است پرتاب می‌شود. انرژی جنبشی اولیهٔ ذرهٔ آلفا برابر با ۰/۴۸ pJ است. با فرض اینکه هستهٔ هدف حرکت نکند، کمترین فاصلهٔ مرکز به مرکزی که ذرهٔ آلفا به هستهٔ هدف می‌رسد چقدر است؟

حل: ذره α آنقدر به هسته هدف نزدیک می‌شود که به طور لحظه‌ای می‌ایستد.

$$E_i = E_f \Rightarrow k_i + ۰ = ۰ + \frac{k(۲e)(ze)}{r} \Rightarrow$$

$$۰/۴۸\times۱۰^{-۱۲} = \frac{(۹\times۱۰^۹)(۲)(۹۲)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})^۲}{r}$$

$$\Rightarrow r = ۸/۸۳\times۱۰^{-۱۴}\ \text{m}$$

۹۵- با شروع از معادلهٔ ۲۰-۳۰، عبارتی برای میدان الکتریکی ناشی از یک دوقطبی در نقطه‌ای روی محور دوقطبی به دست آورید.

حل: روی محور دوقطبی $\theta = ۰$ است.

$$V = \frac{P}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}$$

$$E_{(r)} = -\frac{dV}{dr} = \frac{-P}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۳}\frac{d}{dr}\left(\frac{۱}{r^۲}\right) = \frac{P}{۲\pi\varepsilon_۰ r^۳}$$

۹۶- بار $۱/۵۰\times۱۰^{-۸}$ C روی یک کرهٔ فلزی منزوی به شعاع ۱۶/۰ cm قرار گرفته است. به ازای $V = ۰$ در بینهایت، پتانسیل الکتریکی در نقطه‌های روی سطح این کره چقدر است؟

حل:

$$V = \frac{kq}{r} = \frac{(۹\times۱۰^۹)(۱/۵\times۱۰^{-۸})}{۰/۱۶} = ۸۴۳/۸\ \text{V}$$

۹۷- در آزمایش قطرهٔ روغن *میلیکان* (بخش ۱۸-۸)، میدان الکتریکی یکنواختی به بزرگی $۱/۹۲\times۱۰^۵$ N/C در ناحیهٔ میان دو صفحه که به فاصلهٔ ۱/۵۰ cm از هم قرار دارند، ایجاد می‌شود. اختلاف پتانسیل الکتریکی میان صفحه‌ها را به‌دست آورید.

حل:

$$\Delta V = Ed = (۱/۹۲\times۱۰^۵)(۰/۰۱۵) = ۲/۸۸\times۱۰^۳\ \text{V}$$

۹۸- بار نقطه‌ای $q = ۱/۵۰\times۱۰^{-۸}$ C را در نظر بگیرید و فرض کنید در بینهایت $V = ۰$ است. (الف) شکل و ابعاد سطح هم‌پتانسیل به پتانسیل ۳۰/۰ V ناشی از فقط بار q، چیست؟ (ب) آیا سطحهایی که پتانسیل آنها به مقدار ثابتی با هم تفاوت دارند (مثلاً ۱/۰ V) به فاصلهٔ یکسانی از هم قرار گرفته‌اند؟

حل: (الف) سطوح هم پتانسیل یک بار نقطه‌ای، کروی می‌باشند

$$V = \frac{kq}{r} \Rightarrow ۳۰ = \frac{(۹\times۱۰^۹)(۱/۵\times۱۰^{-۸})}{r} \Rightarrow r = ۴/۵\ \text{m}$$

(ب) اگر پتانسیل تابعی خطی از r بود آنگاه سطوحی که به اندازه مقدار ثابتی تفاوت داشتند به فاصله یک نی واقع بودند ولی $V \propto \frac{۱}{r}$ است و بنابراین با افزایش r فاصله آنها بیشتر می‌شود.

۹۹- در مدل کوارکی ذره‌های بنیادی، پروتون از سه کوارک تشکیل شده است: دو کوارک «بالا»، هر یک با بار $+۲e/۳$، و یک کوارک «پایین» با بار $-e/۳$. فرض کنید که این سه کوارک به فاصلهٔ یکسانی از یکدیگر قرار گرفته‌اند. این فاصله را $۱/۳۲\times۱۰^{-۱۵}$ m در نظر بگیرید و انرژی پتانسیل الکتریکی دستگاه (الف) فقط شامل دو کوارک بالا و (ب) شامل هر سه کوارک را محاسبه کنید.

حل: (الف)

$$V = \frac{kq_۱^۲}{r} = \frac{(۹\times۱۰^۹)\left(\frac{۲}{۳}\right)^۲(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})^۲}{۱/۳۲\times۱۰^{-۱۵}} = ۷/۷۶\times۱۰^{-۱۴}\ \text{J}$$

(ب)

$$V = \frac{kq_۱^۲}{r} + ۲\frac{kq_۱q_۲}{r}$$

$$= ۷/۷۶\times۱۰^{-۱۴} + \frac{(۲)(۹\times۱۰^۹)\left(\frac{۲}{۳}\right)\left(\frac{-۱}{۳}\right)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})^۲}{۱/۳۲\times۱۰^{-۱۵}} = ۰$$

۱۰۰- (الف) پروتونی با انرژی جنبشی ۴/۸۰ MeV به طور رودررو به طرف یک هستهٔ سرب حرکت می‌کند. با فرض اینکه پروتون به داخل هسته نفوذ نکند و اینکه تنها نیروی بین پروتون و هسته نیروی کولنی باشد، کمترین فاصلهٔ مرکز به مرکز d_p بین پروتون و هسته را هنگامی که پروتون به توقف لحظه‌ای می‌رسد، محاسبه کنید. اگر پروتون با یک ذرهٔ آلفا (که دارای دو پروتون است) با همان انرژی جنبشی اولیه جایگزین شود، ذرهٔ آلفا در فاصلهٔ مرکز به مرکز d_α متوقف خواهد شد. (ب) نسبت d_α / d_p چقدر است؟

حل: (الف) چون هیچ نیرویی از خارج سیستم بر آن وارد نمی‌شود، انرژی پایسته می‌ماند.

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

Scanned by CamScanner

$$(۴/۸\times۱۰^{۶}\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹})+۰=۰+\frac{kze^{۲}}{r}\Rightarrow$$
$$۷/۶۸\times۱۰^{-۱۳}=\frac{(۹\times۱۰^{۹})(۸۲)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})^{۲}}{r}$$
$$\Rightarrow r=dp=۲/۴۶\times۱۰^{-۱۴}\ \text{m}$$

(ب)

$$K_i+۰=۰+\frac{k(۸۲e)(۲e)}{r}\Rightarrow r=d_\alpha=۲d_p\Rightarrow\frac{d\alpha}{dp}=۲$$

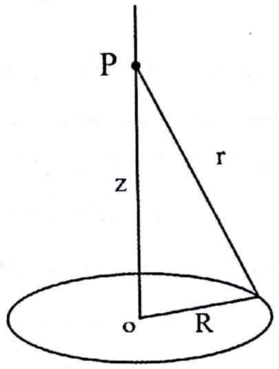
۱۰۱- (الف) با استفاده از معادلهٔ ۲۰-۳۲ نشان دهید که پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ای روی محور مرکزی یک حلقهٔ باریک (با بار q و شعاع R) و به فاصلهٔ z از حلقه برابر است با

$$V=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q}{\sqrt{z^{۲}+R^{۲}}}$$

(ب) با استفاده از این نتیجه، عبارتی برای E در نقطه‌های روی محور حلقه به دست آورید؛ نتیجهٔ خود را با محاسبهٔ E در بخش ۱۸-۶ مقایسه کنید.

حل: (الف) حلقه را به قسمت‌های کوچک تقسیم می‌کنیم.

$$dV=\frac{kdq}{r}=\frac{kdq}{\sqrt{z^{۲}+R^{۲}}}\Rightarrow$$
$$V=k\int\frac{dq}{\sqrt{z^{۲}+R^{۲}}}=\frac{k}{\sqrt{z^{۲}+R^{۲}}}\int dq=\frac{kq}{\sqrt{z^{۲}+R^{۲}}}$$

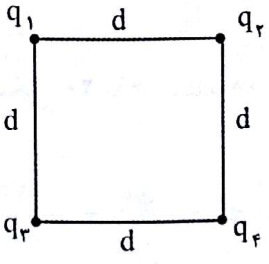


(ب)
$$E=-\frac{dV}{dz}=-kq\frac{-z}{(z^{۲}+R^{۲})^{۳/۲}}=\frac{kqz}{(z^{۲}+R^{۲})^{۳/۲}}$$

۱۰۲- انرژی پتانسیل الکتریکی پیکربندی بار شکل ۲۰-۸ (الف) چقدر است؟ از مقدارهای عددی مسئلهٔ نمونهٔ ۲۰-۳ استفاده کنید.

حل:

$q_۱=۱۲\text{nC}$, $q_۲=-۲۴\text{nC}$, $q_۳=۳۱\text{ nC}$
$q_۴=۱۷\text{nC}$, $d=۱/۳\text{m}$



(الف)
$$V=k\frac{q_۱q_۲}{d}+\frac{kq_۱q_۴}{\sqrt{۲}d}+\frac{kq_۱q_۳}{d}+\frac{kq_۲q_۴}{d}+\frac{kq_۲q_۳}{\sqrt{۲}d}+\frac{kq_۳q_۴}{d}\Rightarrow$$

$$U=\frac{(۹\times۱۰^{۹})}{۱/۳}\Big[(۱۲)(-۲۴)\times۱۰^{-۱۸}+\frac{(۱۲)(۱۷)\times۱۰^{-۱۸}}{\sqrt{۲}}+(۱۲)(۳۱)\times۱۰^{-۱۸}$$
$$(-۲۴)(۱۷)\times۱۰^{-۱۸}+\frac{(-۲۴)(۳۱)\times۱۰^{-۱۸}}{\sqrt{۲}}$$
$$+(۳۱)(۱۷)\times۱۰^{-۱۸}$$
$$=-۱/۲۴\times۱۰^{-۶}\ \text{J}$$

۱۰۳- یک کرهٔ مسی توپر به شعاع ۱/۰cm دارای پوشش سطحی نازکی از جنس نیکل است. بعضی از اتمهای نیکل پرتوزا هستند، یعنی به هنگام واپاشی یک الکترون گسیل می‌کنند. نیمی از این الکترونها وارد کرهٔ مسی می‌شوند و در آنجا هر یک 100keV انرژی از خود به جای می‌گذارند. نیم دیگر الکترونها، هر یک با بار $-e$، می‌گریزند. پوشش نیکل دارای فعالیت $۳/۷۰\times۱۰^{۸}$ واپاشی پرتوزا در ثانیه است. این کره از تار نارسانای بلندی آویخته و از محیط اطراف خود منزوی شده است. (الف) چقدر طول می‌کشد تا پتانسیل کره به اندازهٔ 1000 V افزایش یابد؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا دمای کره بر اثر انرژی به جای گذاشته شده توسط الکترونها، به اندازهٔ ۵/۰K افزایش یابد؟ ظرفیت گرمایی کره ۱۴J/K است. SSM

حل:
$$\frac{q}{t}=(۳/۷\times۱۰^{۸})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})=۵/۹۶\times۱۰^{-۱۱}\ \text{C/s}$$

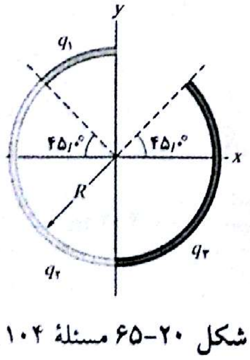
(الف) نیمی از این الکترون‌ها وارد کره می‌شود.

$$V=\frac{k\frac{q}{۲}}{R}\Rightarrow\frac{V}{t}=\frac{k\frac{q}{t}}{۲R}\Rightarrow$$
$$\frac{۱۰۰۰}{t}=\frac{(۹\times۱۰^{۹})(۵/۹۲\times۱۰^{-۱۱})}{(۲)(۰/۰۱)}\Rightarrow t=۳۷/۵\ \text{s}$$

(ب) انرژیی که به کره منتقل می‌شود برابر است با:

$$\frac{u}{t}=\left(\frac{۳/۷\times۱۰^{۸}}{۲}\right)\left(۱۰۰\times۱۰^{۳}\right)\left(۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\right)$$
$$\Rightarrow\frac{u}{t}=۲/۹۶\times۱۰^{-۶}\ \text{J/s}$$
$$Q=mc\Delta\theta=(۱۴)(۵)=۷۰\ \text{J}\ ,\ \frac{u}{t}=\frac{q}{t}$$
$$\Rightarrow ۲/۹۶\times۱۰^{-۶}=\frac{۷۰}{t}\Rightarrow t=۲/۳۶\times۱۰^{۷}\ \text{s}$$

۱۰۴- شکل ۲۰-۶۵ سه کمان دایره‌ای نارسانا به شعاع $R=۸/۵۰$ cm را نشان می‌دهد. بار روی کمانها عبارت‌اند از $q_۱=۴/۵۲$ pC ، $q_۲=-۲/۰۰q_۱$ ، $q_۳=+۳/۰۰q_۱$. به ازای $V=۰$ در بینهایت، پتانسیل الکتریکی خالص کمانها در مرکز مشترک خمیدگی چقدر است؟



شکل ۲۰-۶۵ مسئلهٔ ۱۰۴

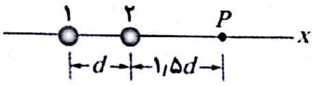
Scanned by CamScanner

حل: هر سه کمان به فاصله یکسانی از مکانی هستند که می‌خواهیم پتانسیل را محاسبه کنیم. همچنین در حل مسئله ۲۴ دیدیم که پتانسیل کمان به زاویه آن بستگی ندارد.

$$V=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R}+\frac{-2q_1}{4\pi\varepsilon_0 R}+\frac{3q_1}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{2q_1}{4\pi\varepsilon_0 R}\Rightarrow$$

$$V=\frac{(9\times10^{9})(2)(4/52\times10^{-12})}{0/085}=0/96\ \text{V}$$

۱۰۵- در شکل ۲۰-۶۶، دو ذره با بارهای q_1 و q_2 روی محور x ثابت شده‌اند. وقتی ذرهٔ سومی با بار $+6/0\,\mu C$ از فاصلهٔ نامتناهی به نقطهٔ P آورده شود، دستگاه سه ذره‌ای همان انرژی پتانسیل الکتریکی را خواهد داشت که دستگاه دو ذره‌ای اولیه داشته است. نسبت بار q_1/q_2 چقدر است؟



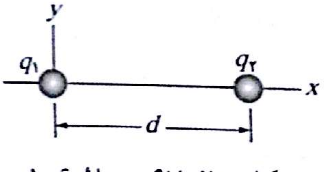
شکل ۲۰-۶۶ مسئلهٔ ۱۰۵

حل: چون انرژی مجموعه موقعی که ذره q_3 به نقطه P آورده می‌شود تغییر نمی‌کند، پتانسیل دوبار q_1 و q_2 در نقطه P صفر است. پس:

$$V_P=\frac{kq_1}{2/5d}+\frac{kq_2}{1/5d}=0$$

$$\Rightarrow\frac{q_1}{q_2}=\frac{-2/5}{1/5}=-\frac{5}{3}=-1/67$$

۱۰۶- در شکل ۲۰-۶۷، فاصلهٔ دو ذره را $1/0\,\text{m}$ در نظر بگیرید؛ فرض کنید بارهای آنها $q_1=+q$ و $q_2=+2q$ است و پتانسیل را در بینهایت $V=0$ اختیار کنید. در چه مختصهٔ متناهی روی محور x (الف) پتانسیل الکتریکی خالص ناشی از دو ذره صفر است؟ و (ب) میدان الکتریکی خالص ناشی از آنها صفر است؟



شکل ۲۰-۶۷ مسئلهٔ ۱۰۶

حل: (الف) چون دو بار مثبت هستند نقطه‌ای وجود ندارد که پتانسیل در آن صفر باشد.

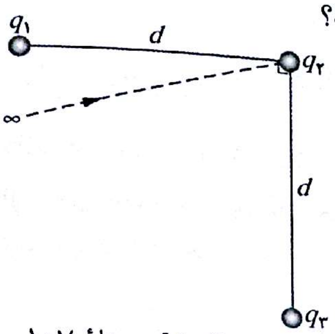
(ب) چون دو بار مثبت هستند، این نقطه روی محور x و بین دو بار و نزدیکتر به بار با اندازه کوچکتر است.

$$E_A=\frac{kq_1}{x^2}-\frac{kq_2}{(d-x)^2}=0\Rightarrow\frac{q}{x^2}=\frac{2q}{(d-x)^2}\Rightarrow$$

$$2x^2=(d-x)^2\Rightarrow\sqrt{2}x=d-x$$

$$\Rightarrow x=\frac{d}{\sqrt{2}+1}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=0/414\,\text{m}$$

۱۰۷- در شکل ۲۰-۶۸، ذره‌ای با بار $q_2=+5e$ در امتداد خط‌چین از بینهایت به نقطهٔ نشان داده شده در نزدیکی دو بار ثابت شدهٔ $q_1=+2e$ و $q_3=-q_1$ آورده می‌شود. نسبت پتانسیل الکتریکی این دستگاه سه ذره‌ای به دستگاه دو ذره‌ای اولیه چقدر است؟



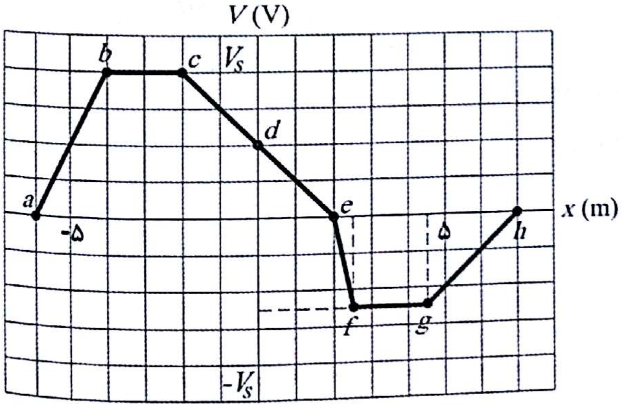
شکل ۲۰-۶۸ مسئلهٔ ۱۰۷

حل: ابتدا پتانسیل ناشی از q_1 و q_3 را در محل q_2 به دست می‌آوریم.

$$V=\frac{kq_1}{d}+\frac{kq_3}{d}=\frac{kq_1}{d}-\frac{kq_1}{d}=0$$

چون پتانسیل این نقطه صفر است، هیچ کاری باری تغییر مکان q_2 لازم نیست چون پتانسیل خالص ناشی از q_1 و q_3 درهر دو مکان ابتدایی و انتهایی بار متحرک صفر است. بنابراین تغییر انرژی پتانسیل سیستم برابر صفر است. پس نسبت موردنظر برابر ۱ است.

۱۰۸- در وضعیت معینی، پتانسیل الکتریکی در امتداد محور x مانند نمودار نشان داده شده در شکل ۲۰-۶۹ تغییر می‌کند. مقیاس محور قائم با $V_s=12/0V$ مشخص شده است. برای بازه‌های (الف) ab، (ب) bc، (پ) cd، (ت) de، (ث) ef، (ج) fg، (چ) gh، مؤلفهٔ x میدان الکتریکی را تعیین کنید، و سپس E_x را برحسب x رسم کنید. (از رفتار میدان در نقطه‌های انتهایی هر بازه چشمپوشی کنید.)



شکل ۲۰-۶۹ مسئلهٔ ۱۰۸

حل: (الف)

$$ab:-6<x<-4\Rightarrow E_x=-\frac{\Delta V}{\Delta x}=-\frac{12-0}{-4-(-6)}=-6\ \text{V/m}$$

(ب)

$$bc:-4<x<-2\Rightarrow E_x=-\frac{\Delta V}{\Delta x}=0$$

(پ)

$$cd:-2<x<0\Rightarrow E_x=-\frac{6-12}{0-(-2)}=3\ \text{V/m}$$

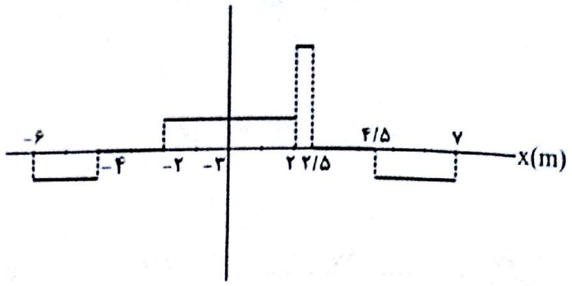
Scanned by CamScanner

$de: 0 < x < 2 \Rightarrow E_x = -\frac{0-6}{2-0} = 3\,\text{V/m}$ (ت)

$ef: 2 < x < 2/5 \Rightarrow E_x = -\frac{-7/5-0}{2/5-2} = 3\,\text{V/m}$ (ث)

$fg: 2/5 < x < 4/5 \Rightarrow E_x = 0$ (ج)

$gh: 4/5 < x < 7 \Rightarrow E_x = -\frac{0-(7/5)}{7-4/5} = -3\,\text{V/m}$ (چ)

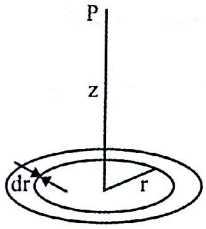


۱۰۹- شعاع قرصی برابر با $R = 2/20\,\text{cm}$ است. چگالی بار سطحی آن از $r = 0$ تا $r = R/2$ برابر با $1/50\times10^{-6}\,\text{C/m}^2$، و از $r = R/2$ تا $r = R$ برابر با $8/00\times10^{-7}\,\text{C/m}^2$ است. (الف) بار کل روی قرص چقدر است؟ (ب) به ازای $V = 0$ در بینهایت، پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ای روی محور مرکزی عمودی قرص، به فاصلهٔ $z = R/2$ از مرکز قرص چقدر است؟

حل: المان سطح را حلقه‌ای به شعاع r و ضخامت dr می‌گیریم.

$dA = 2\pi r dr$

$dq = \sigma dA = \sigma 2\pi r dr$



(الف)

$$Q = \int \sigma dA = \int_{r=0}^{0/011} (1/5\times10^{-6}) 2\pi r dr + \int_{0/011}^{0/022} (8\times10^{-7}) 2\pi r dr$$

$$= 5/7\times10^{-10} + 9/12\times10^{-10} = 1/482\times10^{-9}\,\text{C}$$

(ب) پتانسیل ناشی از حلقه در نقطه‌ای روی محور آن از این رابطه به دست می‌آید.

$$V = \frac{kq}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

پتانسیل المان dA در نقطه P برابر است با:

$$dV = \frac{kdq}{\sqrt{z^2+r^2}} = \frac{k\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$V = k2\pi\sigma_1 \int_{r=0}^{R/2} \frac{rdr}{\sqrt{r^2+z^2}} + k2\pi\sigma_2 \int_{R/2}^{R} \frac{rdr}{\sqrt{r^2+z^2}} =$$

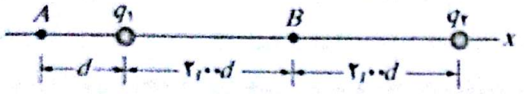
$$2k\pi\sigma_1 \sqrt{r^2+R^2/4}\Big]_{r=0}^{R/2} + 2k\pi\sigma_2 \sqrt{r^2+R^2/4}\Big]_{R/2}^{R} =$$

$$2k\pi\sigma_1\left[\frac{R}{\sqrt{2}} - \frac{R}{2}\right] + 2k\pi\sigma_1\left[\frac{R\sqrt{5}}{2} - \frac{R}{\sqrt{2}}\right] \Rightarrow$$

$$V = 2\pi(9\times10^9)(1/5\times10^{-6})\left[\frac{0/022}{\sqrt{2}} - \frac{0/022}{2}\right] + 2\pi(9\times10^9)(8\times10^7)$$

$$\left[\frac{0/022}{2} - \frac{0/022}{\sqrt{2}}\right] = 795\,\text{V}$$

۱۱۰- در شکل ۲۰-۷۰، ذرهٔ ۱ با بار $q_1 = +e$ و ذرهٔ ۲ با بار $q_2 = -5e$ روی محور x قرار دارند. فاصلهٔ $d = 5/60\,\mu m$ است. اختلاف پتانسیل الکتریکی $V_A - V_B$ چقدر است؟



شکل ۲۰-۷۰ مسئلهٔ ۱۱۰

حل:

$$V_A = \frac{kq_1}{d} + \frac{kq_2}{5d} \ ,\ V_B = \frac{kq_1}{2d} + \frac{kq_2}{2d}$$

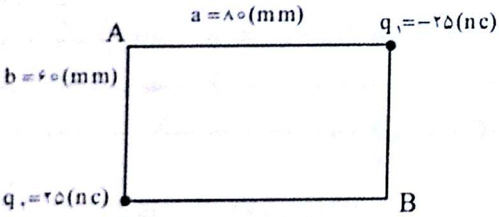
$$V_A - V_B = \left(\frac{kq_1}{d} + \frac{kq_2}{5d}\right) - \left(\frac{kq_1}{2d} + \frac{kq_2}{2d}\right) = \frac{kq_1}{2d} - \frac{3kq_2}{10d} \Rightarrow$$

$$V_A - V_B = \frac{ke}{2d} - \frac{-15ke}{10d} = \frac{5ke+15ke}{10d} = \frac{2ke}{d} \Rightarrow$$

$$V_A - V_B = \frac{(2)(9\times10^9)(1/6\times10^{-19})}{5/6\times10^{-6}} = 5/14\times10^{-4}\,\text{V}$$

۱۱۱- بارهای نقطه‌ای با بزرگیهای یکسان (۲۵ nC) و علامتهای مخالف به طور قطری روی گوشه‌های مقابل مستطیل $60\,\text{cm}\times80\,\text{cm}$ قرار گرفته‌اند. نقطهٔ A آن گوشهٔ اشغال نشده‌ای است که در نزدیکترین فاصله به بار مثبت قرار دارد، و نقطهٔ B گوشهٔ اشغال نشدهٔ دیگر است. اختلاف پتانسیل $V_B - V_A$ را تعیین کنید.

حل:



$$V_A = \frac{kq_1}{a} + \frac{kq_2}{b}$$

$$V_B = \frac{kq_1}{b} + \frac{kq_2}{a}$$

$$V_B - V_A = \left(\frac{kq_1}{b} + \frac{kq_2}{a}\right) - \left(\frac{kq_1}{a} + \frac{kq_2}{b}\right) =$$

$$\frac{-kq}{b} + \frac{kq}{a} - \frac{-kq}{a} - \frac{kq}{b} = -\frac{2kq}{b} + \frac{2kq}{a} = \frac{2kq}{a}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \Rightarrow$$

$$V_B - V_A = (2)(9\times10^9)(25\times10^{-9})\left(\frac{1}{0/8} - \frac{1}{0/6}\right) = -187/5\,\text{V}$$

۱۱۲- یک دهه پیش از آنکه *اینشتین* نظریهٔ نسبیت خود را منتشر کند، *تامسون* پیشنهاد کرد که الکترون ممکن است شامل اجزای کوچکی باشد و جرم m الکترون را می‌توان به انرژی پتانسیل برهم کنش این اجزا نسبت داد. بعلاوه، او پیشنهاد کرد که این انرژی برابر mc^2 است، که در آن c تندی نور است.

Scanned by CamScanner

برآوردی تقریبی از جرم الکترون به روش زیر انجام دهید: فرض کنید الکترون از سه جزء یکسان تشکیل شده است که این اجزا از بینهایت آورده شده‌اند و در گوشه‌های مثلث متساوی الاضلاعی با ضلعی برابر با *شعاع کلاسیکی* الکترون، یعنی $2/82\times10^{-5}$ m، قرار داده شده‌اند. (الف) انرژی پتانسیل الکتریکی کل این پیکربندی را پیدا کنید. (ب) سپس آن را بر c^2 تقسیم و نتیجهٔ خود را با جرم پذیرفته شده برای الکترون مقایسه کنید. (این نتیجه وقتی بهتر می‌شود که اجزای بیشتری در نظر گرفته شوند.)

حل: (الف)

$$V=3\frac{k\left(\frac{e}{3}\right)^2}{r}=\frac{ke^2}{3r}=\frac{(9\times10^{9})(1/6\times10^{-19})^2}{(3)(2/82\times10^{-15})}$$
$$=2/72\times10^{-14}\ \text{J}$$

(ب)

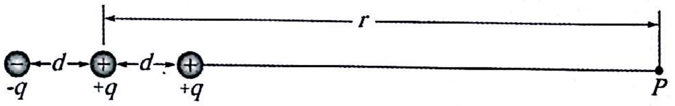
$$m=\frac{V}{c^2}=\frac{2/72\times10^{-14}}{9\times10^{16}}=3/03\times10^{-31}\ \text{kg}$$

که حدوداً یک سوم جرم واقعی الکترون است.

۱۱۳- شکل ۲۰-۷۱، سه ذرهٔ باردار را نشان می‌دهد که روی یک محور افقی قرار گرفته‌اند. برای نقطه‌هایی (از قبیل P) روی این محور با $r\gg d$، نشان دهید که پتانسیل الکتریکی $V(r)$ با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\left(1+\frac{2d}{r}\right)$$

(*راهنمایی*. این پیکربندی بار را می‌توان به صورت مجموع یک بار منزوی و یک دو قطبی در نظر گرفت.)

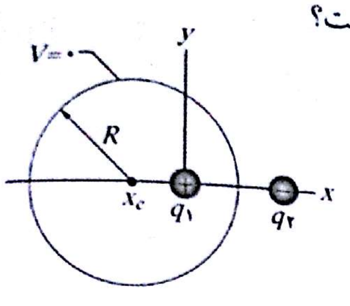


شکل ۲۰-۷۱ مسئلهٔ ۱۱۳

حل:

$$V=\frac{kq}{r-d}+\frac{kq}{r}+\frac{-kq}{r+d}=kq\left[\frac{1}{r-d}+\frac{1}{r}-\frac{1}{r+d}\right]=$$
$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^2+rd+r^2-d^2-r^2+rd}{r(r-d)(r+d)}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2rd+r^2-d^2}{r(r-d)(r+d)}$$
$$r\gg d\Rightarrow V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^2+2rd}{r^3}=\frac{qr^2\left(1+\frac{2d}{r}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1+\frac{2d}{r}\right)$$

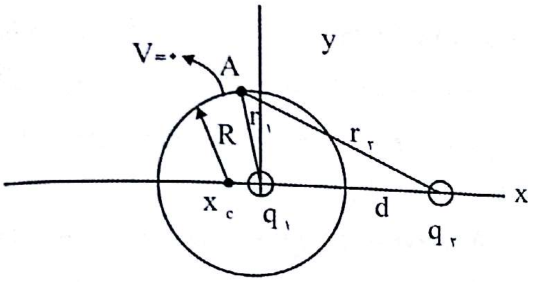
۱۱۴- بار نقطه‌ای $q_1=+6/0e$ در مبداء یک دستگاه مختصات راستگوشه، و بار نقطه‌ای $q_2=-10e$ در $x=8/6\text{nm}$ و $y=0$ ثابت شده‌اند. همان‌طور که در شکل ۲۰-۷۲ نشان داده شده است، مکان هندسی همهٔ نقطه‌های واقع بر صفحهٔ xy که برای آنها $V=0$ است (غیر از بینهایت)، دایره‌ای است که مرکز آن روی محور x قرار دارد. (الف) مکان x_c مرکز دایره و (ب) شعاع R دایره را پیدا کنید. (پ) آیا مقطع xy سطح هم پتانسیل ۵V نیز دایره است؟



شکل ۲۰-۷۲ مسئلهٔ ۱۱۴

حل:

$$V=\frac{kq_1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{kq_2}{\sqrt{(x-d)^2=y^2}}=0$$
$$q_1^2\left[(x-d)^2+y^2\right]=q_2^2(x^2+y^2)$$



$$36(x-d)^2+36y^2=100x^2+100y^2$$
$$\Rightarrow100x^2+100y^2-36x^2-36d^2=72xd-36y^2=0$$
$$\Rightarrow64x^2+72xd+64y^2=36d^2\Rightarrow x^2+\frac{9}{8}xd+y^2=\frac{36}{64}d^2$$
$$\Rightarrow\left(x+\frac{9}{16}d\right)^2-\frac{81}{256}d^2+y^2=\frac{36}{64}d^2$$
$$\Rightarrow\left(x+\frac{9}{16}d\right)^2+y^2=\frac{225}{256}d^2$$

که معادله دایره است

(الف) مرکز دایره برابر است با:

$$y=0\ ,\ x_c=\frac{-9}{16}d=-4/84\times10^{-9}\ \text{m}$$

(ب)

$$R=\sqrt{\frac{225}{256}d^2}=\frac{15}{16}d=\frac{15}{16}(8/6\times10^{-9})=8/06\times10^{-9}\ \text{m}$$

(پ) برای سطح پتانسیل ۵ V داریم:

$$\frac{kq_1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{kq_2}{\sqrt{(x-d)^2+y^2}}=5\ \text{V}$$

که دیگر معادله دایره نیست.

۱۱۵- بار $q_1=-1/2\times10^{-9}$ C در مبدأ، و بار $q_2=2/5\times10^{-9}$ C روی محور y در $y=0/50$m قرار دارد. پتانسیل الکتریکی را در فاصله‌ای دور از هر دو بار صفر در نظر بگیرید. (الف) مقطع سطح هم‌پتانسیل $V=5/0$ V را با صفحهٔ xy رسم کنید. این سطح، یکی از دو بار را دربر می‌گیرد. (ب) دو سطح هم‌پتانسیل وجود دارند که به $V=3/0$ V مربوط‌اند.

Scanned by CamScanner

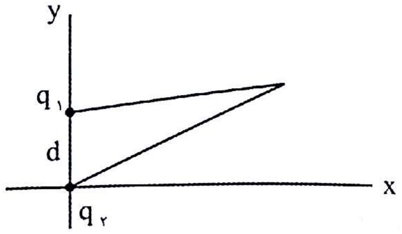
یکی، یک بار و دیگری هر دو بار را در بر دارد. مقطع آنها را با صفحهٔ xy رسم کنید. (پ) آن مقداری از پتانسیل را بیابید که به ازای آن، نقش پتانسیل الکتریکی از یک سطح هم‌پتانسیل به دو سطح هم‌پتانسیل تبدیل شود.

حل: (الف)

$$V=\frac{kq_۱}{\sqrt{x^۲+y^۲}}+\frac{kq_۲}{\sqrt{x^۲+(y-d)^۲}}\Rightarrow$$

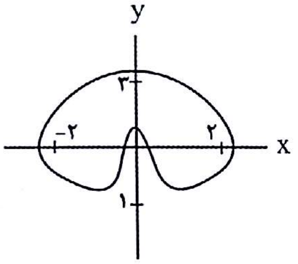
$$V=\frac{(۹\times ۱۰^۹)(-۱/۲\times ۱۰^{-۹})}{\sqrt{x^۲+y^۲}}+\frac{(۹\times ۱۰^۹)(۲/۵\times ۱۰^{-۹})}{\sqrt{x^۲+(y-۰/۵)^۲}}=۵$$

$$\Rightarrow \frac{-۱۰/۸}{\sqrt{x^۲+y^۲}}+\frac{۲۲/۵}{\sqrt{x^۲+(y-۰/۵)^۲}}=۵$$



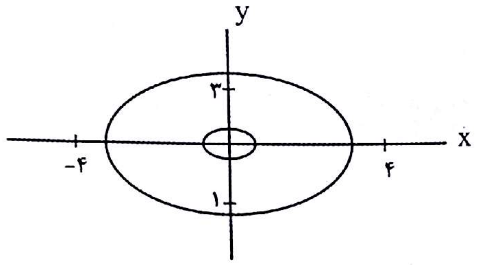
(ب)

$$\frac{-۱۰/۸}{\sqrt{x^۲+y^۲}}+\frac{۲۲/۵}{\sqrt{x^۲+(y-۰/۵)^۲}}=۳$$



(پ)

$$\frac{-۱۰/۸}{\sqrt{x^۲+y^۲}}+\frac{۲۲/۵}{\sqrt{x^۲+(y-۰/۵)^۲}}=V_۰$$



با تبدیل x به $-x$ معادله تغییر نمی‌کند پس محور y محور تقارن منحنی است. در جایی که منحنی به دو قطعه تبدیل می‌شود، محور y مماس بر منحنی است و طول نقطه جدایی (نقطه A) صفر است.

چون y منفی است بعد از جذر علامت منفی می‌گیرد.

$$\frac{-۱۰/۸}{-y}+\frac{۲۲/۵}{-(y-۰/۵)}=V_۰$$

$$\frac{-۱۰/۸(y-۰/۵)+۲۲/۵y}{y(y-۰/۵)}=V_۰$$

$$\Rightarrow V_۰y^۲+(۱۱/۷-۰/۵V_۰)y+۵/۴=۰$$

شرط وجود جواب این است که $\Delta\ge ۰$ باشد.

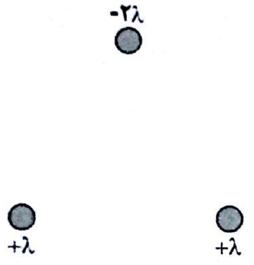
$$(۱۱/۷-۰/۵V_۰)^۲-۴V_۰(۵/۴)=۰$$

$$\Rightarrow ۰/۲۵V_۰^۲-۳۳/۳V_۰+۱۳۶/۸۹=۰$$

$$\Rightarrow V_۰=۱۲۸/۹۴\,\text{V}\ ,\ ۴/۲۶\,\text{V}$$

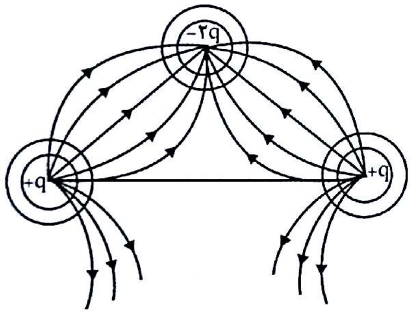
حداقل پتانسیل لازم ۴/۲۶V می‌باشد.

۱۱۶- در شکل ۲۰-۷۳، سه خط بار موازی و بلند، با چگالیهای بار خطی نشان داده شده، در هر دو جهت به طور عمود بر صفحه امتداد دارند. چند خط میدان الکتریکی را رسم کنید؛ همچنین مقطع چند سطح هم پتانسیل را در صفحهٔ شکل رسم کنید.



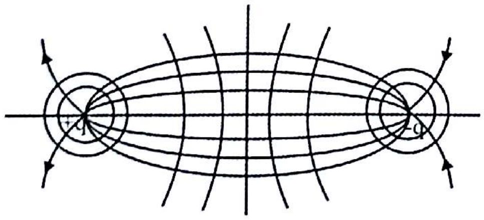
شکل ۲۰-۷۳ مسئلهٔ ۱۱۶

حل:



۱۱۷- دو خط بار نامتناهی در یک صفحه قرار دارند و با محور z موازی‌اند. یکی از آنها، با بار در یکای طول $+\lambda$، به فاصلهٔ a در سمت راست این محور قرار دارد. دیگری، با بار در یکای طول $-\lambda$، در فاصلهٔ a از سمت چپ این محور واقع است. چند سطح هم‌پتانسیل ناشی از این آرایش را رسم کنید.

حل:



۱۱۸- در سال ۱۹۱۱، ارنست راترفورد مدل اتم را به صورت نقطه‌ای با بار مثبت Ze که توسط بار منفی $-Ze$ که به طور یکنواخت روی کره‌ای به شعاع R به مرکز واقع در آن نقطه توزیع شده است درنظر گرفت. در فاصلهٔ r داخل کره میدان الکتریکی عبارت است از

$$E=\frac{ze}{۴\pi}\left(\frac{۱}{r^۲}-\frac{r}{R^۳}\right)$$

او همچنین پتانسیل الکتریکی را به صورت زیر به دست آورد

Scanned by CamScanner

$$V = \frac{ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{3}{2R} + \frac{r^2}{2R^3}\right)$$

(الف) نشان دهید که چگونه عبارت میدان الکتریکی از عبارت بالا برای V به دست می‌آید؟ (ب) چرا عبارت V، وقتی $r \to \infty$ میل می‌کند، صفر نمی‌شود؟

حل:

$$V = \frac{ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{3}{2R} + \frac{r^2}{2R^3}\right)$$

(الف)

$$E(r) = -\frac{dV}{dr} = -\frac{ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{d}{dr}r^{-1} + 0 + \frac{1}{2R^3}\frac{d}{dr}r^2\right) \Rightarrow$$

$$E(r) = \frac{ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right)$$

(ب) توجه کنید که این پتانسیل به ازای $r=R$ صفر می‌شود. زیرا نقطه صفر برای پتانسیل این دستگاه دلخواه است. بنابراین مبدأ را در سطح اتم در نظر گرفته‌ایم نه در بی‌نهایت. دلیل دوم این است که این پتانسیل برای نقاط داخل اتم $(r < R)$ صادق است.

Scanned by CamScanner

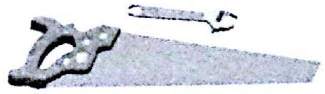
۲۱

ظرفیت

Scanned by CamScanner

بخش ۲۱-۲ ظرفیت

۱•- دو جسم فلزی شکل ۲۱-۲۵ دارای بارهای خالص $+۷۰pC$ و $-۷۰pC$ هستند که منجر به اختلاف پتانسیل $۲۰V$ بین آنها می‌شود. (الف) ظرفیت این دستگاه چقدر است؟ (ب) اگر بارها به $+۲۰۰pC$ و $-۲۰۰pC$ تغییر داده شوند، این ظرفیت چقدر می‌شود؟ (پ) اختلاف پتانسیل چقدر می‌شود؟



شکل ۲۱-۲۵ مسئلهٔ ۱

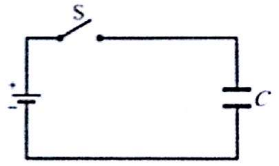
حل: (الف) ظرفیت دستگاه برابر است با:

$$C=\frac{q}{\Delta V}=\frac{۷۰}{۲۰}=۳/۵\ pF$$

(ب) ظرفیت مستقل از بار و اختلاف پتانسیل است، بنابراین ظرفیت تغییر نخواهد کرد.

(پ)
$$\Delta V=\frac{q}{C}=\frac{۲۰۰}{۳/۵}=۵۷/۱۴V$$

۲•- خازن شکل ۲۱-۲۶ دارای ظرفیت $۲۵\mu F$ و در ابتدا بدون بار است. باتری اختلاف پتانسیل $۱۲۰V$ را فراهم می‌کند. پس از آنکه کلید S بسته شود، چقدر بار از آن خواهد گذشت؟

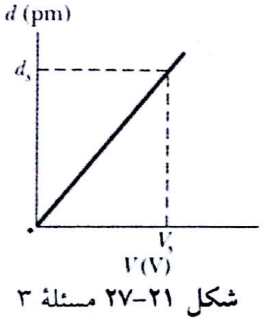


شکل ۲۱-۲۶ مسئلهٔ ۲

حل:
$$q=CV=(۲۵\times۱۰^{-۶})(۱۲۰)=۳\times۱۰^{-۳}\ C$$

بخش ۲۱-۳ محاسبه ظرفیت

۳- اگر خازن تخت (صفحه- موازی) بدون باری (با ظرفیت C) به باتری وصل شود، براثر حرکت الکترونها به روی صفحه (مساحت A) یک صفحه بار منفی پیدا می‌کند. در شکل ۲۱-۲۷، عمق d که الکترونها از صفحه خارج می‌شوند در یک خازن نوعی برحسب گسترهٔ مقدارهایی برای اختلاف پتانسیل V باتری رسم شده است. مقیاس قائم با $d_s=۱/۰۰pm$ و مقیاس افقی با $V_s=۲۰/۰V$ مشخص شده است. نسبت C/A چقدر است؟



شکل ۲۱-۲۷ مسئلهٔ ۳

حل: حجم ناحیه‌ای که الکترون‌های آن روی سطح قرار می‌گیرد برابر است با $V=Ad$ و اگر n چگالی الکترون‌های رسانا باشد، داریم

$$N=nV=nAd \quad \text{و} \quad q=Ne=nAde$$

$$C=\frac{q}{V_0}=\frac{nAde}{V_0}$$

و

$$\frac{C}{A}=\frac{nde}{V_0}=\frac{(۸/۵\times۱۰^{۲۸})(۱\times۱۰^{-۱۲})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{۲۰}=۶/۸\times۱۰^{-۴}\ F/m^2$$

۴•- می‌خواهیم با دو صفحهٔ تخت فلزی، هر یک به مساحت $۱/۰۰m^2$، یک خازن تخت بسازیم. (الف) اگر ظرفیت این خازن $۱/۰۰F$ باشد، فاصلهٔ میان صفحه‌های آن باید چقدر باشد؟ (ب) آیا در عمل، این خازن را می‌توان ساخت؟

حل: (الف) با توجه به رابطه $C=\frac{\varepsilon_0 A}{d}$ داریم:

$$d=\frac{\varepsilon_0 A}{C}=\frac{(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۱)}{۱}=۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\ m$$

(ب) با توجه به مقدار d که حتی کوچکتر از اندازه یک اتم است، امکان ساخت وجود ندارد.

۵•- یک خازن تخت دارای صفحه‌هایی دایره‌ای به شعاع $۸/۲۰cm$، و فاصلهٔ صفحه‌های آن $۱/۳۰cm$ است. (الف) ظرفیت این خازن را محاسبه کنید. (ب) اگر اختلاف پتانسیل $۱۲۰V$ بین صفحه‌ها اعمال شده باشد، چقدر بار روی صفحه‌ها ظاهر می‌شود؟ SSM

حل: (الف)

$$C=\frac{\varepsilon_0 A}{d}=\frac{\varepsilon_0 \pi R^2}{d}=\frac{(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۳/۱۴)(۰/۰۸۲)^2}{۰/۰۰۱۳}=۱/۴۴\times۱۰^{-۱۰}\ F$$

(ب)
$$q=CV=(۱/۴۴\times۱۰^{-۱۰})(۱۲۰)=۱/۷۳\times۱۰^{-۸}\ C$$

۶•- شعاعهای صفحه‌های یک خازن کروی $۳۸/۰mm$ و $۴۰/۰mm$ است. (الف) ظرفیت این خازن را محاسبه کنید. (ب) مساحت صفحهٔ یک خازن تخت با همان فاصلهٔ صفحه‌ها و همان ظرفیت، باید چقدر باشد؟

حل (الف) برای خازن کروی داریم:

$$C=\frac{۴\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}=\frac{ab}{k(b-a)}=\frac{(۴۰)(۳۸)}{(۹\times۱۰^{۹})(۴۰-۳۸)}=۸/۴۵\times۱۰^{-۱۱}\ F$$

(ب) برای خازن تخت- موازی داریم:

$$C=\frac{\varepsilon_0 A}{d}=\frac{\varepsilon_0 A}{b-a}$$

$$۸/۴۵\times۱۰^{-۱۱}=\frac{(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})A}{۲\times۱۰^{-۳}}\Rightarrow A=۱/۹\times۱۰^{-۲}\ m^2$$

Scanned by CamScanner

●۷- فرض کنید یک قطرهٔ جیوه، کره‌ای منزوی است. ظرفیت خازنی که از ترکیب دو قطره هر یک به شعاع $R=2/00\,mm$ حاصل می‌شود چقدر است؟ SSM

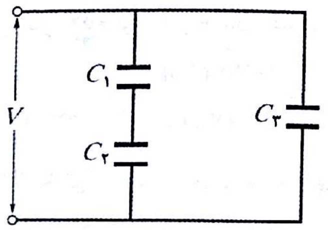
حل: پس از جمع شدن دو قطره، حجم کرهٔ حاصل دوبرابر حجم هر قطر می‌شود.

$$V'=2V \Rightarrow \frac{4}{3}\pi R'^3=(2)\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\Rightarrow R'=(2)^{1/3}R$$

$$C'=4\pi\varepsilon_0 R'=(4)(3/14)(8/85\times10^{-12})(2)^{1/3}(2\times10^{-3})$$
$$=2/8\times10^{-12}\ F$$

بخش ۲۱-۴ خازنهای موازی و متوالی

●۸- در شکل ۲۱-۲۸، ظرفیت معادل ترکیب را پیدا کنید. فرض کنید C_1 برابر $10/0\,\mu F$، C_2 برابر $5/00\,\mu F$، و $C_3=4/00\,\mu F$ است.

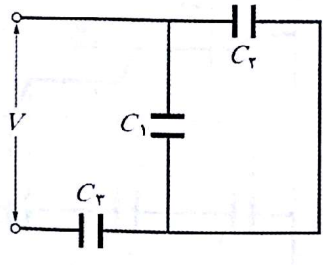


شکل ۲۱-۲۸ مسئله‌های ۸ و ۳۶

حل: خازنهای C_1 و C_2 با هم متوالی و خازن معادل آنها با خازن C_3 موازی است.

$$C_{12}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\frac{(10)(5)}{15}=3/33\,\mu F$$
$$C_{eq}=C_{12}+C_3=3/33+4=7/33\,\mu F$$

●۹- در شکل ۲۱-۲۹، ظرفیت معادل ترکیب را پیدا کنید. فرض کنید $C_1=10/0\,\mu F$، $C_2=5/00\,\mu F$، و $C_3=4/00\,\mu F$. ILW



شکل ۲۱-۲۹ مسئله‌های ۹، ۱۳، و ۳۴

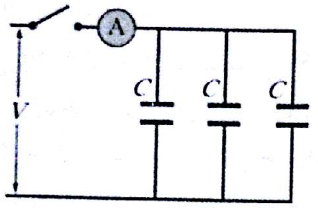
حل: خازنهای C_1 و C_2 با هم موازی و خازن معادل آنها با C_3 متوالی است.

$$C_{12}=C_1+C_2=10+5=15\,\mu F$$
$$C_{eg}=\frac{C_{12}C_3}{C_{12}+C_3}=\frac{(15)(4)}{15+4}=3/16\,\mu F$$

●۱۰- چند خازن با ظرفیت $1/00\,\mu F$ باید به طور موازی بسته شوند تا به ازای اختلاف پتانسیل ۱۱۰V در دو سرخازنها، بار ۱/۰۰C در آن ذخیره شود؟ SSM

حل:
$$C_{eq}=\frac{q}{V}=\frac{1}{110}=9\times10^{-3}\ F$$
$$C_{eq}=nC\Rightarrow 9/1\times10^{-3}=n\,(1\times10^{-6})\Rightarrow n=9100$$ عدد

●۱۱- هر یک از خازنهای بدون بار شکل ۲۱-۳۰ دارای ظرفیت $25/0\,\mu F$ است. وقتی کلید بسته شود، اختلاف پتانسیل $V=4200\,V$ برقرار می‌گردد. چند کولن بار از سنجهٔ A می‌گذرد؟



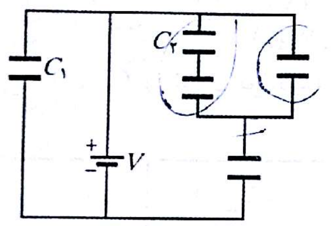
شکل ۲۱-۳۰ مسئلهٔ ۱۱

حل: سه خازن پس از بستن کلید به صورت موازی‌اند لذا داریم:

$$C_{eq}=C_1+C_2+C_3=3C=75\,\mu F$$
$$q=C_{eq}V=(75\times10^{-6})(4200)=0/315$$

همین بار از سنجه A می‌گذرد.

●۱۲- در شکل ۲۱-۳۱، اختلاف پتانسیل باتری ۱۰V و ظرفیت هر یک از پنج خازن برابر با $10/0\,\mu F$ است. بار روی (الف) خازن ۱ و (ب) خازن ۲ چقدر است؟



شکل ۲۱-۳۱ مسئلهٔ ۱۲

حل: (الف) $q_1=C_1V_1=(10\times10^{-6})(10)=1\times10^{-4}\ C$

(ب) برای خازنهای سمت راست داریم:

$$C_{eq}=\frac{CC'}{C+C'}$$

که در آن C' برابر است با:

$$C'=C+\frac{CC}{C+C}=\frac{3}{2}C$$

لذا خواهیم داشت:

$$C_{eq}=\frac{C\left(\frac{3}{2}C\right)}{C+\frac{3}{2}C}=\frac{3}{5}C=\left(\frac{3}{5}\right)(10)=6\,\mu F$$

در نتیجه می‌توان بار کلی عبوری از خازن معادل را به دست آورد:

$$q_{eq}=C_{eq}V=(6\times10^{-6})(10)=6\times10^{-5}\ C$$

حال توجه خود را به مجموعهٔ خازن سه‌تایی بالا (سمت راست) با ظرفیت معادل C' متمرکز می‌کنیم.
اختلاف پتانسیل دو سر آن برابر است با:

$$V'=\frac{q_{eq}}{C'}=\frac{6\times10^{-5}}{\left(\frac{3}{2}\right)(10\times10^{-6})}=4\,V$$

Scanned by CamScanner

در نتیجه بار روی شاخه سمت چپ این مجموعه و از جمله $C_۲$ برابر است با:

$$q_۲=\left(\frac{C}{۲}\right)V'=(۵)(۴)=۲۰\mu F$$

۱۳●●- در شکل ۲۱-۲۹، اختلاف پتانسیل $V=۱۰۰/۰V$ به دو سر یک آرایش خازنی با ظرفیتهای $C_۱=۱۰/۰\mu F$، $C_۲=۵/۰۰\mu F$، و $C_۳=۴/۰۰\mu F$ اعمال شده است. اگر خازن ۳ فروشکست الکتریکی پیدا کند، به گونه‌ای که معادل یک سیم رسانا شود، (الف) بار روی خازن ۱ و (ب) اختلاف پتانسیل دو سر خازن ۱، چقدر افزایش می‌یابد؟

حل: پیش از فرو شکست الکتریکی خازن $C_۳$، در حل مسئله ۹ ظرفیت معادل مدار را برابر با $C_{eq}=۳/۱۶\mu F$ به دست آوردیم و در نتیجه بار کل در این حالت برابر است با:

$$q=C_{eq}V=(۳/۱۶)(۱۰۰)=۳۱۶\mu C$$

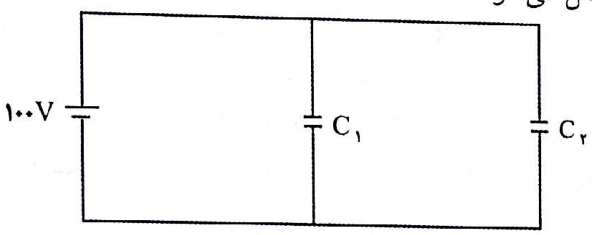
همچنین اختلاف پتانسیل دو سر $C_۱$ و $C_۲$ با هم برابرند و داریم:

$$V_۱=V_۲=\frac{q}{C_۱+C_۲}=\frac{۳۱۶}{۱۵}=۲۱/۱V$$

$$q_۱=C_۱V_۱=(۱۰)(۲۱/۱)=۲۱۱\mu C$$

و

حال پس از خرابی خازن $C_۳$ و اتصال کوتاه شدن آن مدار زیر حاصل می‌شود.



لذا داریم $V_۱'=V_۲'=۱۰۰$.

(الف) $q_۱'=C_۱V_۱'=(۱۰)(۱۰۰)=۱۰۰۰\mu C$

$$\Delta q_۱=q_۱'-q_۱=۱۰۰۰-۲۱۱=۷۸۹\mu C$$

(ب) $\Delta V_۱=V_۱'-V_۱=۱۰۰-۲۱/۱=۷۸/۹V$

۱۴●●- دو خازن تخت، هریک با ظرفیت $۶/۰\mu F$، به طور موازی به یک باتری ۱۰ ولتی بسته شده‌اند. سپس فاصلهٔ صفحه‌های یکی از این دو خازن نصف می‌شود. بر اثر این کم شدن فاصله (الف) چقدر بار اضافی توسط باتری به خازنها منتقل می‌شود؟ و (ب) افزایش بار خالص ذخیره شده در خازنها چقدر است؟

حل: با توجه به اینکه باتری از مدار خارج نشده، همواره اختلاف پتانسیل دو سر خازنهای ثابت می‌ماند و چون ظرفیتها نیز یکسان است، داریم:

$$q_۱=q_۲=C_۱V=(۶)(۱۰)=۶۰\mu F$$

و بار کل برابر است با $q_{کل}=۱۲۰\mu C$.

وقتی فاصلهٔ بین دو خازن نصف می‌شود، ظرفیت آن دو برابر می‌گردد، در نتیجه داریم:

$$q_۱'=C_۱V=(۱۲)(۱۰)=۱۲۰\mu C$$

و بار کل در این حالت برابر است با:

$$q_{کل}'=۶۰+۱۲۰=۱۸۰\mu F$$

(الف) $\Delta q=۱۸۰-۱۲۰=۶۰\mu F$

(ب) $\Delta q_۱=q_۱'-q_۱=۱۲۰+۶۰=۶۰\mu F$

۱۵●●- خازنی با ظرفیت ۱۰۰pF تا اختلاف پتانسیل ۵۰V باردار و سپس باتری بادار کننده برداشته می‌شود. حال این خازن را به طور موازی به خازن دیگری (که در ابتدا بدون بار است) متصل می‌کنیم. اگر اختلاف پتانسیل دو سر خازن اول تا ۳۵V افت کند، ظرفیت خازن دوم چقدر است؟ ILW SSM

حل: بار اولیهٔ خازن اول برابر است با

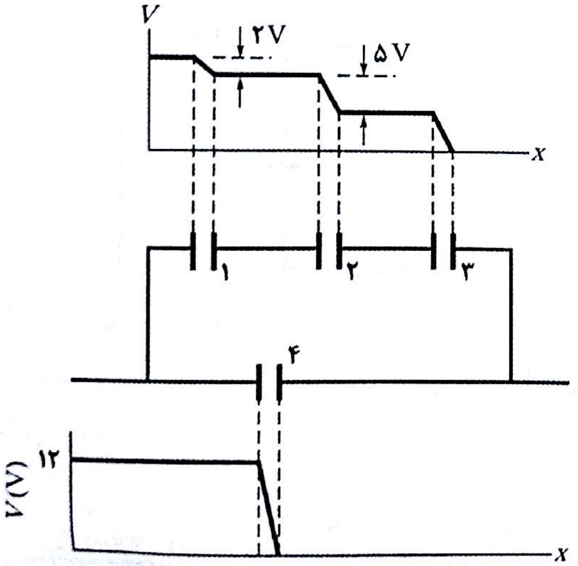
$$q=C_۱V=(۱۰۰\times۱۰^{-۱۲})(۵۰)=۵\times۱۰^{-۹}C$$

وقتی این خازن به طور موازی به یک خازن بی‌بار بسته می‌شود، طبق پایستگی بار، بار اولیه بین دو خازن تقسیم می‌شود.

$$q=C_۱V+C_۲V=(C_۱+C_۲)V$$

$$۵\times۱۰^{-۹}=(۱۰۰+C_۲)(۳۵)\Rightarrow C_۲=۴۳pF$$

۱۶- شکل ۲۱-۳۲ بخشی از مدار مربوط به چهار خازن پر شده از هوا را که به مدار بزرگتری متصل شده است، نشان می‌دهد. نمودار زیر این بخش، پتانسیل الکتریکی $V(x)$ را برحسب تابعی از مکان x روی قسمت پایینتر این بخش، عبوری از خازن ۴، نشان می‌دهد. به همین ترتیب، نمودار بالای این بخش، پتانسیل الکتریکی $V(x)$ را برحسب تابعی از مکان x روی قسمت بالاتر این بخش، عبوری از خازنهای ۱، ۲، ۳، نشان می‌دهد. ظرفیت خازن ۳ برابر با $۰/۸۰\mu F$ است. ظرفیتهای (الف) خازن ۱ و (ب) خازن ۲ چقدر است؟



شکل ۲۱-۳۲ مسئلهٔ ۱۶

حل:

$$V_۴=V_۱+V_۲+V_۳$$

$$۱۲=۲+۵+V_۳\Rightarrow V_۳=۵V$$

لذا بار روی این خازن برابر است با

$$q_۳=C_۳V_۳=(۰/۸\mu F)(۵)=۴\mu C$$

Scanned by CamScanner

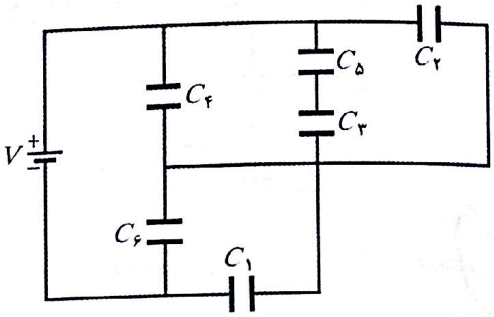
(الف) چون خازنهای $C_۱$، $C_۲$ و $C_۳$ متوالی‌اند بار روی آنها یکسان است، لذا $q_۱ = q_۲ = q_۳ = ۴\mu C$ و در نتیجه داریم:

$$C_۱ = \frac{q_۱}{V_۱} = \frac{۴}{۲} = ۲\mu C$$

(ب)

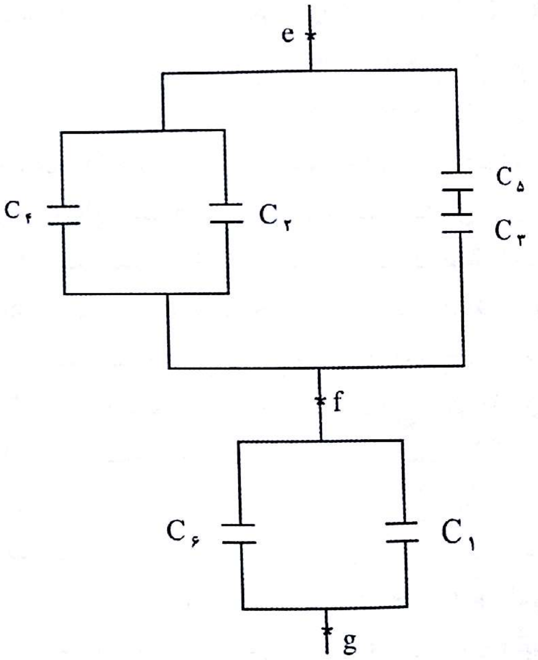
$$C_۲ = \frac{q_۲}{V_۲} = \frac{۴}{۵} = ۰/۸\ \mu C$$

۱۷●●- در شکل ۲۱-۳۳، یک باتری ۲۰ ولتی به دو سر خازنهایی به ظرفیتهای $C_۱ = C_۶ = ۳/۰۰\mu F$ و $C_۳ = C_۵ = ۲/۰۰\ C_۴ = ۴/۰۰\mu F$، بسته شده است. (الف) ظرفیت معادل C_{eq} خازنها و (ب) بار ذخیره شده توسط C_{eq} چقدر است؟ (پ) $V_۱$ و(ت) $q_۱$ خازن ۱، (ث) $V_۲$ و (ج) $q_۲$ خازن ۲، (چ) $V_۳$ و (ح) $q_۳$ خازن ۳ چقدر است؟



شکل ۲۱-۳۳ مسئلهٔ ۱۷

حل: (الف)



(الف)

$$C_{۳۵} = \frac{C_۳C_۵}{C_۳ + C_۵} = ۲\mu F$$

$$C_{ef} = ۲ + ۲ + ۲ = ۶\mu F$$

$$C_{fg} = C_{۱۶} = ۳ + ۳ = ۶\mu F$$

$$C_{eq} = \frac{C_{ef}C_{fg}}{C_{eq} + C_{fg}} = ۳\mu F$$

(ب)

$$q_{eq} = C_{eq}V = (۳)(۲۰) = ۶۰\mu C$$

(پ)

$$V_۱ = V_{fg} = \frac{q_{eq}}{C_{۱۶}} = \frac{۶۰}{۶} = ۱۰V$$

(ت)

$$q_۱ = C_۱V_۱ = (۳)(۱۰) = ۳۰\mu C$$

(ث)

$$V_۲ = V_{ef} = \frac{q_{eq}}{C_{ef}} = \frac{۶۰}{۶} = ۱۰V$$

(ج)

$$q_۲ = C_۲V_۲ = (۲)(۱۰) = ۲۰\mu C$$

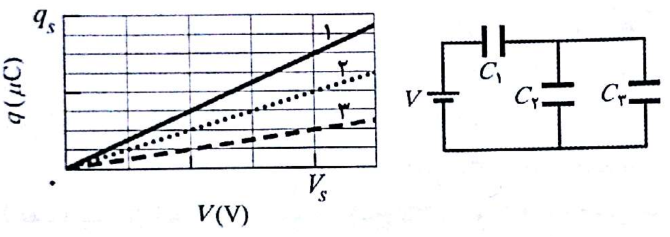
(چ)

$$V_۳ = \frac{۱}{۲}V_{ef} = ۵V$$

(ح)

$$q_۳ = C_۳V_۳ = (۴)(۵) = ۲۰\mu C$$

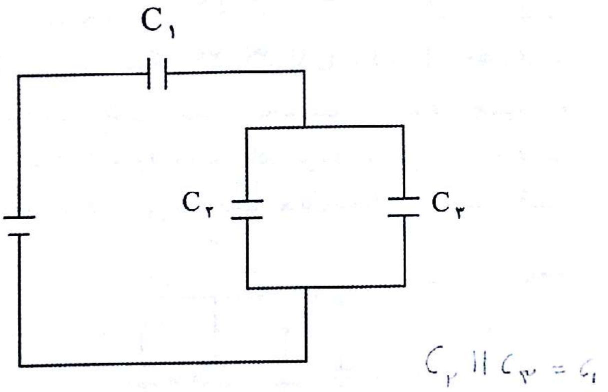
۱۸●●- نمودار ۱ در شکل ۲۱-۳۴ الف، بار q را که می‌تواند در خازن ۱ ذخیره شود برحسب پتانسیل الکتریکی V برقرار شده در دو سر آن، به دست می‌دهد. مقیاس قائم با $q_s = ۱۶/۰\mu C$ و مقیاس افقی با $V_s = ۲/۰V$ مشخص شده است. نمودارهای ۲ و ۳، نمودارهای مشابهی به ترتیب برای خازنهای ۲ و ۳ هستند. شکل ۲۱-۳۴ ب مداری با این سه خازن و یک باتری ۶/۰V را نشان می‌دهد. چه باری در خازن ۲ در این مدار ذخیره شده است؟



(الف) (ب)

شکل ۲۱-۳۴ مسئلهٔ ۱۸

حل: ظرفیت هر خازن را می‌توان با استفاده از شیب منحنی‌های داده شده به دست آورید.



$$C_۱ = \frac{\Delta q_۱}{\Delta V_۱} = \frac{۱۲}{۲} = ۶\mu F$$

$$C_۲ = \frac{\Delta q_۲}{\Delta V_۲} = \frac{۸}{۲} = ۴\mu F$$

$$C_۳ = \frac{\Delta q_۳}{\Delta V_۳} = \frac{۴}{۲} = ۲\mu F$$

$$C_{۲۳} = C_۲ + C_۳ = ۴ + ۲ = ۶\mu F$$

$$C_{eq} = \frac{C_۱C_{۲۳}}{C_۱ + C_{۲۳}} = ۳\mu F$$

$$q_{eq} = q_۱ = q_{۲۳} = C_{eq}V$$

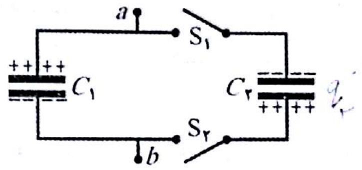
$$q_{۲۳} = (۳)(۶) = ۱۸\ \mu F$$

Scanned by CamScanner

$$V_2 = V_{23} = \frac{q_{23}}{C_{23}} = \frac{18}{6} = 3V$$

$$q_2 = C_2V_2 = (4)(3) = 12\mu F$$

۱۹●●– در شکل ۲۱–۳۵، ظرفیتها عبارت‌اند از $C_1 = 1/0\mu F$ و $C_2 = 3/0\mu F$، و هر دو خازن تا اختلاف پتانسیل $V = 100V$، ولی به ترتیبی که نشان داده شده است با قطبیدگی مخالف، باردار شده‌اند. کلیدهای S_1 و S_2 بسته می‌شوند. (الف) اکنون اختلاف پتانسیل میان نقطه‌های a و b چقدر است؟ در این موقع بار روی خازن (ب) ۱ و (پ) ۲ چقدر است؟ WWW SSM



شکل ۲۱–۳۵ مسئلهٔ ۱۹

حل: بار هر خازن پیش از اتصال کلیدها برابر است با

$$q_1 = C_1V_1 = (1)(100) = 100\mu F$$

$$q_2 = C_2V_2 = (3)(100) = 300\mu F$$

پس از اتصال کلیدها بار خنثی نشده برابر است با

$$q = q_2 - q_1 = 300 - 100 = 200\mu F$$

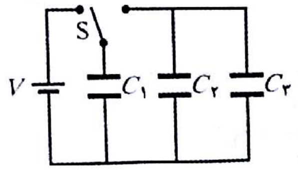
(الف) پس از اتصال کلیدها، دو خازن داریم که به صورت موازی بسته شده‌اند.

$$V_{ab} = \frac{q}{C_1 + C_2} = \frac{200}{1+3} = 50V$$

(ب) $q'_1 = C_1V_{ab} = (1)(50) = 50\mu C$

(پ) $q'_2 = C_2V_{ab} = (3)(50) = 150\mu C$

۲۰– در شکل ۲۱–۳۶، $V = 10V$، $C_1 = 10\mu F$، و $C_2 = C_3 = 20\mu F$ است. کلید S نخست به طرف چپ زده می‌شود تا خازن ۱ به وضعیت تعادل برسد. سپس کلید به طرف راست زده می‌شود. وقتی وضعیت تعادل دوباره به دست آید، چقدر بار روی خازن ۱ است؟



شکل ۲۱–۳۶ مسئلهٔ ۲۰

حل: در حالتی که کلید s به طرف چپ زده شده و خازن C_1 به تعادل می‌رسد، داریم:

$$Q = C_1V = (10)(10) = 100\mu C$$

پس از آنکه کلید به سمت راست زده می‌شود با Q بین خازنها تقسیم می‌شود (پایستگی بار)

$$Q = q_1 + q_2 + q_3$$

چون $C_2 = C_3$ است لذا $q_2 = q_3$ خواهد بود. خازنها موازی‌اند در نتیجه می‌توان نوشت

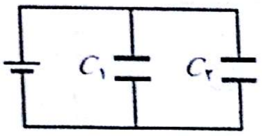
$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} \Rightarrow \frac{q_1}{10} = \frac{q_2}{20} \Rightarrow q_1 = \frac{1}{2}q_2$$

$$Q = \frac{1}{2}q_2 + q_2 + q_2 = \frac{5}{2}q_2 \Rightarrow 100 = \frac{5}{2}q_2$$

$$\Rightarrow 100 = \frac{5}{2}q_2 \Rightarrow q_2 = 40\mu C$$

و در نتیجه $C_1 = 20\mu C$ است.

۲۱●●– در شکل ۲۱–۳۷، دو خازن تخت (با هوا در میان صفحه‌های آن) به یک باتری وصل شده است. خازن ۱ دارای مساحت صفحهٔ $1/5cm^2$ و یک میدان الکتریکی (میان صفحه‌های آن) به بزرگی $2000 V/m$ است. خازن ۲ دارای مساحت صفحهٔ $0/70cm^2$ و یک میدان الکتریکی به بزرگی $1500 V/m$ است. بار کل روی دو خازن چقدر است؟



شکل ۲۱–۳۷ مسئلهٔ ۲۱

حل:

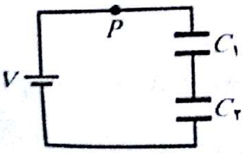
$$E_1 = \frac{V}{d_1} \Rightarrow d_1 = VE_1 \quad , \quad d_2 = VE_2$$

$$C_1 = \varepsilon_0\frac{A_1}{d_1} = \varepsilon_0\frac{A_1}{VE_1} \quad , \quad C_2 = \varepsilon_0\frac{A_2}{d_2} = \varepsilon_0\frac{A_2}{VE_2}$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0}{V}\left(\frac{A_1}{E_1} + \frac{A_2}{E_2}\right)$$

$$q = C_{eq}V = \varepsilon_0\left(\frac{A_1}{E_1} + \frac{A_2}{E_2}\right) \Rightarrow q = 3/58\times10^{-12}\ C$$

۲۲●●– شکل ۲۱–۳۸ دو خازن استوانه‌ای پر از هوا را نشان می‌دهد که به طور متوالی به دو سر یک باتری با پتانسیل $V = 10V$ بسته شده‌اند. خازن ۱ دارای یک صفحهٔ داخلی به شعاع ۵/۰mm، یک صفحهٔ خارجی به شعاع ۱/۵cm، و طول ۵/۰cm است. خازن ۲ دارای یک صفحهٔ داخلی به شعاع ۲/۵mm، یک صفحهٔ خارجی به شعاع ۱/۰cm، و طول ۹/۰cm است. صفحهٔ خارجی خازن ۲ از جنس یک غشاء آلی رساناست که می‌تواند کشیده شود، و بدین ترتیب با زیاد شدن فاصلهٔ صفحه‌ها، ظرفیت این خازن افزایش می‌یابد. اگر براثر کش آمدن، شعاع صفحهٔ خارجی تا ۲/۵cm افزایش یابد (الف) چه تعداد الکترون از نقطهٔ P می‌گذرند و (ب) آیا آنها به سوی باتری حرکت می‌کنند یا در جهت دورشدن از آن؟



شکل ۲۱–۳۸ مسئلهٔ ۲۲

حل: ابتدا ظرفیت هر خازن را با استفاده از رابطه ظرفیت خازن استوانه‌ای به دست آورده، سپس ظرفیت معادل آنها و بار کل را پیش و پس از کشیده شدن خازن ۲ را محاسبه می‌کنیم.

Scanned by CamScanner

$$C_۱=\frac{۲\pi\varepsilon_۰ L_۱}{Ln\frac{b_۱}{a_۱}}=\frac{۲(۳/۱۴)(۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲})(۵\times ۱۰^{-۲})}{Ln\left(\frac{۱۵}{۵}\right)}$$

$$=۲/۵۳\times ۱۰^{-۱۲}\ \text{F}$$

$$C_۲=\frac{۲\pi\varepsilon_۰ L_۲}{Ln\frac{b_۲}{a_۲}}=۳/۶۱\times ۱۰^{-۱۲}\ \text{F}$$

$$C_{eq}=\frac{C_۱C_۲}{C_۱+C_۲}=\frac{(۲/۵۳\times ۱۰^{-۱۲})(۳/۶۱\times ۱۰^{-۱۲})}{(۲/۵۳+۳/۶۱)\times ۱۰^{-۱۲}}=۱/۴۹\times ۱۰^{-۱۲}\ \text{F}$$

$$q=C_{eq}V=(۱/۴۹\times ۱۰^{-۱۲})(۱۰)=۱۴/۹\times ۱۰^{-۱۲}\ \text{C}$$

پس از کشیدن خازن ۲ نیز داریم:

$$C'_۲=\frac{۲\pi\varepsilon_۰ L_۲}{Ln\left(\frac{b'_۲}{a_۲}\right)}=۲/۱۷\times ۱۰^{-۱۲}\ \text{F}$$

$$C'_{eq}=\frac{C_۱C'_۲}{C_۱+C'_۲}=۱/۱۷\times ۱۰^{-۱۲}\ \text{F}$$

$$q'=C'_{eq}V=(۱/۱۷\times ۱۰^{-۱۲})(۱۰)=۱۱/۷\times ۱۰^{-۱۲}\ \text{C}$$

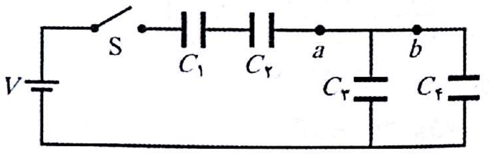
(الف)

$$\Delta q=q'-q=۱۱/۷\times ۱۰^{-۱۲}-۱۴/۹\times ۱۰^{-۱۲}=-۳/۲\times ۱۰^{-۱۲}\ \text{C}$$

$$n=\frac{\Delta q}{e}=\frac{۳/۲\times ۱۰^{-۱۲}}{۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}}=۲\times ۱۰^{۷}$$ عدد

(ب) با توجه به اینکه Δq منفی است لذا همین مقدار بار مثبت از نقطهٔ p به سمت باتری می‌روند. یعنی تعداد n الکترون از باتری حرکت کرده و به طرف سمت راست نقطه P می‌روند.

۲۳●●- در شکل ۲۱-۳۹، باتری دارای اختلاف پتانسیل $V=۹/۰\,\text{V}$، $C_۲=۳/۰\,\mu\text{F}$ ، $C_۴=۴/۰\,\mu\text{F}$ ، و همهٔ خازنها در ابتدا بدون بارند. وقتی کلید S بسته شود، بار کل $۱۲\,\mu\text{C}$ از نقطهٔ a و بار کل $۸/۰\,\mu\text{C}$ از نقطهٔ b عبور می‌کند. (الف) $C_۱$ و (ب) $C_۳$ چقدر است؟



شکل ۲۱-۳۹ مسئلهٔ ۲۳

حل: بار روی $C_۴$ برابر $q_۴=۸\,\mu\text{C}$ و در نتیجه اختلاف پتانسیل دو سر آن برابر است با

$$V_۴=\frac{q_۴}{C_۴}=\frac{۸}{۴}=۲\,\text{V}$$

بار روی خازن $C_۳$ نیز برابر است با $q_۳=۱۲-۸=۴\,\mu\text{C}$ و داریم $V_۳=V_۴=۲V$ در نتیجه $C_۳$ برابر است با

$$C_۳=\frac{q_۳}{V_۳}=\frac{۴}{۲}=۲\,\mu\text{F}$$

برای به دست آوردن $C_۱$، ابتدا ظرفیت معادل را با توجه به بار کل و اختلاف پتانسیل محاسبه می‌کنیم

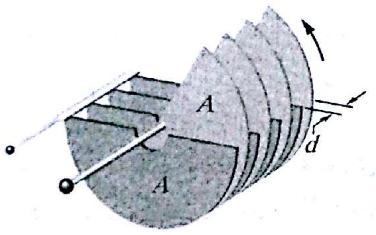
$$C_{eq}=\frac{q_{کل}}{V_{\text{bat}}}=\frac{۱۲}{۹}=\frac{۴}{۳}\,\mu\text{F}$$

از طرفی می‌توان ظرفیت معادل را از طریق مدار بازنویسی کرد. $C_۲$ و $C_۴$ موازی‌اند و خازن معادل آنها با $C_۱$ و $C_۲$ متوالی‌اند لذا می‌توان نوشت.

$$\frac{۱}{C_{eq}}=\frac{۱}{C_۴+C_۳}+\frac{۱}{C_۲}+\frac{۱}{C_۱}$$

$$\frac{۱}{\frac{۴}{۳}}=\frac{۱}{۲+۴}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{C_۱}\Rightarrow C_۱=۴\,\mu\text{F}$$

۲۴- شکل ۲۱-۴۰ خازن متغیری «با فاصلهٔ هوا» را نشان می‌دهد که برای میزان کردن دستی رادیوها به کار می‌رود. صفحه‌ها به طور یک درمیان به یکدیگر متصل شده‌اند: یک دسته از صفحه‌ها در مکان خود ثابت‌اند، و دسته‌ای دیگر می‌توانند بچرخند. خازنی با $n=۸$ صفحه با قطبیت یک در میان، هر یک به مساحت $A=۱/۲۵\,\text{cm}^۲$ و فاصلهٔ صفحه‌های مجاور برابر $d=۳/۴۰\,\text{mm}$ را در نظر بگیرید. ظرفیت بیشینهٔ این خازن چقدر است؟



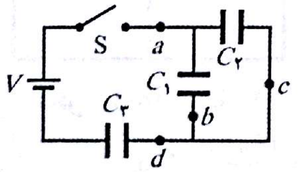
شکل ۲۱-۴۰ مسئلهٔ ۲۴

حل: وقتی که صفحات دقیقاً روبه‌روی هم قرار گیرند ظرفیت بیشینه حاصل می‌شود. در این حالت $(n-۱)$ تک خازن داریم که ظرفیت هر یک $C_۰=\varepsilon_۰A/d$ است لذا ظرفیت کل این آرایش خازنی برابر است با

$$C=(n-۱)C_۰=\frac{(n-۱)\varepsilon_۰A}{d}$$

$$=\frac{(۸-۱)(۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲})(۱/۲۵\times ۱۰^{-۴})}{۳/۴\times ۱۰^{-۳}}=۲/۲۸\times ۱۰^{-۱۲}\ \text{F}$$

۲۵●●- خازنها در شکل ۲۱-۴۱ در ابتدا بدون بارند. ظرفیتها عبارت‌اند از: $C_۱=۴/۰\,\mu\text{F}$ ، $C_۲=۸/۰\,\mu\text{F}$ ، و $C_۳=۱۲\,\mu\text{F}$ و اختلاف پتانسیل باتری $V=۱۲\text{V}$ است. وقتی کلید S بسته شود، چه تعداد الکترون از (الف) نقطهٔ a، (ب) نقطهٔ b، (پ) نقطهٔ c، و (ت) نقطهٔ d می‌گذرد؟ در شکل، آیا الکترونها به طرف بالا یا به طرف پایین از (ث) نقطهٔ b و (ج) نقطهٔ c می‌گذرند؟



شکل ۲۱-۴۱ مسئلهٔ ۲۵

حل: ظرفیت معادل کل برابر است با

$$C_{eq}=\frac{C_۳(C_۱+C_۲)}{C_۳+(C_۱+C_۲)}=۶\,\mu\text{F}$$

Scanned by CamScanner

(الف) باری که از نقطه a می‌گذرد برابر است با

$$q_a = q_{eq} = C_{eq}V = (۶)(۱۲) = ۷۲\mu C$$

$$n_a = \frac{q_a}{e} = \frac{۷۲\times ۱۰^{-۶}}{۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}} = ۴/۵\times ۱۰^{۱۴}$$ عدد

این الکترونها رو به سمت چپ یعنی به سمت قطب مثبت باتری حرکت می‌کنند.

(ب)

$$C_{۱۲} = C_۱ + C_۲ = ۴ + ۸ = ۱۲\mu F$$

$$V_{۱۲} = \frac{q_{eq}}{C_{۱۲}} = \frac{۷۲}{۱۲} = ۶V$$

این هم اختلاف پتانسیل دو سر $C_۱$ و هم اختلاف پتانسیل دو سر $C_۲$ است. بار روی خازن $C_۱$ برابر است با $q_۱ = (۴)(۶) = ۲۴\mu C$ و تعداد الکترون از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$n_b = \frac{q_۱}{e} = \frac{۲۴\times ۱۰^{-۶}}{۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}} = ۱/۵\times ۱۰^{۱۴}$$ عدد

این الکترون‌ها به سمت بالا حرکت می‌کنند

(پ)

$$q_e = C_۲V_{۱۲} = (۸)(۶) = ۴۸\mu C$$

$$n_C = \frac{q_۲}{e} = \frac{۴۸\times ۱۰^{-۶}}{۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}} = ۳\times ۱۰^{۱۴}$$ تعداد

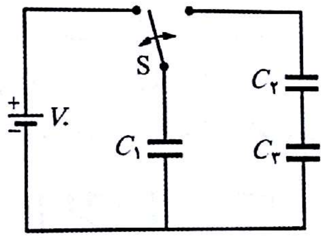
این الکترونها نیز به سمت بالا حرکت می‌کنند.

(ت) چون $C_۳$ با باتری متوالی است، بار عبوری از آن همان بار عبوری از باتری است. در نتیجه تعداد $۴/۵\times ۱۰^{۱۴}$ الکترون رو به سمت راست از نقطه d می‌گذرند.

(ث) همانطور که در قسمت (ب) دیدیم الکترونها رو به بالا حرکت می‌کنند.

(ج) با توجه به قسمت (پ) الکترونها رو به بالا از نقطه C می‌گذرند.

●●●۲۶- شکل ۲۱-۱۸، یک باتری ۱۲ ولتی و سه خازن بدون بار به ظرفیتهای $C_۱ = ۴/۰۰\mu F$، $C_۲ = ۶/۰۰\mu F$، و $C_۳ = ۳/۰۰\mu F$ را نشان می‌دهد. کلید به طرف چپ زده می‌شود تا اینکه خازن ۱ به طور کامل باردار شود. سپس کلید به طرف راست زده می‌شود. بار نهایی روی (الف) خازن ۱، (ب) خازن ۲ و (پ) خازن ۳ چقدر است؟ GO



شکل ۲۱-۱۸ مسئلهٔ ۲۶

حل:

$$C_{۲۳} = \frac{C_۲C_۳}{C_۲ + C_۳} = \frac{(۶)(۳)}{۶+۳} = ۲\mu F$$

هنگامی که کلید به سمت چپ زده می‌شود خازن $C_۱$ شارژ می‌شود.

$$q_۱ = C_۱V = (۴)(۱۲) = ۴۸\mu F \quad , \quad q_{۲۳} = ۰$$

$$q_{کل} = ۴۸\mu F$$

وقتی که کلید به سمت راست زده می‌شود باتری از مدار خارج شده و بار $q_۱$ از روی خازن $C_۱$ به خازن $C_{۲۳}$ منتقل شده و هم پتانسیل می‌شوند.

(الف)

$$V' = \frac{q'_۱}{C_۱} = \frac{q'_{۲۳}}{C_{۲۳}} = \frac{q_۱}{C_۱ + C_۲}$$

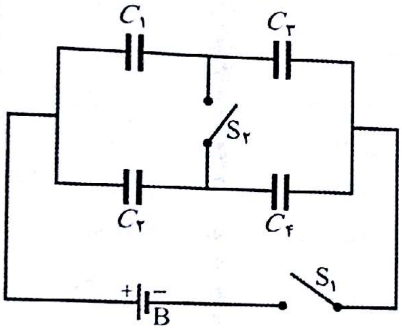
$$\Rightarrow \frac{q'_۱}{۴} = \frac{۴۸}{۴+۲} \Rightarrow q'_۱ = ۳۲\mu C$$

(ب) و (پ)

$$\frac{q'_{۲۳}}{۲} = \frac{۴۸}{۶} \Rightarrow q'_{۲۳} = ۱۶\mu C$$

$$q'_۲ = q'_۳ = q'_{۲۳} = ۱۶\mu C$$

●●●۲۷- شکل ۲۱-۴۳ یک باتری ۱۲/۰ ولتی و چهار خازن بدون بار با ظرفیتهای $C_۱ = ۱/۰۰\mu F$، $C_۲ = ۲/۰۰\mu F$، $C_۳ = ۳/۰۰\mu F$، و $C_۴ = ۴/۰۰\mu F$ را نشان می‌دهد. اگر فقط کلید $S_۱$ بسته شود، بار روی (الف) خازن ۱، (ب) خازن ۲، (پ) خازن ۳، و (ت) خازن ۴ چقدر می‌شود؟ اگر هر دو کلید بسته شوند، بار روی (ث) خازن ۱، (ج) خازن ۲، (چ) خازن ۳، و (ح) خازن ۴ چقدر می‌شود؟



شکل ۲۱-۴۳ مسئلهٔ ۲۷

حل: (الف) وقتی کلید $S_۲$ باز و کلید $S_۱$ بسته باشد، $C_۱$ و $C_۳$ و نیز $C_۲$ و $C_۴$ متوالی و معادل آنها با هم موازی‌اند.

$$C_{۱۳} = \frac{C_۱C_۳}{C_۱ + C_۳} = \frac{(۱)(۳)}{۱+۳} = ۰/۷۵\mu F$$

$$q_۱ = q_۳ = q_{۱۳} = C_{۱۳}V$$

$$q_۱ = (۰/۷۵)(۱۲) = ۹\mu F$$

(ب)

$$C_{۲۴} = \frac{C_۲C_۴}{C_۲ + C_۴} = \frac{(۲)(۴)}{۲+۴} = \frac{۴}{۳}\mu F$$

$$q_۲ = q_۴ = q_{۲۴} = C_{۲۴}V$$

$$q_۲ = \left(\frac{۴}{۳}\right)(۱۲) = ۱۶\mu C$$

(پ)

$$q_۳ = q_۱ = ۹\mu F$$

(ت)

$$q_۴ = q_۲ = ۱۶\mu F$$

(ث) و (ج) حال اگر کلید $S_۲$ را ببندیم، خازنهای $C_۱$ و $C_۲$ موازی و همچنین خازنهای $C_۳$ و $C_۴$ موازی و نتیجه آنها با هم متوالی می‌گردند. در اینصورت داریم:

$$C_{۱۲} = C_۱ + C_۲ = ۳\mu F$$

$$C_{۳۴} = C_۳ + C_۴ = ۷\mu F$$

Scanned by CamScanner

$$C_{eq}=\frac{C_{۱۲}C_{۳۴}}{C_{۱۲}+C_{۳۴}}=\frac{(۳)(۷)}{۳+۷}=۲/۱\,\mu F$$

$$q_{eq}=q_{۱۲}=q_{۳۴}=C_{eq}V=(۲/۱)(۱۲)=۲۵/۲\,\mu C$$

$$V_۱=V_۲=\frac{q_{۱۲}}{C_{۱۲}}=\frac{۲۵/۲}{۳}=۸/۴V$$

$$q_۱=C_۱V_۱=(۱)(۸/۴)=۸/۴\,\mu C$$

$$q_۲=C_۲V_۲=(۱)(۸/۴)=۱۶/۸\,\mu C$$

$$V_{۳۴}=V-V_{۱۲}=۱۲-۸/۴=۳/۶V$$

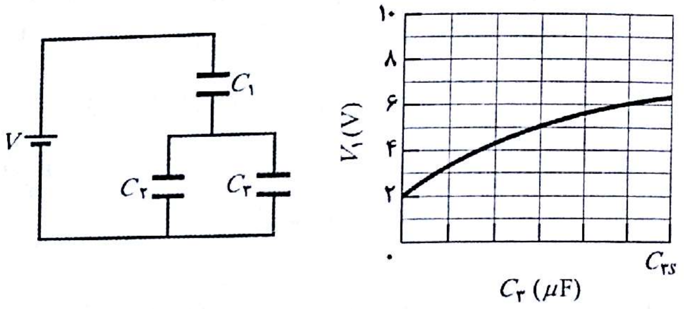
(چ) و (ح)

چون خازنهای $C_۳$ و $C_۴$ موازی‌اند $V_۳=V_۴=V_{۳۴}=۳/۶V$ بوده و بار روی خازنها $C_۳$ و $C_۴$ عبارتند از

$$q_۳=C_۳V_۳=(۳)(۳/۶)=۱۰/۸\,\mu C$$

$$q_۴=C_۴V_۴=(۴)(۳/۶)=۱۴/۴\,\mu C$$

•••۲۸- خازن ۳ در شکل ۲۱-۴۴ الف یک *خازن متغیر* است (ظرفیت $C_۳$ آن می‌تواند تغییر کند). شکل ۲۱-۴۴ ب، پتانسیل الکتریکی $V_۱$ در دو سر خازن ۱ را برحسب $C_۳$ به دست می‌دهد.



(الف) (ب)

شکل ۲۱-۴۴ مسئلهٔ ۲۸

مقیاس محور افقی با $C_{۳s}=۱۲/۰\,\mu F$ مشخص شده است. پتانسیل الکتریکی $V_۱$ وقتی $C_۳\to\infty$ میل کند به مجانب ۱۰V می‌رسد. (الف) پتانسیل الکتریکی V در دو سر باتری، (ب) $C_۱$، و (پ) $C_۲$ چقدر است؟

حل: خازن معادل مدار را به دست می‌آوریم.

$$C_{eq}=\frac{C_۱C_{۲۳}}{C_۱+C_{۲۳}}=\frac{C_۱(C_۲+C_۳)}{C_۱+(C_۲+C_۳)}$$

حال می‌توان نوشت $q=q_۱=C_۱V_۱$ و از طرفی $q=C_{eq}V$ است که از اینجا می‌توان $V_۱$ اختلاف پتانسیل دو سر خازن $C_۱$ را به دست آورد.

$$V_۱=\frac{C_۲+C_۳}{C_۱+C_۲+C_۳}V$$

(الف) وقتی $C_۳\to\infty$ میل کند داریم $V_۱=V$ و چون در این حالت پتانسیل الکتریکی $V_۱$ به تعداد مجانبی ۱۰V میل می‌کند لذا پتانسیل دو سر باتری $V=۱۰V$ است.

(ب) و (پ) از منحنی می‌بینیم که در $C_۳=۰$ داریم $V_۱=۲V$، لذا با توجه به رابطه فوق داریم:

$$۲=\frac{C_۲}{C_۱+C_۲}(۱۰)\Rightarrow C_۱=۴C_۲$$

همچنین از نمودار مشاهده می‌شود که در $C_۳=۶\mu F$ و $V_۱=\frac{۱}{۲}V$ است لذا داریم

$$\frac{۱}{۲}V=\frac{C_۲+۶}{C_۱+C_۲+۶}V\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{C_۲+۶}{۴C_۲+C_۲+۶}\Rightarrow C_۲=۲\mu F$$

و در نتیجه برای $C_۱$ از رابطه $C_۱=۴C_۲$ خواهیم داشت $C_۱=۸\mu F$.

بخش ۲۱-۵ انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی

•۲۹- خازنی به ظرفیت $۲/۰\mu F$ با خازن دیگری به ظرفیت $۴/۰\mu F$ به طور موازی به اختلاف پتانسیل ۳۰۰V بسته شده‌اند. انرژی کل ذخیره شده در خازنها را محاسبه کنید. SSM

حل:

$$C_{eq}=C_۱+C_۲=۶\,\mu F$$

$$U=\frac{۱}{۲}C_{eq}V^۲=\frac{۱}{۲}(۶\times۱۰^{-۶})(۳۰۰)^۲=۰/۲۷J$$

•۳۰- یک خازن تخت پر از هوا به مساحت $۴۰cm^۲$ و فاصلهٔ صفحه‌های ۱/۰mm تا اختلاف پتانسیل ۶۰۰V باردار شده است. مطلوب است (الف) ظرفیت، (ب) بزرگی بار روی هرصفحه، (پ) انرژی ذخیره شده، (ت) میدان الکتریکی میان صفحه‌ها و (ث) چگالی انرژی میان صفحه‌ها.

حل: (الف)

$$C=\frac{\varepsilon_۰A}{d}=\frac{(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۴۰\times۱۰^{-۴})}{۱\times۱۰^{-۳}}$$

$$=۳/۵۴\times۱۰^{-۱۱}F=۳۵/۴\,\mu F$$

(ب)

$$q=CV=(۳/۵۴\times۱۰^{-۱۱})(۶۰۰)$$

$$=۲/۱۲\times۱۰^{-۸}C=۲۱/۲nC$$

(پ)

$$U=\frac{۱}{۲}CV^۲=\frac{۱}{۲}(۳/۵۴\times۱۰^{-۱۱})(۶۰۰)^۲$$

$$=۶/۳۷\times۱۰^{-۶}J$$

(ت)

$$E=\frac{V}{d}=\frac{۶۰۰}{۱\times۱۰^{-۳}}=۶\times۱۰^۵\,V/m$$

(ث)

$$u=\frac{۱}{۲}\varepsilon_۰E^۲=\frac{۱}{۲}(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۶\times۱۰^۵)^۲$$

$$=۱/۶J/m^۳$$

•۳۱- برای آنکه ۱۰kW.h انرژی با اختلاف پتانسیل ۱۰۰۰V ذخیره شود، به چه ظرفیتی نیاز است؟

حل:

$$۱۰kW\cdot h=(۱۰)(۱۰^۳)(۳۶۰۰)=۳/۶\times۱۰^۷J$$

$$U=\frac{۱}{۲}CV^۲\Rightarrow۳/۶\times۱۰^۷=\frac{۱}{۲}C(۱۰۰۰)^۲\Rightarrow C=۷۲F$$

•۳۲- چقدر انرژی در $۱/۰۰m^۳$ هوا، بر اثر میدان الکتریکی در «هوای صاف» به بزرگی ۱۵۰V/m ذخیره می‌شود؟

حل:

$$u=\frac{۱}{۲}\varepsilon_۰E^۲=\frac{۱}{۲}(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۱۵۰)^۲$$

$$=۹/۹۶\times۱۰^{-۸}J/m^۳$$

$$U=uV=(۹/۹۶\times۱۰^{-۸})(۱)=۹/۹۶\times۱۰^{-۸}J$$

Scanned by CamScanner

۳۳●●- فرض کنید یک الکترون ساکن، باری نقطه‌ای است. مطلوب است چگالی u میدان الکتریکی آن در فاصله‌های شعاعی (الف) $r=۱/۰۰\,mm$، (ب) $r=۱/۰۰\,\mu m$، (پ) $r=۱/۰۰\,nm$، و (ت) $r=۱/۰۰\,pm$. (ث) u در حد $r\to ۰$ چقدر است؟

حل:

$$u=\frac{۱}{۲}\varepsilon_0 E^۲=\frac{۱}{۲}\varepsilon_0\left(\frac{e}{۴\pi\varepsilon_0 r^۲}\right)=\frac{e^۲}{۳۲\pi^۲\varepsilon_0 r^۴}=\frac{۹/۱۷\times۱۰^{-۳۰}}{r^۴}$$

(الف) به ازای $r=۱\times۱۰^{-۳}$ m داریم $u=۹/۱۶\times۱۰^{-۱۸}$ J/m^۳.

(ب) به ازای $r=۱\times۱۰^{-۶}$ m داریم $u=۹/۱۶\times۱۰^{-۶}$ J/m^۳.

(پ) به ازای $r=۱\times۱۰^{-۹}$ m داریم $u=۹/۱۶\times۱۰^{۶}$ J/m^۳.

(ت) به ازای $r=۱\times۱۰^{-۱۲}$ m داریم $u=۹/۱۶\times۱۰^{۱۸}$ J/m^۳.

(ث) به ازای $r\to ۰$ داریم $u\to\infty$.

۳۴●●- در شکل ۲۱-۲۹، اختلاف پتانسیل $V=۱۰۰V$ به دو سر یک آرایش خازنی با ظرفیتهای $C_۱=۱۰/۰\,\mu F$، $C_۲=۵/۰۰\,\mu F$، و $C_۳=۱۵/۰۰\,\mu F$ اعمال شده است. مطلوب است (الف) بار $q_۳$، (ب) اختلاف پتانسیل $V_۳$، و (پ) انرژی ذخیره شدهٔ $U_۳$ در خازن ۳، (ت) $q_۱$، (ث) $V_۱$ و (ج) $U_۱$ برای خازن ۱، و (چ) $q_۲$، (ح) $V_۲$، و (خ) $U_۲$ برای خازن ۲.

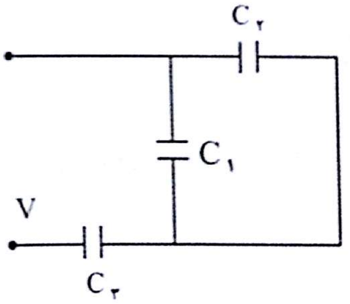
حل:

$$C_{۱۲}=C_۱+C_۲=۱۰+۵=۱۵\mu F$$

$$C_{eq}=\frac{C_۳C_{۱۲}}{C_۳+C_{۱۲}}=\frac{(۱۵)(۱۵)}{۱۵+۱۵}=۷/۵\mu F$$

$$q_{eq}=q_{۱۲}=q_۳=C_{eq}V=(۷/۵)(۱۰۰)=۷۵۰\mu C$$

$$V_۱=V_۲=V_{۱۲}=\frac{q_{۱۲}}{C_{۱۲}}=\frac{۷۵۰}{۱۵}=۵۰V$$



(الف) با توجه به محاسبات فوق $q_۳=۷۵۰\mu C$ است.

(ب) $V_۳=\frac{q_۳}{C_۳}=\frac{۷۵۰}{۱۵}=۵۰V$

(پ) $U_۳=\frac{۱}{۲}C_۳V_۳^۲=\frac{۱}{۲}(۱۵)(۵۰)^۲=۱/۸۸\times۱۰^{-۲}\,J$

(ت) $q_۱=C_۱V_۱=(۱۰)(۵۰)=۵۰۰\mu C$

(ث) قبلاً محاسبه شده است $V_۱=۵۰V$.

(ج) $U_۱=\frac{۱}{۲}C_۱V_۱^۲=\frac{۱}{۲}(۱۰\times۱۰^{-۶})(۵۰)^۲=۱/۲۵\times۱۰^{-۲}\,J$

(چ) $q_۲=C_۲V_۲=(۵)(۵۰)=۲۵۰\mu C$

(ح) قبلاً محاسبه شده است $V_۲=۵۰V$.

(خ) $U_۲=\frac{۱}{۲}C_۲V_۲^۲=\frac{۱}{۲}(۵\times۱۰^{-۶})(۵۰)^۲=۶/۲۵\times۱۰^{-۳}\,J$

۳۵●●- صفحه‌های موازی یک خازن، با مساحت $۸/۵۰cm^۲$ و فاصلهٔ پر از هوا برابر ۳/۰۰mm، توسط یک باتری ۶/۰۰V باردار شده است. سپس باتری برداشته شده و صفحه‌ها (بدون تخلیه) در فاصلهٔ ۸/۰۰mm از یکدیگر قرار داده می‌شوند. با چشمپوشی از اثر لبه‌ها (الف) اختلاف پتانسیل میان صفحه‌ها، (ب) انرژی ذخیره شدهٔ اولیه و (پ) انرژی ذخیره شدهٔ نهایی، و (ت) کار لازم برای جداکردن صفحه‌ها را به دست آورید؟

WWW ILW SSM

حل: بار روی صفحه‌ها ثابت می‌ماند، لذا داریم

$$q=CV=C'V'\Rightarrow\frac{\varepsilon_0A}{d}V=\frac{\varepsilon_0A}{d'}V'\Rightarrow\frac{V}{d}=\frac{V'}{d'}$$

(الف)

$$\frac{۶}{۳\times۱۰^{-۳}}=\frac{V'}{۸\times۱۰^{-۳}}\Rightarrow V'=۱۶V$$

(ب)

$$C=\frac{\varepsilon_0A}{d}=\frac{(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۸/۵\times۱۰^{-۴})}{۳\times۱۰^{-۳}}=۲/۵۱\times۱۰^{-۱۲}\,F$$

$$U=\frac{۱}{۲}CV^۲=\frac{۱}{۲}(۲/۵۱\times۱۰^{-۱۲})(۶)^۲=۴/۵۲\times۱۰^{-۱۱}\,J$$

(پ)

$$C'=\frac{\varepsilon_0A}{d'}=\frac{(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۸/۵\times۱۰^{-۴})}{۸\times۱۰^{-۳}}=۹/۴\times۱۰^{-۱۳}\,F$$

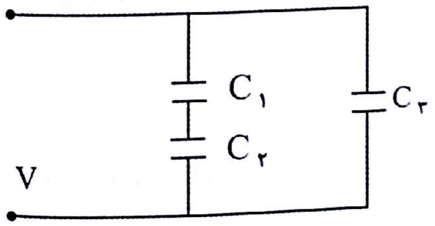
$$U'=\frac{۱}{۲}C'V'^۲=\frac{۱}{۲}(۹/۴\times۱۰^{-۱۳})(۱۶)^۲=۱۲\times۱۰^{-۱۱}\,J$$

(ت)

$$W=U'-U=۱۲\times۱۰^{-۱۱}-۴/۵۲\times۱۰^{-۱۱}=۷/۴۸\times۱۰^{-۱۱}\,J$$

۳۶●●- در شکل ۲۱-۲۸، اختلاف پتانسیل $V=۱۰۰V$ به دو سر یک آرایش خازنی با ظرفیتهای $C_۱=۱۰/۰\,\mu F$، $C_۲=۵/۰۰\,\mu F$، و $C_۳=۴/۰\,\mu F$ اعمال شده است. مطلوب است (الف) بار $q_۳$، (ب) اختلاف پتانسیل $V_۳$، و (پ) انرژی ذخیره شدهٔ $U_۳$ در خازن ۳، (ت) $q_۱$، (ث) $V_۱$، و (ج) $U_۱$ برای خازن ۱، و (چ) $q_۲$، (ح) $V_۲$، و (خ) $U_۲$ برای خازن ۲.

حل:



(الف) $q_۳=C_۳V=(۴)(۱۰۰)=۴۰۰\mu C$

(ب) $V_۳=V=۱۰۰V$

(پ) $U_۳=\frac{۱}{۲}C_۳V_۳^۲=\frac{۱}{۲}(۴\times۱۰^{-۶})(۱۰۰)^۲=۰/۰۲J$

(ت)

$$C_{۱۲}=\frac{C_۱C_۲}{C_۱+C_۲}=\frac{(۱۰)(۵)}{۱۰+۵}=۳/۳۳\mu F$$

$$q_۱=q_۲=q_{۱۲}=C_{۱۲}V=(۳/۳۳)(۱۰۰)=۳۳۳\mu C$$

Scanned by CamScanner

(ث) $V_۱ = \frac{q_۱}{C_۱} = \frac{۳۳۳}{۱۰} = ۳۳/۳\,\text{V}$

(ج) $U_۱ = \frac{۱}{۲}C_۱V_۱^۲ = \frac{۱}{۲}(۱۰)(۳۳/۳)^۲ = ۵/۵۵\times ۱۰^{-۳}\,\text{J}$

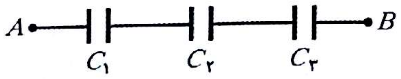
(چ) قبلاً به دست آمده است.

$q_۲ = q_۱ = ۳۳۳\,\mu\text{C}$

(ح) $V_۲ = \frac{q_۲}{C_۲} = \frac{۳۳۳}{۵} = ۶۶/۶\,\text{V}$

(خ) $U_۲ = \frac{۱}{۲}C_۲V_۲^۲ = \frac{۱}{۲}(۵\times ۱۰^{-۶})(۶۶/۶)^۲ = ۱/۱۱\times ۱۰^{-۲}\,\text{J}$

۳۷●●- در شکل ۲۱-۴۵، $C_۱=۱۰/۰\,\mu F$ ، $C_۲=۲۰/۰\,\mu F$ ، و $C_۳=۲۵/۰\,\mu F$ است. اگر هیچ خازنی نتواند اختلاف پتانسیلی بیش از ۱۰۰V را بدون فروشکست الکتریکی تاب بیاورد، (الف) بزرگی اختلاف پتانسیل بیشینه‌ای که می‌تواند میان نقطه‌های A و B به‌وجود آید و (ب) انرژی بیشینه‌ای که می‌تواند در این آرایش سه خازنی ذخیره شود، چقدر است؟



شکل ۲۱-۴۵ مسئلهٔ ۳۷

حل: چون خازنها به طور متوالی بسته شده‌اند بار روی آنها یکسان است. خازنی که ظرفیت کمتری دارد اختلاف پتانسیل بیشتری دارد. پس بیشترین اختلاف پتانسیل یعنی ۱۰۰ ولت روی دو سر خازن $C_۱$ قرار می‌گیرد.

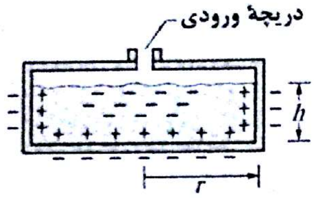
$$q_{eq} = q_۱ = q_۲ = q_۳ = C_۱V_۱ = (۱۰)(۱۰۰) = ۱۰۰۰\,\mu\text{C}$$

$$\frac{۱}{C_{eq}} = \frac{۱}{C_۱} + \frac{۱}{C_۲} + \frac{۱}{C_۳} = \frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۲۰} + \frac{۱}{۲۵} \Rightarrow C_{eq} = ۵/۲۶\,\mu\text{F}$$

(الف) $V_{eq} = \frac{q_{eq}}{C_{eq}} = \frac{۱۰۰۰}{۵/۲۶} = ۱۹۰\,\text{V}$

(ب) $U_{\max} = \frac{۱}{۲}C_{eq}V_{eq}^۲ = \frac{۱}{۲}(۵/۲۶)(۱۹۰)^۲ = ۰/۰۹۵\,\text{J}$

۳۸- به عنوان یک مهندس ایمنی، شما باید عمل ذخیره‌سازی مایعات رسانای قابل اشتعال را در یک محفظهٔ نارسانا ارزیابی کنید. شرکت تولید کنندهٔ یک مایع معین، از یک محفظهٔ کوتاه و ضخیم پلاستیکی به شعاع $r=۰/۲۰\,\text{m}$ استفاده کرده است و آن را تا بلندی $h=۱۰\,\text{cm}$ ، که ارتفاع کامل سطح داخلی محفظه نیست، پر می‌کند (شکل ۲۱-۴۶). بررسیهای شما نشان می‌دهد که در حین جابه‌جایی محفظه در شرکت، سطح خارجی آن، یک چگالی بار منفی به بزرگی $۲/۰\,\mu\text{C/m}^۲$ (تقریباً یکنواخت) به دست می‌آورد. چون مایع یک مادهٔ رساناست، بار روی محفظه باعث جدایی بار در داخل مایع می‌شود. (الف) چقدر بار منفی در بخش مرکزی مایع القا شده است؟ (ب) فرض کنید ظرفیت بخش مرکزی مایع نسبت به زمین ۳۵ pF است. انرژی پتانسیل وابسته به بار منفی در این خازن مؤثر چقدر است؟ (پ) اگر جرقه‌ای میان زمین و بخش مرکزی مایع (از طریق دریچهٔ ورودی) رخ دهد، این انرژی پتانسیل می‌تواند جرقه را تقویت کند. کمینهٔ انرژی جرقه که برای مشتعل ساختن مایع لازم است برابر با ۱۰mJ است. در این وضعیت، آیا جرقه می‌تواند مایع را مشتعل کند؟



شکل ۲۱-۴۶ مسئلهٔ ۳۸

حل: **(الف)** مساحت سطح باردار شده برابر است با

$$A = \pi r^۲ + ۲\pi r h = \pi(۰/۲)^۲ + ۲\pi(۰/۲)(۰/۱) = ۰/۲۵\,\text{m}^۲$$

از روی شکل مشاهده می‌شود که گرچه پایین این حجم استوانه‌ای باردار شده است ولی بالای آن بدون بار است. بنابراین بار منفی $q = \sigma A = (۲\times ۱۰^{-۶})(۰/۲۵) = ۰/۵\,\mu\text{C}$ روی سطح خارجی قرار می‌گیرد و در نتیجه و با توجه به فرضی مسئله همان بار q در سطح داخلی مایع القاء می‌شود.

(ب) $U = \frac{q^۲}{۲C} = \frac{(۰/۵)^۲}{(۲)(۳۵\times ۱۰^{-۱۲})} = ۳/۶\times ۱۰^{-۳}\,\text{J} = ۳/۶\,\text{mJ}$

(پ) چون انرژی ذخیره شده کمتر از انرژی لازم برای اشتعال است، جرقه باعث اشتعال نمی‌شود.

۳۹●●- یک کرهٔ فلزی منزوی باردار به قطر ۱۰cm دارای پتانسیل ۸۰۰۰V نسبت به $V=۰$ در بینهایت است. چگالی انرژی را در میدان الکتریکی نزدیک به سطح کره محاسبه کنید.

حل: پتانسیل و میدان الکتریکی روی سطح کره عبارتند از

$$V = k\frac{q}{R} \quad , \quad E = k\frac{q}{R^۲}$$

لذا داریم $E = \frac{V}{R}$ ، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$u = \frac{۱}{۲}\varepsilon_۰ E^۲ = \frac{۱}{۲}\varepsilon_۰\left(\frac{V}{R}\right)^۲ = \frac{۱}{۲}(۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲})\left(\frac{۸۰۰۰}{۰/۰۵}\right)^۲ = ۰/۱۱۳\,\text{J/m}^۳$$

بخش ۲۱-۶ خازن با دی‌الکتریک

۴۰●- یک خازن تخت پر از هوا دارای ظرفیت ۵۰pF است. (الف) اگر مساحت هر یک از صفحه‌ها $۰/۳۵\,\text{m}^۲$ باشد، فاصلهٔ آنها چقدر است؟ (ب) اگر اکنون ناحیهٔ میان صفحه‌ها با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa=۵/۶$ پرشود، ظرفیت خازن چقدر می‌شود؟

حل: **(الف)** $C = \frac{\kappa\varepsilon_۰ A}{d} \Rightarrow d = \frac{\kappa\varepsilon_۰ A}{C}$

$$d = \frac{(۱)(۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲})(۰/۳۵)}{۵۰\times ۱۰^{-۱۲}} = ۶/۲\times ۱۰^{-۲}\,\text{m}$$

(ب) $C' = \kappa C = (۵/۶)(۵۰) = ۲۸۰\,\text{pF}$

Scanned by CamScanner

●۴۱- از شما خواسته شده است که یک خازن پر از هوا به ظرفیت $7/4\ pF$ را به خازنی تبدیل کنید که با اختلاف پتانسیل بیشینهٔ $652V$ تا انرژی $7/4\mu J$ را ذخیره کند. اگر هیچ‌گونه شبهٔ کناره‌ای وجود نداشته باشد از کدام دی‌الکتریک در جدول ۲۱-۱ باید برای پرکردن فضای بین صفحه‌های خازن استفاده کنید؟ **SSM**

حل:

$$U=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}\kappa C_\circ V^2 \Rightarrow \kappa=\frac{2U}{C_\circ V^2}$$

$$\kappa=\frac{2(7/4\times10^{-6})}{(7/4\times10^{-12})(652)^2}=4/7$$

●۴۲- یک خازن تخت پر از هوا دارای ظرفیت $1/3\,pF$ است. فاصلهٔ صفحه‌ها را دو برابر می‌کنیم و میان آنها موم قرار می‌دهیم. ظرفیت جدید $2/6\,pF$ است. ثابت دی‌الکتریک موم را به دست آورید.

حل

$$C_1=\frac{\kappa\varepsilon_\circ A}{d_1} \qquad C_2=\frac{\kappa_2\varepsilon_\circ A}{d_2}=\frac{\kappa_2\varepsilon_\circ A}{2d_1}$$

$$\frac{C_2}{C_1}=\frac{\kappa_2}{2\kappa_1}\Rightarrow\frac{2/6}{1/3}=\frac{\kappa_2}{2(1)}\Rightarrow\kappa_2=4$$

●۴۳- کابل هم‌محوری که در یک خط انتقال به کار گرفته می‌شود دارای شعاع داخلی $0/10\,mm$ و شعاع خارجی $0/60\,mm$ است. ظرفیت به ازای متر را برای این کابل محاسبه کنید. فرض کنید فضای میان رساناها با پلی استیرن پر شده است؟ **SSM**

حل: ظرفیت خازن استوانه‌ای از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

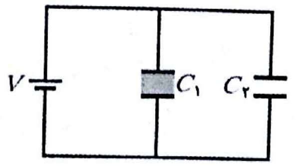
$$C=\frac{2\pi k\varepsilon_\circ L}{Ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

ظرفیت بر متر کابل برابر است با

$$\frac{C}{L}=\frac{2(3/14)(2/6)(8/85\times10^{-12})}{Ln\left(\frac{0/6}{0/1}\right)}$$

$$=8/1\times10^{-11}\,F/m=81\,pF/m$$

●●۴۴- در شکل ۲۱-۴۷، چقدر بار توسط باتری $12/0$ ولتی روی خازنهای تخت ذخیره شده است؟ یکی از آنها با هوا، و دیگری با دی‌الکتریکی با ثابت $\kappa=3/00$ پر شده است. مساحت صفحهٔ دو خازن $5/00\times10^{-3}m^2$ و فاصلهٔ صفحه‌ها $2/00\,mm$ است.



شکل ۲۱-۴۷ مسئلهٔ ۴۴

حل:

$$C_2=\frac{\varepsilon_\circ A}{d}=\frac{(8/85\times10^{-12})(5\times10^{-3})}{2\times10^{-3}}$$

$$=2/21\times10^{-11}\,F=22/1pF$$

$$C_1=\frac{\kappa\varepsilon_\circ A}{d}=\kappa C_2=(3)(2/21\times10^{-11})$$

$$=6/63\times10^{-11}\,F=66/3pF$$

$$q_1=C_1V=(66/3)(12)=797/6\,pC$$

$$q_2=C_2V=(22/1)(12)=265/2\,pC$$

●●۴۵- مادهٔ معینی دارای ثابت دی‌الکتریک ۲/۸ و استحکام دی‌الکتریک $18MV/m$ است. اگر از این ماده به عنوان دی‌الکتریک در خازن تخت استفاده شود، مساحت کمینهٔ صفحه‌های خازن باید چقدر باشد تا ظرفیت $7/0\times10^{-2}\mu F$ به دست آید و تضمین شود که خازن می‌تواند اختلاف پتانسیل $4/0kV$ را تاب بیاورد؟ **ILW SSM**

حل:

$$E_m=\frac{V_m}{d}\Rightarrow18\times10^6=\frac{4\times10^3}{d}\Rightarrow d=2/22\times10^{-4}\,m$$

$$C=\frac{\kappa\varepsilon_\circ A}{d}\Rightarrow A=\frac{Cd}{k\varepsilon_\circ}$$

$$A=\frac{(7\times10^{-2}\times10^{-6})(2/22\times10^{-4})}{(2/8)(8/85\times10^{-12})}=0/627\,m^2$$

●●۴۶- از شما خواسته شده است که خازنی با ظرفیت نزدیک به $1nF$ و پتانسیل فروشکست بیش از $10000V$ را بسازید. به نظرتان می‌رسد که از یک لیوان پیرکس بلند به عنوان دی‌الکتریک استفاده کنید و سطحهای خمیدهٔ داخلی و خارجی آن را با ورقه‌های آلومینیومی به عنوان صفحه‌های خازن بپوشانید. بلندی لیوان $15cm$، شعاع داخلی آن $3/6cm$ و شعاع خارجی آن $3/8\ cm$ است. (الف) ظرفیت و (ب) پتانسیل فروشکست این خازن چقدر است؟

حل: (الف) این مجموعه یک خازن استوانه‌ای با دی‌الکتریک را تشکیل می‌دهد. ظرفیت چنین خازنی برابر است با:

$$C=\frac{2\pi\kappa\varepsilon_\circ L}{Ln\left(\frac{b}{a}\right)}=\frac{2\pi(4/7)(8/85\times10^{-12})(0/15m)}{Ln\left(\frac{3/8}{3/6}\right)}$$

$$=0/73\times10^{-9}\,F=0/73nF$$

(ب) قدرت دی‌الکتریک پیرکس، یعنی بیشینه مقدار میدان الکتریکی‌ای که پیرکس می‌تواند بدون سوختن عمل کند برابر $14kV/mm$ است، بنابراین پتانسیل شکست برابر خواهد بود با:

$$V_m=\int_a^b E_m dr=E_m(b-a)=(14)(38-36)$$

$$=28kV$$

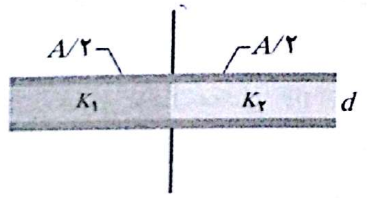
●●۴۷- خازن تخت معینی با دی‌الکتریکی با ثابت $\kappa=5/5$ پر شده است. مساحت هر صفحهٔ آن $0/034m^2$ است و صفحه‌ها $2/0mm$ از یکدیگر فاصله دارند. اگر میدان الکتریکی میان

Scanned by CamScanner

صفحه‌ها از ۲۰۰kN/C تجاوز کند، خازن فرو می‌ریزد (اتصال کوتاه شده و می‌سوزد). انرژی بیشینه‌ای که می‌تواند در خازن ذخیره شود چقدر است؟

حل:
$$C=\frac{\kappa\varepsilon_0 A}{d}=\frac{(5.5)(8.85\times10^{-12})(0.034)}{2\times10^{-3}}=8.27\times10^{-10}\ \mathrm{F}$$
$$V_m=E_m d=(200\times10^{3})(2\times10^{-3})=400\mathrm{V}$$
$$U_m=\frac{1}{2}CV_m^2=\frac{1}{2}(8.27\times10^{-10})(400)^2=6.62\times10^{-5}\ \mathrm{J}$$

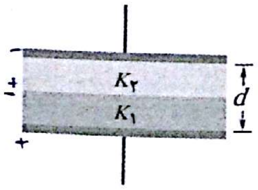
۴۸۰۰- شکل ۲۱-۴۸ یک خازن تخت با مساحت صفحهٔ $A=5.56\,\mathrm{cm}^2$ و فاصلهٔ صفحه‌های $d=56.5$ mm را نشان می‌دهد. نیمهٔ سمت چپ فضای خالی میان صفحه‌ها با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa_1=7.00$ و نیمهٔ سمت راست آن با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa_2=12.0$ پر شده است. ظرفیت این خازن چقدر است؟



شکل ۲۱-۴۸ مسئلهٔ ۴۸

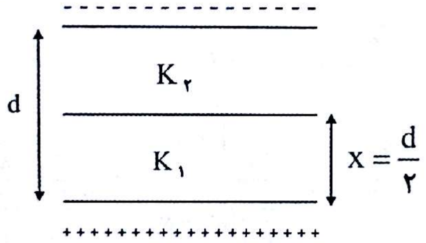
حل:
$$C_1=\frac{\kappa_1\varepsilon_0 A_1}{d_1}\ ,\ C_2=\frac{\kappa_2\varepsilon_0 A_2}{d_2}\ ,\ A_1=A_2=\frac{A}{2}$$
$$C_1=\kappa_1\frac{\varepsilon_0 A}{2d}\ ,\ C_2=\frac{\kappa_2\varepsilon_0 A}{2d}\ ,\ d_1=d_2=d$$
چون خازنها به صورت موازی بسته شده‌اند ظرفیت معادل آنها برابر است با
$$C=C_1+C_2=\frac{\varepsilon_0 A}{2d}(\kappa_1+\kappa_2)$$
$$=\frac{(8.85\times10^{-12})(5.56\times10^{-4})}{(2)(5.5\times10^{-3})}(7+12)=8.41\times10^{-12}\ \mathrm{F}$$

۴۹۰۰- شکل ۲۱-۴۹ یک خازن تخت با مساحت صفحهٔ $A=7.89\,\mathrm{cm}^2$ و فاصلهٔ صفحه‌ها برابر $d=4.62$ mm را نشان می‌دهد. نیمهٔ بالایی فضای خالی میان صفحه‌ها با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa_1=11.0$ و نیمهٔ پایینی آن با ماده‌ای با ثابت دی الکتریک $\kappa_2=12.0$ پر شده است. ظرفیت این خازن چقدر است؟



شکل ۲۱-۴۹ مسئلهٔ ۴۹

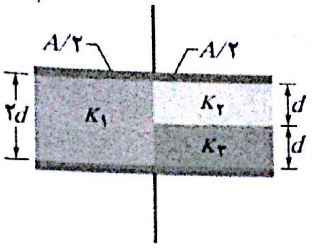
حل: روش اول: با اینکه توجیه فیزیکی تحمیلی برای در نظر گرفتن این آرایش به عنوان دو خازن متوالی نداریم با این حال به نظر می‌رسد که می‌توان این آرایش را به صورت مجموع دو خازن متوالی درنظر گرفت.
$$C_1=\frac{\kappa_1\varepsilon_0 A_1}{d_1}\ ,\ C_2=\frac{\kappa_2\varepsilon_0 A_2}{d_2}\ ,\ A_1=A_2=A$$
$$C_1=\frac{2\kappa_1\varepsilon_0 A_1}{d}\ ,\ C_2=\frac{2\kappa_2\varepsilon_0 A_2}{d}\ ,\ d_1=d_2=\frac{d}{2}$$
چون دو خازن به صورت متوالی درنظر گرفته شده‌اند ظرفیت معادل آنها برابر است با
$$C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\frac{\left(\frac{2\varepsilon_0 A}{d}\right)^2\kappa_1\kappa_2}{\left(\frac{2\varepsilon_0 A}{d}\right)\kappa_1+\kappa_2}=\frac{2\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{\kappa_1\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}\right)$$
$$=\frac{(2)(8.85\times10^{-12})(11)(12)}{(4.62\times10^{-3})(11+12)}=1.73\times10^{-11}\ \mathrm{F}$$
روش دوم: روش منطقی برای حل چنین مسئله‌هایی این است که ظرفیت را به روش معمول محاسبه کنیم، یعنی از تعریف ظرفیت $(C=q/\Delta V)$ استفاده کنیم در نتیجه باید ابتدا ΔV را محاسبه کرد.
$$\Delta V=-\int_d^x E_2 ds-\int_x^0 E_1 ds$$



که داریم:
$$E_1=\frac{E_0}{\kappa_1}=\frac{q}{\kappa_1\varepsilon_0 A}\ ,\ E_2=\frac{E_0}{\kappa_2}=\frac{q}{\kappa_2\varepsilon_0 A}$$
$$\Delta V=-\int_d^{d/2}\frac{q}{\kappa_2\varepsilon_0 A}ds-\int_{d/2}^{0}\frac{q}{\kappa_1\varepsilon_0 A}ds$$
$$=-\frac{q}{\varepsilon_0 A}\left[\frac{1}{\kappa_2}\left[\frac{d}{2}-d\right]+\frac{1}{\kappa_1}\left(0-\frac{d}{2}\right)\right]$$
$$=\frac{qd}{2\varepsilon_0 A}\left[\frac{\kappa_1+\kappa_2}{\kappa_1\kappa_2}\right]$$
بنا به تعریف ظرفیت داریم:
$$C=\frac{q}{\Delta V}=\frac{2\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}\right)=1.73\times10^{-11}\ \mathrm{F}$$

۵۰۰۰- شکل ۲۱-۵۰ یک خازن تخت با مساحت صفحهٔ $A=10.5\,\mathrm{cm}^2$ و فاصلهٔ صفحه‌های $2d=7.12$ mm را نشان می‌دهد. نیمهٔ سمت چپ فضای خالی میان صفحه‌ها با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa_1=21.0$ و نیمهٔ بالایی سمت راست آن با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa_2=42.0$، و نیمهٔ پایینی سمت راست آن با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa_3=58.0$ پر شده است. ظرفیت این خازن چقدر است؟

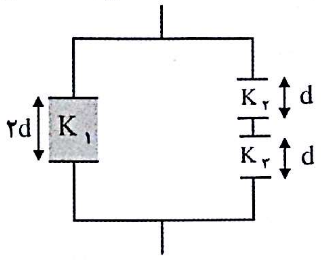
Scanned by CamScanner



شکل ۲۱-۵۰ مسئلهٔ ۵۰

حل: چنین آرایشی را می‌توان به صورت زیر درنظر گرفت. و ظرفیت خازنها برابر است با:

$$C_1=\kappa_1\varepsilon_0\frac{A/2}{2d}=\frac{\kappa_1\varepsilon_0 A}{4d}$$
$$C_2=\kappa_2\varepsilon_0\frac{A/2}{d}=\frac{\kappa_2\varepsilon_0 A}{2d}$$
$$C_3=\kappa_3\varepsilon_0\frac{A/2}{d}=\frac{\kappa_3\varepsilon_0 A}{2d}$$



برای دو خازن متوالی C_2 و C_3 ظرفیت معادل برابر است با

$$C_{23}=\frac{C_2C_3}{C_2+C_3}=\frac{\left(\frac{\varepsilon_0 A}{2d}\right)^2\kappa_2\kappa_3}{\left(\frac{\varepsilon_0 A}{2d}\right)(\kappa_2+\kappa_3)}=\frac{\varepsilon_0 A}{2d}\left(\frac{\kappa_2\kappa_3}{\kappa_2+\kappa_3}\right)$$

C_{23} و C_1 با هم موازی‌اند و ظرفیت معادل کل آرایش عبارت است از

$$C=C_1+C_{23}=\frac{\kappa_1\varepsilon_0 A}{4d}+\frac{\varepsilon_0 A}{2d}\left(\frac{\kappa_2\kappa_3}{\kappa_2+\kappa_3}\right)$$
$$=\frac{\varepsilon_0 A}{4d}\left(\kappa_1+\frac{2\kappa_2\kappa_3}{\kappa_2+\kappa_3}\right)$$

با قرار دادن مقادیر عددی خواهیم داشت

$$C=4.55\times10^{-11}\ \text{F}$$

بخش ۲۱-۸ دی‌الکتریک‌ها و قانون گاؤس

•۵۱- یک خازن تخت دارای ظرفیت ۱۰۰pF، مساحت صفحهٔ ۱۰۰cm² ، و دی الکتریکی از جنس میکا ($\kappa=5.4$) است که فضای میان صفحه‌ها را به طور کامل پر کرده است. در اختلاف پتانسیل ۵۰V ، (الف) بزرگی میدان الکتریکی E در میکا، (ب) بزرگی بار آزاد روی صفحه‌ها و (پ) بزرگی بار القا شده روی میکا را محاسبه کنید. WWW SSM

حل: (الف) برای ظرفیت داریم

$$C=\frac{\kappa\varepsilon_0 A}{d}\Rightarrow\quad d=\frac{\kappa\varepsilon_0 A}{C}$$

و میدان الکتریکی برابر است با $E=V/d$ که با قرار دادن d از رابطه بالا داریم

$$E=\frac{VC}{\kappa\varepsilon_0 A}=\frac{(50)(100\times10^{-12})}{(5.4)(8.85\times10^{-12})(100\times10^{-4})}$$
$$=1\times10^{4}\ \text{V/m}$$

(ب) بار آزاد روی صفحه‌ها برابر است با:

$$q_f=CV=(100\times10^{-12})(50)=5\times10^{-9}\ \text{C}$$

(پ) بار القایی برابر است با:

$$q'=q_f\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)=(5\times10^{-9})\left(1-\frac{1}{5.4}\right)=4\times10^{-9}\ \text{C}$$

••۵۲- در مسئلهٔ نمونهٔ ۲۱-۷، فرض کنید در حالی که تیغهٔ دی‌الکتریک قرار داده می‌شود، باتری متصل بماند. (الف) ظرفیت، (ب) بار روی صفحه‌های خازن، (پ) میدان الکتریکی در فضای خالی، و (ت) میدان الکتریکی در تیغهٔ را، پس از آنکه تیغهٔ قرار داده شد محاسبه کنید.

حل: در حالی که باتری کماکان متصل است ولتاژ دو سر خازن ثابت می‌ماند ولی بار تغییر می‌کند. ولی در هر صورت ظرفیت خازن ثابت می‌ماند. بنابراین خواهیم داشت:

(الف) ظرفیت خازن دارای همان مقدار ۱۳/۴pF خواهد بود.

(ب) بار روی صفحه‌های خازن برابر است با

$$q=CV_0=(13.4\times10^{-12})(85.5)=1.15\times10^{-9}\ \text{C}=1.15\ \text{nC}$$

(پ) از قانون گاوس داریم:

$$\varepsilon_0\oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=q\Rightarrow E_0=\frac{q}{\varepsilon_0 A}$$

$$E_0=\frac{1.15\times10^{-9}\ C}{(8.85\times10^{-12})(115\times10^{-4})}=1.13\times10^{4}\ \text{N/C}$$

(ت) میدان در حضور دی‌الکتریک برابر است با

$$E=\frac{E_0}{\kappa}=\frac{1.13\times10^{4}}{2.61}=4.32\times10^{3}\ \text{N/C}$$

••۵۳- فضای میان دو پوستهٔ کروی رسانای هم‌مرکز به شعاعهای $a=1.20\text{cm}$ و $b=1.70\text{cm}$ با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa=23.5$ پرشده است. اختلاف پتانسیل $V=73.0\text{V}$ بین پوسته‌های داخلی و خارجی برقرار شده است. (الف) ظرفیت دستگاه، (ب) بار آزاد q روی پوستهٔ داخلی، و (پ) بار q' که روی سطح پوستهٔ داخلی القا شده است را تعیین کنید. SSM

حل: (الف) در اینجا خازن کروی داریم و ظرفیت خازن کروی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$C=\frac{4\pi\kappa\varepsilon_0 ab}{b-a}=\frac{\kappa(ab)}{\kappa(b-a)}$$
$$=\frac{(23.5)(1.2\times10^{-2})(1.7\times10^{-2})}{(9\times10^{9})(1.7-1.2)\times10^{-2}}=1.1\times10^{-10}\ \text{F}$$

(ب) $q=CV=(1.1\times10^{-10})(73)=8.03\times10^{-9}\ \text{C}$

(پ) $q'=q\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)=(8.03\times10^{-9})\left(1-\frac{1}{23.5}\right)$
$=7.69\times10^{-9}\ \text{C}$

Scanned by CamScanner

●●۵۴- به دو صفحهٔ موازی به مساحت $100\,\text{cm}^2$ بارهایی به بزرگی $8/9\times10^{-7}\,\text{C}$ و علامتهای مخالف داده شده‌اند. میدان الکتریکی در داخل مادهٔ دی‌الکتریکی که فضای میان صفحه‌ها را پرکرده است برابر با $1/4\times10^{6}\,\text{V/m}$ است. (الف) ثابت دی الکتریک این ماده را محاسبه کنید. (ب) بزرگی بار القا شده روی هر سطح دی‌الکتریک را تعیین کنید.

(الف) از قانون گاوس در دی‌الکتریک داریم

$$\kappa\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q \Rightarrow \kappa\varepsilon_0 EA = q$$

$$\kappa = \frac{q}{\varepsilon_0 EA} = \frac{8/9\times10^{-7}}{(8/85\times10^{-12})(1/4\times10^{-6})(100\times10^{-4})}$$

$$= 7/18$$

(ب)

$$q' = q\left(1-\frac{1}{\kappa}\right) = (8/9\times10^{-7})\left(1-\frac{1}{7/18}\right)$$

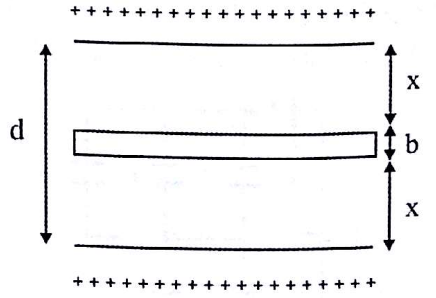
$$= 7/66\times10^{-7}\,\text{C}$$

●●۵۵- یک خازن تخت دارای صفحه‌هایی به مساحت $0/12\,\text{m}^2$ و فاصلهٔ $1/2\,\text{cm}$ است. یک باتری صفحه‌ها را تا اختلاف پتانسیل $120\,\text{V}$ باردار می‌کند و سپس برداشته می‌شود. آنگاه یک تیغهٔ دی‌الکتریک به ضخامت $4/0\,\text{mm}$ و ثابت دی‌الکتریک ۴/۸ به طور متقارن میان صفحه‌ها قرار داده می‌شود. (الف) پیش از آنکه تیغه قرار داده شود، ظرفیت خازن چقدر است؟ (ب) پس از آنکه تیغه قرارداده شد، ظرفیت خازن چقدر است؟ بار آزاد q (پ) پیش و (ت) پس از آنکه تیغه قرار داده شد چقدر است؟ بزرگی میدان الکتریکی (ث) در فضای میان صفحه‌ها و دی‌الکتریک و (ج) در خودِ دی الکتریک چقدر است؟ (چ) با وجود تیغه، اختلاف پتانسیل دو سر صفحه‌ها چقدر است؟ (ح) در حین قراردادن تیغه چقدر کار خارجی صورت گرفته است؟

حل: **(الف)** پیش از قرار دادن تیغه ظرفیت خازن برابر است با

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{(8/85\times10^{-12})(0/12)}{1/2\times10^{-2}} = 8/85\times10^{-11}\,\text{F}$$

(ب) برای به دست آوردن ظرفیت پس از قرار تیغه ابتدا اختلاف پتانسیل را محاسبه می‌کنیم (روش محاسبه ظرفیت معادل توجیه منطقی ندارد ولی پاسخ صحیح را به دست می‌دهد).



$$\Delta V = -\int_d^{b+x} E_0\,dS - \int_{b+x}^{x} E\,dS - \int_x^{0} E_0\,dS$$

$$= -E_0(b+x-d) - \frac{E_0}{\kappa}[x-(b+x)] - E_0(-x)$$

$$\Delta V = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[b-d+\frac{b}{\kappa}\right] = \frac{q}{\varepsilon_0 A}\left[\frac{\kappa d - b(\kappa-1)}{\kappa}\right]$$

حال می‌توان ظرفیت را به دست آورد:

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\kappa\varepsilon_0 A}{\kappa d - b(\kappa-1)}$$

که با قرار دادن مقادیر عددی داده شده داریم $C = 1/2\times10^{-10}\,\text{F}$.

(پ) با توجه به جدا کردن باتری، بار ثابت باقی مانده است

$$q = q_0 = C_0 V_0 = (8/85\times10^{-11})(120) = 1/06\times10^{-8}\,\text{C}$$

(ت)

$$E_0 = \frac{V}{d} = \frac{120}{1/2\times10^{-2}} = 10^4\,\text{V/m}$$

(ث)

$$E = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{10^4}{4/8} = 2/1\times10^3\,\text{V/m}$$

(ج)

$$q = CV \Rightarrow V = \frac{q}{C} = \frac{1/06\times10^{8}}{1/2\times10^{-10}} = 88/3\,\text{V}$$

(چ)

$$W_{ext} = \Delta U = \frac{q^2}{2C} - \frac{q^2}{2\varepsilon_0} = \frac{q^2}{2}\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{C_0}\right)$$

$$= \frac{(1/06\times10^{-8})^2}{2}\left[\frac{1}{1/2\times10^{-10}} - \frac{1}{8/85\times10^{-11}}\right]$$

$$= -1/69\times10^{-7}\,\text{J}$$

مسئله‌های اضافی

۵۶- *معمای خرده‌های شکلات.* این داستان با مسئلهٔ ۵۶ فصل ۱۹ شروع شده است. به عنوان بخشی از بررسیها در مورد دلایل انفجار کارخانهٔ بیسکویت‌سازی، پتانسیل الکتریکی کارگران در هنگام تخلیهٔ بسته‌های پودر شکلات به داخل سطل بارگیری که باعث به وجود آمدن ابری از پودر در اطراف آنها می‌شد، اندازه‌گیری شد. هر کارگر نسبت به زمین، که پتانسیل الکتریکی آن صفر در نظر گرفته شد، حدود $7/0\,\text{kV}$ پتانسیل الکتریکی داشت. (الف) با فرض اینکه هر کارگر خازن مؤثری با ظرفیت نوعی $200\,\mu\text{F}$ است، انرژی ذخیره شده در این خازن مؤثر را بیابید. اگر یک جرقهٔ تنها بین کارگر و هرجسم رسانای متصل به زمین زده شود، کارگر از لحاظ بار خنثی می‌شود و این انرژی به جرقه منتقل می‌گردد. بنا بر اندازه‌گیریهای انجام شده، انرژی جرقه‌ای که بتواند باعث آتش گرفتن ابری از پودر خرده‌های شکلات و در نتیجه، انفجار شود باید دست کم $150\,\text{mJ}$ باشد. (ب) آیا جرقه‌ای از یک کارگر می‌توانست باعث انفجار در ابر پودرهای اطراف سطل بارگیری شود؟ (این داستان با مسئلهٔ ۵۶ فصل ۲۲ ادامه می‌یابد.)

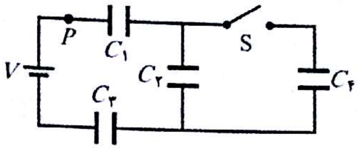
حل: **(الف)**

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(200\times10^{-12})(7\times10^3)^2$$

$$= 4/9\times10^{-3}\,\text{J}$$

(ب) چون انرژی آزاد شده به ازای هر تک جرقه توسط یک کارگر بسیار کمتر از انرژی لازم برای انفجار است لذا جرقهٔ ناشی از طرف یک نفر باعث انفجار نمی‌شود.

۵۷- شکل ۲۱-۵۱، خازن ۱ ($C_1=8/00\mu F$)، خازن ۲ ($C_2=6/00\mu F$)، و خازن ۳ ($C_3=8/00\mu F$) را نشان می‌دهد که به یک باتری ۱۲/۰V متصل شده‌اند. وقتی کلید S بسته شده و در نتیجه خازن بدون بار ۴ ($C_4=6/00\mu F$) به مدار متصل شود، (الف) چقدر بار به وسیلهٔ باتری از نقطهٔ P می‌گذرد؟ و (ب) چقدر بار روی خازن ۴ ظاهر می‌شود؟ (پ) توضیح دهید که چرا این دو نتیجه، متفاوت‌اند؟



شکل ۲۱-۵۱ مسئلهٔ ۵۷

حل: (الف) پیش از اتصال کلید خازنهای C_1، C_2 و C_3 متولی و ظرفیت معادل آنها برابر است با

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}=\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{10}{24}$$

که در نتیجه $C=2/4\,\mu F$ و باری که از نقطه P می‌گذرد برابر است با

$$q_i=CV=(2/4)(12)=28/8\,\mu C$$

پس از اتصال کلید، خازنهای C_2 و C_4 و ظرفیت معادل آنها برابر است با

$$C_{24}=C_2+C_4=6+6=12\,\mu F$$

این خازن معادل با خازنهای C_1 و C_3 متوالی است و ظرفیت معادل آنها برابر است با

$$\frac{1}{C'}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_{24}}+\frac{1}{C_3}=\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}$$

که در نتیجه $C'=3\,\mu F$ و داریم

$$q_f=C'V=(3)(12)=36\,\mu F$$

به این ترتیب باری که پس از اتصال کلید از نقطهٔ P می‌گذرد برابر است با

$$\Delta q=q_f-q_i=36-28/8=7/2\,\mu C$$

(ب)

$$V_{24}=\frac{q_f}{C_{24}}=\frac{36}{12}=3\,V$$

که این همان اختلاف پتانسیل دو سر خازنهای C_2 و C_4 است لذا بار روی خازن C_4 برابر است با:

$$q_4=C_4V_{24}=(6)(3)=18\,\mu C$$

(پ) وقتی که خازن C_4 به مدار افزوده می‌شود توسط سایر خازنها تغذیه شده و بار خازنهای دیگر در مدار تغییر می‌کند. باتری صفحاتی را که به آن متصل است تغذیه می‌کند.

۵۸- دو خازن تخت، پر از هوا، نخست به طور مجزا، سپس به طور متوالی، و سرانجام به طور موازی به یک باتری ۱۰V بسته می‌شوند. در این آرایشها، انرژی ذخیره شده در خازنها از کمترین تا بیشترین عبارت‌اند از: $75\mu J$، $100\mu J$، $300\mu J$، و $400\mu J$. ظرفیت (الف) کمتر و (ب) بیشتر این دو خازن چقدر است؟

حل: می‌دانیم که در اتصال متوالی ظرفیت معادل کوچکتر از هر تک خازن است در نتیجه انرژی نیز همین وضعیت را دارد. در اتصال موازی ظرفیت معادل بزرگتر از هر تک خازن است. در نتیجه انرژی نیز همین وضعیت را دارد. لذا دو مقدار میانی داده شده مربوط به خازنهای C_1 و C_2 هستند و در نتیجه داریم:

$$W_1=\frac{1}{2}C_1V^2 \Rightarrow 100=\frac{1}{2}C_1(10)^2 \Rightarrow C_1=2\,\mu F$$

$$W_2=\frac{1}{2}C_2V^2 \Rightarrow 300=\frac{1}{2}C_2(10)^2 \Rightarrow C_2=6\,\mu F$$

۵۹- دو خازن تخت، هریک به ظرفیت $6/0\mu F$، به طور متوالی به یک باتری ۱۰V بسته شده‌اند. سپس یکی از خازنها فشرده می‌شود، به طوری که فاصلهٔ صفحه‌های آن به نصف می‌رسد. بر اثر این فشردگی، (الف) چقدر بار اضافی توسط باتری به خازنها منتقل می‌شود؟ و (ب) افزایش بار کل ذخیره شده در خازنها (بار روی صفحهٔ مثبت یک خازن بعلاوهٔ بار روی صفحهٔ مثبت خازن دیگر) چقدر می‌شود؟

حل: وقتی خازنها به باتری وصل‌اند ولتاژ آنها ثابت می‌ماند ولی بار روی آنها تغییر می‌کند. ابتدا خازن معادل را به دست می‌آوریم

$$C_{eq}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\frac{(6)(6)}{6+6}=3\,\mu F$$

بار قبل از فشردگی برابر است با:

$$q_i=C_{eq}V=(3)(10)=30\,\mu C$$

پس از فشردگی و نصف شدن فاصله صفحه‌ها ظرفیت دو برابر می‌شود یعنی $C_2'=12\mu C$. و ظرفیت معادل جدید برابر است با

$$C'_{eq}=\frac{C_1C_2'}{C_1+C_2'}=\frac{(6)(12)}{6+12}=4\,\mu F$$

و

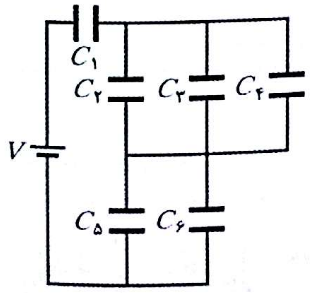
$$q_f=C'_{eq}V=(4)(10)=40\,\mu C$$

(الف)

$$\Delta q=q_f-q_i=40-30=10\,\mu C$$

(ب) می‌دانیم که در بهم بستن متوالی بار روی خازنها یکسان است لذا تغییر بار هر خازن همان $10\mu F$ است و تغییر بار برای دو خازن $20\mu C$ است.

۶۰- در شکل ۲۱-۵۲، $V=12V$، $C_1=C_5=C_6=6/0\mu F$ و $C_2=C_3=C_4=4/0\mu F$ است. (الف) بار خالص ذخیره شده روی خازنها و (ب) بار روی خازن ۴ چقدر است؟



شکل ۲۱-۵۲ مسئلهٔ ۶۰

Scanned by CamScanner

حل: باید ابتدا خازن معادل مدار را محاسبه کنیم و سپس بار خالص ذخیره شده روی خازنها را بدست آوریم.

$$C_{۲۳۴} = C_۲ + C_۳ + C_۴ = ۱۲\,\mu F$$

$$C_{۵۶} = C_۵ + c_۶ = ۱۲\,\mu F$$

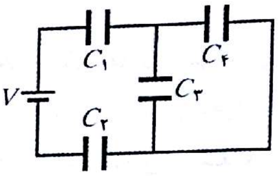
$$\frac{۱}{C_{eq}} = \frac{۱}{C_۱} + \frac{۱}{C_{۲۳۴}} + \frac{۱}{C_{۵۶}} \Rightarrow C_{eq} = ۳\,\mu F$$

(الف) $q_{eq} = C_{eq}V = (۳)(۱۲) = ۳۶\,\mu F$

$$q_{۲۳۴} = q_{eq} = ۳۶\,\mu C$$

(ب) $q_۲ = q_۳ = q_۴ = \frac{q_{۲۳۴}}{۳} = ۱۲\,\mu F$

۶۱- در شکل ۲۱-۵۳، $V=۹/۰V$ ، $C_۱ = C_۲ = ۳۰\,\mu F$ ، و $C_۳ = C_۴ = ۱۵\,\mu F$ است. بار روی خازن ۴ چقدر است؟



شکل ۲۱-۵۳ مسئلهٔ ۶۱

حل: $C_{۳۴} = C_۳ + C_۴ = ۳۰\,\mu F$

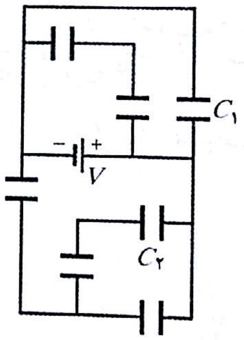
$$\frac{۱}{C_{eq}} = \frac{۱}{C_۱} + \frac{۱}{C_۲} + \frac{۱}{C_{۳۴}} = \frac{۱}{۳۰} + \frac{۱}{۳۰} + \frac{۱}{۳۰} \Rightarrow C_{eq} = ۱۰\,\mu F$$

$$q_{eq} = q_{۳۴} = C_{eq}V = (۱۰)(۹) = ۹۰\,\mu C$$

$$V_۳ = V_۴ = \frac{q_{۳۴}}{C_{۳۴}} = \frac{۹۰}{۳۰} = ۳V$$

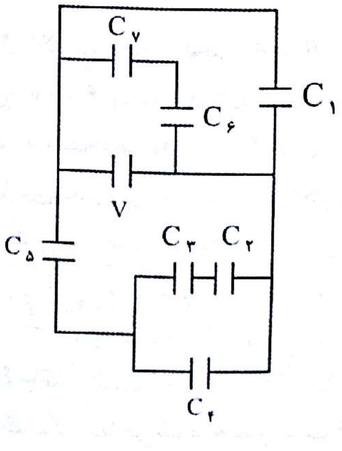
$$q_۴ = C_۴V_۴ = (۱۵)(۳) = ۴۵\,\mu C$$

۶۲- در شکل ۲۱-۵۴، اختلاف پتانسیل V باتری برابر با $۱۰/۰\,\mu F$ ، و ظرفیت هر یک از هفت خازن برابر با $۱۰/۰\,\mu F$ است. بار روی (الف) خازن ۱ و (ب) خازن ۲ چقدر است؟



شکل ۲۱-۵۴ مسئلهٔ ۶۲

حل:



(الف) $V_۱ = V = ۱۰V$

$$q_۱ = C_۱V_۱ = (۱۰)(۱۰) = ۱۰۰\,\mu C$$

(ب) $C_{۳۴} = \frac{۱۰}{۲} = ۵\,\mu F$

$$C_{۲۳۴} = C_{۳۴} + C_۲ = ۵ + ۱۰ = ۱۵\,\mu F$$

خازن معادل مجموعه پایین را می‌توان به دست آورد.

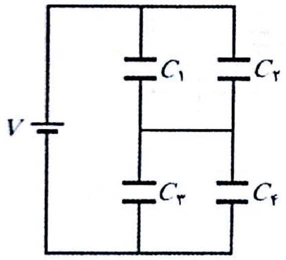
$$C_{eq} = \frac{C_۵C_{۲۳۴}}{C_۵ + C_{۲۳۴}} = \frac{(۱۰)(۱۵)}{۱۰+۱۵} = ۶\,\mu F$$

$$q_{eq} = q_۵ = q_{۲۳۴} = C_{eq}V = (۶)(۱۰) = ۶۰\,\mu F$$

$$V_۲ = V_{۳۴} = \frac{q_{۲۳۴}}{C_{۲۳۴}} = \frac{۶۰}{۱۵} = ۴V$$

$$q_۴ = q_{۳۴} = C_{۳۴}V_{۳۴} = (۵)(۴) = ۲۰\,\mu C$$

۶۳- در شکل ۲۱-۵۵، $V=۱۲V$ ، $C_۱=C_۴=۲/۰\,\mu F$ ، $C_۲=۴/۰\,\mu F$ و $C_۳=۱/۰\,\mu F$ است. بار روی خازن ۴ چقدر است؟



شکل ۲۱-۵۵ مسئلهٔ ۶۳

حل: $C_{۱۲} = C_۱ + C_۲ = ۶\,\mu F \qquad C_{۳۴} = C_۳ + C_۴ = ۳\,\mu F$

$$C_{eq} = \frac{C_{۱۲}C_{۳۴}}{C_{۱۲} + C_{۳۴}} = \frac{(۶)(۳)}{۶+۳} = ۲\,\mu F$$

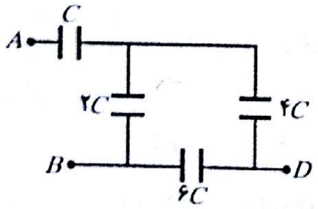
$$q_{eq} = C_{eq}V = (۲)(۱۲) = ۲۴\,\mu C$$

$$q_{۳۴} = q_{eq} = ۲۴\,\mu C$$

$$V_{۳۴} = V_۳ = V_۴ = \frac{q_{۳۴}}{C_{۳۴}} = ۸V$$

$$q_۴ = C_۴V_۴ = (۲)(۸) = ۱۶\,\mu C$$

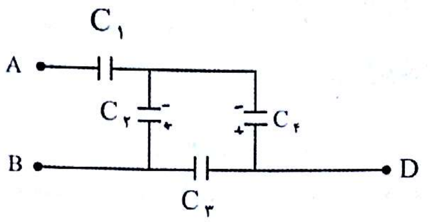
۶۴- ظرفیتهای چهار خازن نشان‌داده شده در شکل ۲۱-۵۶ برحسب کمیت معین C داده شده‌اند. (الف) اگر $C=۵۰\,\mu F$ باشد، ظرفیت معادل میان نقطه‌های A و B چقدر است؟ (*راهنمایی:* نخست تصور کنید که یک باتری میان این دو نقطه وصل شده است؛ سپس مدار را به یک ظرفیت معادل تبدیل کنید.) (ب) این کار را برای نقطه‌های A و D تکرار کنید.



شکل ۲۱-۵۶ مسئلهٔ ۶۴

Scanned by CamScanner

حل: (الف) از دیدگاه ورودی‌های A و B مدار به صورت زیر است:



داریم:

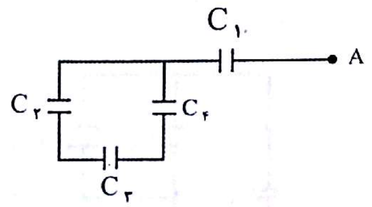
$$C_{۳۴}=\frac{C_۳C_۴}{C_۳+C_۴}=\frac{(۶)(۴)C^۲}{۶C+۶C}=۲/۴C$$

$$C_{۲۳۴}=C_۲+C_{۳۴}=۲C+۲/۴C=۴/۴C$$

$$C_{eq}=\frac{C_۱C_{۲۳۴}}{C_۱+C_{۲۳۴}}=\frac{(C)(۴/۴C)}{C+۴/۴C}=۰/۸۱C$$

$$=(۰/۸۱)(۵۰)=۴۰/۵\mu F$$

(ب) از دیدگاه ورودی‌هایA و D مدار به صورت زیر است:



داریم:

$$C_{۲۳}=\frac{C_۲C_۳}{C_۲+C_۳}=\frac{(۲C)(۶C)}{۲C+۶C}=۱/۵C$$

$$C_{۲۳۴}=C_{۲۳}+C_۴=۱/۵C+۴C=۵/۵C$$

$$C_{eq}=\frac{C_۱C_{۲۳۴}}{C_۱+C_{۲۳۴}}=\frac{(C)(۵/۵C)}{C+۵/۵C}=۰/۸۴۶C$$

$$=(۰/۸۴۶)(۵۰)=۴۲/۳\mu C$$

۶۵- خازنی به ظرفیت $C_۱=۶/۰۰\mu F$ به طور متوالی به خازنی با ظرفیت $C_۲=۴/۰۰\mu F$ بسته شده و اختلاف پتانسیل ۲۰۰ V به دو سر این دو اعمال شده است. (الف) ظرفیت معادل را محاسبه کنید. (ب) بار $q_۱$ و (پ) اختلاف پتانسیل $V_۱$ دو سرخازن ۱ و (ت) $q_۲$ و (ث) $V_۲$ دو سرخازن ۲ چقدر است؟

حل: (الف)
$$C_{eq}=\frac{C_۱C_۲}{C_۱+C_۲}=\frac{(۶)(۴)}{۶+۴}=۲/۴\mu F$$

(ب)
$$q_۱=q_{eq}=C_{eq}V_{\text{باتری}}=(۲/۴)(۲۰۰)=۴۸۰\mu C$$

(پ)
$$V_۱=\frac{q_۱}{C_۱}=\frac{۴۸۰}{۶}=۸۰V$$

(ت)
$$q_۲=q_{eq}=۴۸۰\mu C$$

(ث)
$$V_۲=\frac{q_۲}{C_۲}=\frac{۴۸۰}{۴}=۱۲۰V$$

۶۶- مسئلهٔ ۶۵ را برای همان دو خازن، که اینک به طور موازی بسته شده‌اند تکرار کنید.

حل: (الف)
$$C_{eq}=C_۱+C_۲=۶+۴=۱۰\mu F$$

(ب)
$$q_۱=C_۱V_{\text{باتری}}=(۶)(۲۰۰)=۱۲۰۰\mu C$$

(پ)
$$V_۱=V_۲=V_{\text{باتری}}=۲۰۰V$$

(ت)
$$q_۲=C_۲V_{\text{باتری}}=(۴)(۲۰۰)=۸۰۰\mu C$$

(ث)
$$V_۲=۲۰۰V$$

۶۷- خازنی با ظرفیت نامعلوم C تا پتانسیل ۱۰۰V باردار شده و به دو سر خازنی با ظرفیت ۶۰μF که در ابتدا بدون بار است وصل شده است. اگر اختلاف پتانسیل نهایی دوسر خازن ۶۰μF برابر با ۴۰V باشد، C چقدر است؟

حل:
$$q_{\text{کل}}=CV=۱۰۰C$$

$$C_{eq}=C_۱+C_۲=C+۶۰$$

$$V'=\frac{q_{\text{کل}}}{C_{eq}}\Rightarrow ۴۰=\frac{۱۰۰C}{C+۶۰}\Rightarrow C=۴۰\mu F$$

۶۸- یک خازن استوانه‌ای، مشابه شکل ۲۱-۶ دارای شعاعهای a و b است. نشان دهید که نیمی از انرژی پتانسیل الکتریکی در داخل استوانه‌ای به شعاع $r=\sqrt{ab}$ ذخیره شده است.

حل: با استفاده از قانون گاوس، میدان بین دو پوسته رسانای خازن استوانه‌ایی برابر است با $E=\frac{q}{۲\pi\varepsilon_۰Lr^۲}$ لذا داریم

$$u=\frac{۱}{۲}\varepsilon_۰E^۲=\frac{q^۲}{۸\pi^۲\varepsilon_۰L^۲r^۲}$$

و انرژی ذخیره شده بین دو پوسته برابر است با

$$U=\int u\,dV=\int_a^b\frac{q^۲}{۸\pi^۲\varepsilon_۰L^۲r^۲}(۲\pi r\,dr\,L)$$

$$=\frac{q^۲}{۴\pi\varepsilon_۰L}Ln\frac{b}{a}$$

انرژی ذخیره شده از $r=a$ تا r برابر است $U_r=\frac{q^۲}{۴\pi\varepsilon_۰L}Ln\frac{r}{a}$ ، با توجه به صورت مسئله شرط $U_r=\frac{۱}{۲}U$ طبق عملیات به دست می‌آید.

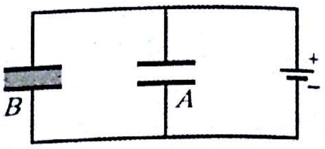
$$\frac{q^۲}{۴\pi\varepsilon_۰L}Ln\frac{r}{a}=\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{q^۲}{۴\pi\varepsilon_۰L}\right)Ln\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow Ln\frac{r}{a}=\frac{۱}{۲}Ln\frac{b}{a}=Ln\sqrt{\frac{b}{a}}\Rightarrow\frac{r}{a}=\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$\Rightarrow r=\sqrt{ab}$$

۶۹- در شکل ۲۱-۵۷، دو خازن تخت A و B به طور موازی به دو سر یک باتری ۶۰۰V بسته شده‌اند. مساحت هر صفحه ۸۰/۰cm² و فاصلهٔ صفحه‌ها ۳/۰۰mm است. خازن A پر از هوا، و خازن B با دی‌الکتریکی با ثابت دی‌الکتریک $\kappa=۲/۶۰$ پر شده است. بزرگی میدان الکتریکی در داخل (الف) دی‌الکتریک خازن B و (ب) هوای خازن A چقدر است؟ چگالیهای بار آزاد σ روی صفحهٔ با پتانسیل بالاتر (پ) خازن A و (ت) خازن B چقدر است؟ (ت) چگالی بار σ' که روی سطح بالایی دی‌الکتریک القا می‌شود چقدر است؟

Scanned by CamScanner



شکل ۲۱-۵۷ مسئلهٔ ۶۹

حل: (الف) و **(ب)** چون اختلاف پتانسیل دو سر خازنها یکسان و ثابت است در نتیجه میدان در خازنها نیز ثابت و یکسان است.

$$E=\frac{V}{d}=\frac{۶۰۰}{۳\times۱۰^{-۳}}=۲\times۱۰^{۵}\ \mathrm{V/m}$$

(پ)

$$\sigma_A=\varepsilon_\circ E=(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۲\times۱۰^{۵})=۱/۷۷\times۱۰^{-۶}\ \mathrm{C/m^۲}$$

(ت)

$$\sigma_B=\kappa\varepsilon_\circ E=\kappa\sigma_A=(۲/۶)(۱/۷۷\times۱۰^{-۶})=۴/۶\times۱۰^{-۶}\ \mathrm{C/m^۲}$$

(ث) همانطور که انتظار داشتیم چون میدان در خازنها یکسان است لذا چگالی بار روی خازن B باید بیشتر باشد که نتیجه به دست آمده این را تأیید می‌کند و مقدار بار اضافی، بار القایی می‌باشد.

$$\sigma'=\sigma_A-\sigma_B=-۲/۸۳\times۱۰^{-۶}\ \mathrm{C/m^۲}$$

۷۰- اختلاف پتانسیل ۳۰۰V به دو سر یک ترکیب متوالی شامل دو خازن با ظرفیتهای $C_۱=۲/۰۰\mu F$ و $C_۲=۸/۰۰\mu F$ اعمال شده است. (الف) بار $q_۱$ و (ب) اختلاف پتانسیل $V_۱$ دو سر خازن ۱ و (پ) $q_۲$ و (ت) $V_۲$ دو سر خازن ۲ چقدر است؟ سپس خازنهای *باردار شده* را از یکدیگر و از باتری جدا می‌کنیم. آنگاه با اتصال صفحه‌های *هم علامت* به یکدیگر، خازنها را دوباره به هم وصل می‌کنیم (از باتری استفاده نمی‌شود). اکنون (ث) $q_۱$، (ج) $V_۱$، (چ) $q_۲$، و (ح) $V_۲$ چقدرند؟ *به جای این* فرض کنید که خازنهای باردار شده در قسمت (الف) را با اتصال صفحه‌های با *علامت مخالف*، دوباره به هم متصل کنیم. اکنون (خ) $q_۱$، (د) $V_۱$، (ذ) $q_۲$، و (ر) $V_۲$ چقدرند؟

حل: با محاسبه ظرفیت معادل می‌توان بار کل و بار روی هر خازن را به دست آورد.

$$C_{eq}=\frac{C_۱C_۲}{C_۱+C_۲}=\frac{(۲)(۸)}{۲+۸}=۱/۶\mu F$$

(الف) و **(ب)**

$$q_{کل}=q_۱=q_۲=C_{eq}V=(۱/۶)(۳۰۰)=۴۸۰\mu C$$

$$q_۱=۴۸۰\mu C$$

$$V_۱=\frac{q_۱}{C_۱}=\frac{۴۸۰}{۲}=۲۴۰\ V$$

(پ) و **(ت)**

$$q_۲=۴۸۰\mu C$$

$$V_۲=\frac{q_۲}{C_۲}=\frac{۴۸۰}{۸}=۶۰\ V$$

پس از اتصال، بار کل روی مجموعه خازنها برابر است با

$$q'_{کل}=q_۱+q_۲=۴۸۰+۴۸۰=۹۶۰\mu C$$

$$V'=\frac{q'_۱}{C_۱}=\frac{q'_۲}{C_۲}=\frac{q}{C_۱+C_۲}=\frac{۹۶۰}{۲+۸}=۹۶V$$

(ث) تا **(ح)**

$$\frac{q'_۱}{۲}=\frac{q'_۲}{۸}=۹۶$$

$$q'_۱=۱۹۲\mu C \qquad V'_۱=۹۶V$$

$$q'_۲=۷۶۸\mu C \qquad V'_۲=۹۶V$$

$$q=۰ \qquad q'_۱=q'_۲=۰ \qquad V'_۱=V_۲=۰$$

۷۱- خازن معینی را تا اختلاف پتانسیل V باردار می‌کنیم. اگر بخواهیم انرژی ذخیره شده در خازن را به میزان ۱۰٪ افزایش دهیم، V را باید چند درصد افزایش دهیم؟

حل:

$$U=\frac{۱}{۲}CV^۲$$

$$U+\Delta U=\frac{۱}{۲}C(V+\Delta V)^۲$$

$$\frac{U+\Delta U}{U}=\frac{\frac{۱}{۲}C(V+\Delta V)^۲}{\frac{۱}{۲}CV^۲}$$

$$۱+\frac{\Delta U}{U}=\left(۱+\frac{\Delta V}{V}\right)^۲\Rightarrow$$

$$۱+۰/۱=\left(۱+\frac{\Delta V}{V}\right)^۲\Rightarrow\frac{\Delta V}{V}=۰/۰۴۹ \quad \text{یا} \quad ۴/۹٪$$

۷۲- دو صفحهٔ مسی، یک ورقهٔ میکا (به ضخامت ۰/۱۰mm، $\kappa=۵/۴$)، یک ورقهٔ شیشه‌ای (به ضخامت ۲/۰mm، $\kappa=۷/۰$)، و یک تیغهٔ پارافین (به ضخامت ۱/۰cm، $\kappa=۲/۰$) در اختیار داریم. برای ساختن یک خازن تخت با بیشترین مقدار C، کدامیک را باید میان صفحه‌های مسی قرار دهیم؟

حل: (الف) پس از قرار دادن دی‌الکتریک به ضخامت b یک مجموعه دو خازنی داریم که ظرفیت هر یک برابرند با

$$C_۱=\frac{\varepsilon_\circ A}{d-b} \qquad C_۲=\frac{\kappa\varepsilon_\circ A}{b}$$

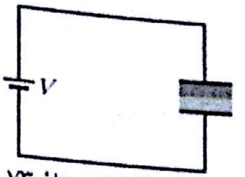
$$\frac{۱}{C}=\frac{۱}{C_۱}+\frac{۱}{C_۲}=\frac{d-b}{\varepsilon_\circ A}+\frac{b}{\kappa\varepsilon_\circ A}=\frac{۱}{\varepsilon_\circ A}\left(d-b+\frac{b}{\kappa}\right)$$

$$C=\frac{\varepsilon_\circ A}{d-b\left(۱-\frac{۱}{\kappa}\right)}$$

ملاحظه می‌کنیم که هرچه $b\left(۱-\frac{۱}{\kappa}\right)$ بیشتر باشد مخرج کوچکتر و C بزرگتر می‌شود که با توجه به مقادیر داده شده درمی‌یابیم که باید از ورقهٔ میکا استفاده کنیم.

۷۳- در شکل ۲۱-۵۸، یک خازن تخت به مساحت صفحه $۲/۰۰\times۱۰^{-۲}\ \mathrm{m^۲}$ با دو تیغهٔ دی‌الکتریک، هر یک به ضخامت ۲/۰۰mm پرشده است. ثابت دی الکتریک یکی از تیغه‌ها ۳/۰۰ و دیگری ۴/۰۰ است. باتری ۷/۰۰V چقدر بار روی خازن ذخیره می‌کند؟ SSM

Scanned by CamScanner



شکل ۲۱-۵۸ مسئلهٔ ۷۳

حل: این آرایش را می‌توان ترکیبی از دو خازن متوالی C_1 و C_2 با دی‌الکتریکهایی با ثابتهای k_1 و k_2 درنظر گرفت.

$$C_1 = \frac{\kappa_1 \varepsilon_0 A}{d/۲} = \frac{۲\kappa_1 \varepsilon_0 A}{d}$$

$$C_2 = \frac{\kappa_2 \varepsilon_0 A}{d/۲} = \frac{۲\kappa_2 \varepsilon_0 A}{d}$$

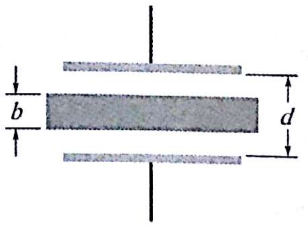
$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \left(\frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2}\right)\left(\frac{۲\varepsilon_0 A}{d}\right)$$

$$= \left(\frac{۳\times۴}{۳+۴}\right)\frac{(۲)(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۲\times۱۰^{-۲})}{۴\times۱۰^{-۳}} = ۱/۵۲\times۱۰^{-۱۰}\ \text{F}$$

بنابراین باری که روی خازن ذخیره می‌شود برابر است با

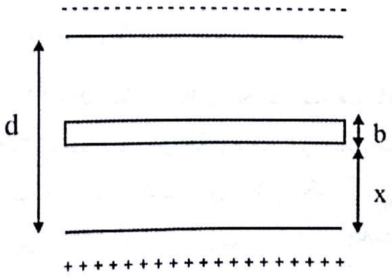
$$q = C_{eq}V = (۱/۵۲\times۱۰^{-۱۰})(۷) = ۱/۰۶\times۱۰^{-۹}\ \text{C}$$

۷۴- همان‌گونه که در شکل ۲۱-۵۹ نشان داده شده است، یک تیغهٔ مسی به ضخامت $b=$۲/۰۰mm داخل یک خازن تخت به مساحت صفحهٔ $A=$۲/۴۰cm² و فاصلهٔ صفحه‌های $d=$۵/۰۰mm قرار داده شده است؛ تیغه دقیقاً در بین دو صفحه قرار دارد. (الف) ظرفیت خازن پس از آنکه تیغه گذاشته شود چقدر است؟ (ب) اگر بار $q=$۳/۴۰μC روی صفحه‌ها بدون تغییر باقی بماند، نسبت انرژی ذخیره شده پیش از قرار دادن تیغه به مقدار آن پس ازقراردادن تیغه چقدر است؟ (پ) موقع قراردادن تیغه چقدر کار انجام شده است؟ (ت) آیا تیغه به داخل صفحه‌ها کشیده می‌شود یا باید آن را هل داد؟



شکل ۲۱-۵۹ مسئلهٔ ۷۴

حل:



$$\Delta V = -\int_d^{b+x} E_0 dS - \int_{b+x}^{x} E dS - \int_x^{0} E_0 dS$$

که در آن $E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ و $E = ۰$ در نتیجه داریم:

$$\Delta V = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(b+x-d) - ۰ - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(۰-x) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(d-b)$$

$$\Delta V = \frac{q}{\varepsilon_0 A}(d-b)$$

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{q}{\frac{q}{\varepsilon_0 A}(d-b)} = \frac{\varepsilon_0 A}{d-b}$$

$$= \frac{(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۲/۴\times۱۰^{-۴})}{۳\times۱۰^{-۳}} = ۷/۰۷\times۱۰^{-۱۳}\ \text{F}$$

(ب) توجه داریم که بار ثابت می‌ماند، انرژی ذخیره شده در خازن در دو حالت عبارت‌اند از:

$$C_i = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

$$U_i = \frac{q^۲}{۲C_i} = \frac{q^۲ d}{۲\varepsilon_0 A} = ۱۳/۶۱\text{J}$$

$$C_f = \frac{\varepsilon_0 A}{d-b}$$

$$U_f = \frac{q^۲}{۲C_f} = \frac{q^۲(d-b)}{۲\varepsilon_0 A} = ۸/۱۶\text{J}$$

$$\frac{U_i}{U_f} = \frac{۱۳/۶۱}{۸/۱۶} = ۱/۶۷$$

(پ) کار انجام شده برابر است با

$$W = \Delta V = U_f - U_i = ۸/۱۶ - ۱۳/۶۱ = -۵/۴۴\text{J}$$

(ت) چون کار منفی است، لذا برای داخل کردن تیغه نه تنها انرژی از خارج سیستم صرف نمی‌شود بلکه مقداری انرژی نیز آزاد می‌شود یا به بیان دیگر تیغه به درون صفحات کشیده می‌شود.

۷۵- مسئلهٔ ۷۴ را این بار با این فرض که اختلاف پتانسیل $V=$۸۵/۰V به جای بار ثابت بماند، تکرار کنید.

حل: (الف) ظرفیت خازن مقدار مشخصی است و تغییر نمی‌کند.

(ب)

$$\frac{U_i}{U_f} = \frac{\frac{۱}{۲}C_i V^۲}{\frac{۱}{۲}C_f V^۲} = \frac{C_i}{C_f} = \frac{\frac{\varepsilon_0 A}{d}}{\frac{\varepsilon_0 A}{(d-b)}} = \frac{d-b}{d}$$

$$= \frac{۵-۲}{۵} = ۰/۶$$

(پ) کار انجام شده برابر است با

$$W = \Delta U = U_f - U_i = \frac{۱}{۲}(C_f - C_i)V^۲$$

$$= \frac{\varepsilon_0 A}{۲}\left(\frac{۱}{d-b} - \frac{۱}{d}\right)V^۲$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده داریم $W = ۱/۰۲\times۱۰^{-۹}\ \text{J}$.

(ت) چون کار مثبت است لذا تیغه را باید با صرف نیرو به داخل صفحات وارد نمود. البته می‌توان تفسیر دیگری را انجام داد و تفسیر کرد که با آنکه کار مثبت است ولی باز تیغه به درون کشیده می‌شود. در مسئله ۷۴ که خازن از باتری قطع شد

Scanned by CamScanner

و تیغه به داخل کشیده شد F دقیقاً با $-dU/dx$ داده می‌شود.
ولی وقتی باتری قطع نشده باشد این رابطه برقرار نیست چون در این حالت نیروی وارد بر تیغه پایستار نیست و در اینجا این توزیع بار در تیغه است که باعث می‌شود تیغه به فضای میان صفحه‌های خازن کشیده شود و این عمل باعث افزایش انرژی پتانسیل ذخیره شده توسط باتری در خازن می‌شود.

۷۶- چند خازن به ظرفیت $2/0\,\mu F$ در اختیار داریم، که هر یک قادرند پتانسیل $200\,V$ را تحمل کنند، بدون آنکه دچار فروشکست الکتریکی شوند(وضعیتی که در آن بارها به جای ذخیره شدن، رسانش می‌یابند). چگونه می‌توانید ترکیبی از این خازنها را سوار کنید تا ظرفیت معادلی برابر با (الف) $0/40\,\mu F$ و (ب) $1/2\,\mu F$ به دست آید و هر یک از ترکیبها بتوانند $1000\,V$ را تحمل کنند؟

حل: شرط آنکه مجموعه بتواند پتانسیل ۱۰۰۰ ولت را تحمل کند این است که در هر ردیف ۵ خازن $\left(\frac{1000}{200}\right)$ داشته باشیم.
ظرفیت معادل هر ردیف برابر است با:

$$C_1 = \frac{C}{N} = \frac{3}{5} = 0/4\,\mu F$$

اگر n ردیف مشابه داشته باشیم که با هم موازی باشند ظرفیت معادل کل برابر است با

$$C_{eq} = nC_1 = 0/4\,n$$

(الف) $C_{eq} = 0/4\,\mu F$

$$0/4 = 0/4\,n \Rightarrow n = 1$$

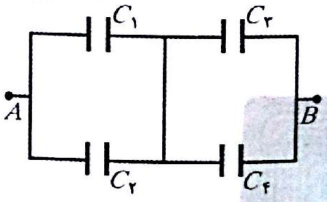
یک ردیف با ۵ خازن.

(ب) $C_{eq} = 1/2\,\mu F$

$$1/2 = 0/4\,n \Rightarrow n = 3$$

سه ردیف هر ردیف با ۵ خازن.

۷۷- شکل ۲۱-۶۰ آرایشی شامل چهار خازن را نشان می‌دهد که در نقطه‌های A و B به مدار بزرگتری وصل شده‌اند. ظرفیتها عبارت‌اند از $C_1 = 10\,\mu F$ و $C_2 = C_3 = C_4 = 20\,\mu F$. بار روی خازن ۱ برابر با $30\,\mu C$ است. بزرگی اختلاف پتانسیل $V_A - V_B$ چقدر است؟



شکل ۲۱-۶۰ مسئلهٔ ۷۷

حل:

$$C_{12} = C_1 + C_2 = 10 + 20 = 30\,\mu F$$

$$V_{12} = V_1 = \frac{q_1}{C} = \frac{30}{10} = 3\,V$$

$$q_{12} = C_{12}V_{12} = (30)(3) = 90\,\mu C$$

$$C_{34} = C_3 + C_4 = 20 + 20 = 40\,\mu F$$

$$q_{34} = q_{12} = 90\,\mu C$$

$$V_{34} = \frac{q_{34}}{C_{34}} = \frac{90}{40} = 2/25\,V$$

$$V_A - V_B = V_{12} + V_{34} = 3 + 2/25 = 5/25\,V$$

۷۸- یک باتری $10\,V$ به رشته‌ای از n خازن متوالی هر یک به ظرفیت $2/0\,\mu F$ متصل شده است. اگر انرژی کل ذخیره شده در خازنها $25\,\mu J$ باشد، n چند است؟

حل: ظرفیت معادل n خازن که به طور متوالی بسته شده‌اند برابر است با

$$C_{eq} = \frac{C}{n}$$

$$W = \frac{1}{2}C_{eq}V^2 \Rightarrow 25\times10^{-6} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\times10^{-6}}{n}\right)(10)^2$$

$$\Rightarrow n = 4$$

Scanned by CamScanner

۲۲

جریان و مقاومت الکتریکی

Scanned by CamScanner

بخش ۲۲-۲ جریان الکتریکی

۱●- در مدت ۴/۰ min جریان ۵/۰ A در سیمی برقرار می‌شود، در این مدت از هر مقطع سیم (الف) چند کولن و (ب) چند الکترون، می‌گذرد؟

حل: (الف)

$$q = it = (۵)(۴)(۶۰) = ۱۲۰۰C$$

(ب)

$$N = \frac{q}{e} = \frac{۱۲۰۰}{۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}} = ۷/۵\times ۱۰^{۲۱}$$

۲●●- شعاع کره‌ای رسانا و منزوی ۱۰۰ cm است. سیمی جریان ۱/۰۰۰۰۰۲۰ A را به کره می‌رساند و سیم دیگری یک جریان ۱/۰۰۰۰۰۰۰ A را از آن خارج می‌کند. افزایش پتانسیل به اندازهٔ ۱۰۰۰ V چقدر طول می‌کشد؟ SSM

حل: مقدار باری که در واحد زمان روی کره جمع می‌شود برابر است با

$$\Delta i = (۱/۰۰۰۰۰۲۰ - ۱/۰۰۰۰۰۰۰) = ۲\times ۱۰^{-۶}\ A$$

$$\Delta q = (\Delta i)t$$

$$\Delta V = k\frac{\Delta q}{r} = k\frac{(\Delta i)t}{r}$$

$$\Rightarrow ۱۰۰۰ = (۹\times ۱۰^{۹})\frac{(۲\times ۱۰^{-۶})t}{۰/۱} \Rightarrow t = ۵/۶\times ۱۰^{-۳}\ s$$

۳●●- تسمهٔ بارداری به پهنای ۵۰ cm، در بین مولد بار الکتریکی و کره‌ای با سرعت ۳۰ m/s حرکت می‌کند. این تسمه بار را با آهنگ ۱۰۰ μA به داخل کره منتقل می‌کند. چگالی سطحی بار روی تسمه را محاسبه کنید.

حل: چنانچه فرض کنیم a پهنای تسمه و x طول متغییر آن باشد در اینصورت می‌توان نوشت

$$\sigma = \frac{q}{A} = \frac{q}{ax} \Rightarrow q = \sigma ax$$

$$\Rightarrow \frac{dq}{dt} = \sigma a\frac{dx}{dt} \Rightarrow i = \sigma a\upsilon \Rightarrow \sigma = \frac{i}{aV}$$

$$\sigma = \frac{۱۰۰\times ۱۰^{-۶}}{(۵۰\times ۱۰^{-۲})(۳۰)} = ۶/۶۷\times ۱۰^{-۶}\ C/m^{۲}$$

بخش ۲۲-۳ چگالی جریان

۴●- جریان کوچک ولی قابل اندازه‌گیری $۱/۲\times ۱۰^{-۱۰}$ A در یک سیم مسی به قطر ۲/۵ mm برقرار است. تعداد حاملهای بار بر یکای حجم $۸/۴۹\times ۱۰^{۲۸}\ m^{-۳}$ است. با فرض اینکه جریان یکنواخت باشد، (الف) چگالی جریان و (ب) تندی سوقی الکترون را محاسبه کنید.

حل: (الف) بزرگی چگالی جریان برابر است با:

$$j = \frac{i}{A} = \frac{i}{\pi R^{۲}/۴} = \frac{۴(۱/۲\times ۱۰^{-۱۰})}{\pi(۲/۵\times ۱۰^{-۳})^{۲}} = ۲/۴\times ۱۰^{-۵}\ A/m^{۲}$$

(ب) تندی رانشی الکترونها نیز برابر است با

$$\upsilon_d = \frac{j}{ne} = \frac{۲/۴\times ۱۰^{-۵}}{(۸/۴۷\times ۱۰^{۲۸})(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})} = ۱/۸\times ۱۰^{-۱۵}\ m/s$$

۵●- فیوز یک مدار الکتریکی سیمی است که چنان طراحی شده که اگر جریان از یک مقدار پیش‌بینی شده بیشتر شود ذوب می‌شود و مدار را باز می‌کند. فرض کنید که وقتی چگالی جریان به بیش از ۴۴۰ $A/cm^{۲}$ می‌رسد ماده به کار رفته در فیوز ذوب می‌شود. قطر یک سیم استوانه‌ای که برای محدود کردن جریان به ۰/۵۰ A در فیوز به کار می‌رود، باید چقدر باشد؟

حل:

$$j = \frac{i}{A} = \frac{i}{\pi r^{۲}} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{i}{\pi J}} = \sqrt{\frac{۰/۵}{\pi(۴۴۰\times ۱۰^{۴})}}$$

$$= ۱/۹\times ۱۰^{-۴}\ m$$

$$D = ۲r = ۲(۱/۹\times ۱۰^{-۴}) = ۳/۸\times ۱۰^{-۴}\ m$$

۶●- سازمان ملی کدگذاری الکتریکی (امریکا)، بیشینهٔ جریانهای مجاز برای سیمهای مسی با روکش لاستیکی با قطرهای مختلف را تعیین می‌کند، که در جدول زیر (بخشی) از آن داده شده است. چگالی جریان مجاز را برحسب تابعی از قطر رسم کنید. کدام شمارهٔ سیم دارای بیشترین چگالی جریان مجاز است؟ (شمارهٔ سیستم نشان دهندهٔ قطر سیم و $1mil = ۱۰^{-۳}$ in است)

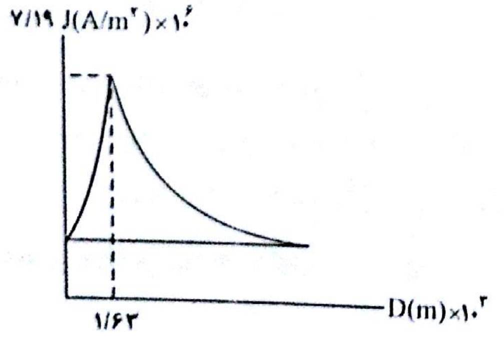
شمارهٔ سیم	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸
قطر، میل	۲۰۴	۱۶۲	۱۲۹	۱۰۲	۸۱	۶۴	۵۱	۴۰
جریان مجاز، A	۷۰	۵۰	۳۵	۲۵	۲۰	۱۵	۶	۳

حل: برای چگالی جریان داریم

$$j = \frac{i}{A} = \frac{i}{\pi R^{۲}} = \frac{۴i}{\pi D^{۲}} \qquad (D = ۲R)$$

بزرگی چگالی جریان را در یکاهای SI به دست می‌آوریم و جدول داده شده را بازنویسی می‌کنیم.

شماره سیم	قطر $\times ۱۰^{-۳}$ (m)	جریان مجاز (A)	چگالی مجاز $\times ۱۰^{۶}$ $(A/m^{۲})$
۴	۵/۱۸	۷۰	۳/۳۲
۶	۴/۱۱	۵۰	۳/۷۷
۸	۳/۲۸	۳۵	۴/۱۴
۱۰	۲/۶	۲۵	۴/۷۱
۱۲	۲/۰۶	۲۰	۶
۱۴	۱/۶۳	۱۵	۷/۱۹
۱۶	۱/۳۰	۶	۴/۵۲
۱۸	۱/۰۲	۳	۳/۶۷



Scanned by CamScanner

که با کمی دقت ملاحظه می‌شود بیشترین چگالی مربوط به سیم شمارهٔ ۱۴ است.

●۷۰- باریکه‌ای شامل $۲/۰\times ۱۰^۸$ یون مثبت دو بار یونیده در هر سانتی‌متر مکعب است که همگی آنها با تندی $۱/۰\times۱۰^۵$ m/s به سوی شمال حرکت می‌کنند. (الف) بزرگی و (ب) جهت چگالی جریان $\vec{J}$ چیست؟ (پ) به چه کمیت دیگری برای محاسبهٔ جریان کل i در این باریکهٔ یونی نیاز دارید؟ SSM WWW

حل: (الف) چگالی جریان از رابطه زیر به دست می‌آید.

(ضریب ۲ را باید به خاطر یونیزه بودن مولکولها اضافه کرد، $(q = ۲e$.

$n = ۲\times۱۰^۸ / cm^۳ = ۲\times۱۰^{۱۴}\ m^{-۳}$

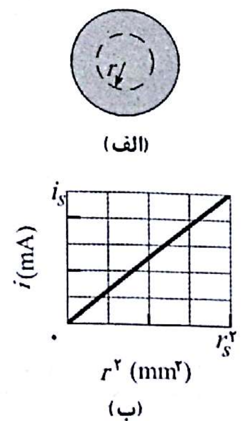
$j = nqv = n(۲e)v = (۲\times۱۰^{۱۴})(۲\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۱\times۱۰^۵)$

$= ۶/۴\ A/m^۲$

(ب) چون یونها مثبت هستند لذا جهت جریان و چگالی جریان در جهت حرکت یونها می‌باشد و در اینجا به سوی شمال است.

(پ) باید سطح مقطع بار دیگر مشخص باشد تا بتوان جریان را محاسبه کرد.

●۸۰- یک سیم استوانه‌ای معین حامل جریان است. دایره‌ای به شعاع r نسبت به محور مرکزی آن در شکل ۲۲-۲۴ الف رسم می‌کنیم و می‌خواهیم جریان i داخل دایره را تعیین کنیم. شکل ۲۲-۲۴ ب جریان i را برحسب تابعی از $r^۲$ نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $i_s = ۴/۰\ mA$ و محور افقی با $r_s^۲ = ۴/۰ mm$ مشخص شده است. (الف) آیا چگالی جریان یکنواخت است؟ (ب) اگر این طور است بزرگی آن چقدر است؟



شکل ۲۲-۲۴ مسئلهٔ ۸

حل: (الف) برای چگالی جریان داریم $j = \frac{L}{\pi r^۲}$ لذا از روی شکل در می‌یابیم که که چگالی جریان یکنواخت است.

(ب) $j = \frac{i}{\pi r^۲} = \frac{۰/۰۰۵}{\pi(۴\times۱۰^{-۶})} = ۳/۹\times۱۰^۳\ A/m^۲$

از این نتیجه نیز دیده می‌شود که چگالی جریان یکنواخت است.

●●۹۰- چقدر طول می‌کشد تا الکترون‌ها از باتری اتومبیل به استارت موتور برسند؟ فرض کنید که جریان ۳۰۰ A و الکترونها از طریق سیم مسی با مساحت مقطع $۰/۲۱\ cm^۲$ و به طول $۰/۸۵$ m حرکت می‌کنند. تعداد حاملهای بار بر یکای حجم $۸/۴۹\times۱۰^{۲۸}\ m^{-۳}$ است. ILW

حل:

$j = nev_d \Rightarrow \frac{i}{A} = nev_d \Rightarrow v_d = \frac{i}{neA}$

$t = \frac{L}{v_d} = \frac{L}{i/neA} = \frac{LneA}{i}$

که با قرار دادن مقادیر داده شده داریم

$t = ۸۰۹/۵s$ یا $۱۳/۵ min$

●●۱۰۰- در نزدیکی سطح زمین، چگالی پروتونها در باد خورشیدی (جریانی از ذره‌های گسیل شده از خورشید) $۸/۷۰\ cm^{-۳}$ و تندی آنها ۴۷۰ km/s است. (الف) چگالی جریان این پروتونها را پیدا کنید. (ب) اگر میدان مغناطیسی زمین اینها را منحرف نکند و پروتونها به زمین برخورد کنند، در این صورت کل جریانی که زمین دریافت می‌کند چقدر است؟

حل: (الف) با توجه به اینکه $1cm^۳ = ۱۰^{-۶}\ m^۳$ است داریم:

$j = nev = \left(\frac{۸/۷}{۱۰^{-۶}}\right)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۴۷۰\times۱۰^۳)$

$= ۶/۴۵\times۱۰^{-۷}\ A/m^۲$

(ب) سطح استوای زمین در مقابل این باد خورشیدی قرار دارد

$A = \pi R^۲ = (۳/۱۴)(۶/۴\times۱۰^۶)^۲ = ۱/۲۹\times۱۰^{۱۴}\ m^۲$

$i = jA = (۶/۴۵\times۱۰^{-۷})(۱/۲۹\times۱۰^{۱۴}) = ۸/۴۴\times۱۰^۷\ A$

●●۱۱۰- بزرگی $J(r)$ چگالی جریان در یک سیم استوانه‌ای معین برحسب تابعی از فاصلهٔ شعاعی از مرکز مقطع سیم به صورت $J(r) = Br$ است، که در آن r برحسب متر، J برحسب آمپر بر متر مربع و $B = ۲/۰۰\times۱۰^۵\ A/m^۳$ است. این تابع در خارج از شعاع $۲/۰۰$ mm سیم برقرار است. اگر پهنای شعاعی حلقه $۱۰/۰\ \mu m$ و در فاصلهٔ شعاعی $۱/۲۰ mm$ واقع باشد، چقدر جریان در پهنای این حلقه هم مرکز با سیم وجود دارد؟

حل: $i = \int jdA = \int_{۱/۲}^{۱/۲۱} Br۲\pi r\, dr = \frac{۲}{۳}\pi B\left[(۱/۲۱)^۳ - (۱/۲)^۳\right]$

$= \frac{۲}{۳}(۳/۱۴)(۲\times۱۰^۵)\left[(۱/۲۱)^۳ - (۱/۲)^۳\right]$

$= ۱/۸۲\times۱۰^{-۵}\ A$

●●۱۲۰- بزرگی J چگالی جریان در سیم معینی با مقطع دایره‌ای به شعاع $R = ۲/۰۰$ mm با $J = (۳/۰۰\times۱۰^۸)r^۲$ داده می‌شود که در آن J برحسب آمپر بر متر مربع و r فاصلهٔ شعاعی برحسب متر است. چه جریانی از بخش بیرونی محدود شده به $r = ۰/۹۰۰\ R$ و $r = R$ می‌گذرد؟

Scanned by CamScanner

حل:
$$i=\int jdA=\int_{0.9R}^{R}(3\times10^{8})r^2\,2\pi r\,dr$$
$$=(3\times10^{8})(2\pi)\left(\frac{1}{4}\right)\left[R^4-(0.9R)^4\right]$$
$$=2.6\times10^{-3}\ \text{A}$$

۱۳●●- اگر بزرگی چگالی جریان با (الف) $J_a=J_0 r/R$ و (ب) $J_b=J_0(1-r/R)$ داده شود، جریان در سیمی به شعاع $R=3.40$ mm چقدر است، r فاصلهٔ شعاعی و $J_0=5.50\times10^4$ A/m است؟ (پ) چه عملکردی چگالی جریان را در نزدیکی سطح سیم بیشینه می‌کند؟

حل: (الف)
$$i=\int jdA=\int_0^R j_0\frac{r}{R}2\pi r\,dr=\frac{2}{3}\pi J_0R^2$$
$$=\frac{2}{3}(3.14)(5.5\times10^4)(3.4\times10^{-3})^2=1.33\text{A}$$

(ب)
$$i=\int jdA=\int_0^R j_0\left(1-\frac{r}{R}\right)2\pi r\,dr=2\pi J_0\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3R}\right]_0^R$$
$$=\frac{1}{3}\pi j_0R^2=\frac{1}{3}(3.14)(5.5\times10^4)(3.4\times10^{-3})^2$$
$$=0.67\text{A}$$

بخش ۲۲-۴ مقاومت و مقاومت ویژه

۱۴●- مس و آلومینیوم در خط انتقال ولتاژ بالا که باید حامل جریان ۶۰/۰ A باشد به کار گرفته می‌شوند. مقاومت بر یکای طول ۰/۱۵۰Ω/km است. چگالیهای مس و آلومینیوم به ترتیب ۸۹۶۰kg/m³ و ۲۶۰۰kg/m³ است. (الف) بزرگی J چگالی جریان و (ب) جرم بر یکای طول λ را برای کابل مسی و (پ) J و (ت) λ را برای کابل آلومینیومی محاسبه کنید.

حل: (الف) برای مس داریم:
$$R=\rho_{cu}\frac{L}{A}\Rightarrow 0.15=(1.69\times10^{-8})\frac{(1000)}{A}$$
$$\Rightarrow A=1.13\times10^{-4}\ \text{m}^2$$
$$J_{cu}=\frac{i}{A}=\frac{60}{(1.13\times10^{-4})}=5.31\times10^5\ \text{A/m}^2$$

(ب)
$$\frac{m}{L}=\rho A=(8960)(1.13\times10^{-4})=1.01\text{kg/m}$$

(پ)
$$R=\rho_{Al}\frac{L}{A}\Rightarrow 0.15=(2.75\times10^{-8})\frac{100}{A}$$
$$\Rightarrow A=1.83\times10^{-4}\ \text{m}^2$$
$$J_{Al}=\frac{i}{A}=\frac{60}{1.83\times10^{-4}}=3.28\times10^5\ \text{A/m}^2$$

(ت)
$$\frac{m}{L}=\rho A=(2600)(1.83\times10^{-4})=0.476\text{kg/m}$$

۱۵●- طول سیمی از نیکروم (آلیاژی از نیکل- کروم- آهن که معمولاً در سیم‌های گرم کننده به کار می‌رود.) ۱/۰m و مساحت مقطع آن ۱/۰ mm² است. هرگاه اختلاف پتانسیل اعمال شده بین دو سر آن ۲/۰V باشد، جریان ۴/۰A از آن می‌گذرد. رسانندگی σ نیکروم را محاسبه کنید.

حل:
$$R=\frac{V}{i}=\frac{2}{4}=0.5\Omega$$
$$R=\rho\frac{L}{A}=\frac{1}{\sigma}\frac{L}{A}\Rightarrow\sigma=\frac{L}{RA}=\frac{1}{(0.5)(1\times10^{-3})^2}$$
$$=2\times10^{6}\frac{1}{\Omega\cdot\text{m}}$$

۱۶●- مقاومت سیمی به طول ۴/۰۰m و قطر ۶/۰۰mm برابر با ۱۵/۰mΩ است. اختلاف پتانسیل ۲۳/۰ V به دو سر آن اعمال می‌شود. (الف) جریان در سیم چقدر است؟ (ب) بزرگی چگالی جریان چقدر است؟ (پ) مقاومت ویژهٔ مادهٔ سیم را محاسبه کنید. (ت) با استفاده از جدول ۲۲-۱ جنس سیم را مشخص کنید.

حل: (الف) جریان در سیم برابر است با:
$$i=\frac{V}{R}=\frac{23}{15\times10^{-3}}=1.53\times10^{3}\ \text{A}$$
(ب)
$$j=\frac{i}{A}=\frac{4i}{\pi D^2}=\frac{4(1.53\times10^3)}{(3.14)(6\times10^{-3})}=5.41\times10^{7}\ \text{A/m}^2$$
(پ) با استفاده از جدول مشاهده می‌شود جنس سیم پلاتین است.

۱۷●- قطر یک سیم رسانا ۱/۰ mm، طول آن ۲/۰ m و مقاومت آن ۵۰ mΩ است. مقاومت ویژهٔ مادهٔ آن چقدر است؟

حل:
$$A=\pi r^2=(3.14)(0.5\times10^{-3})^2=7.85\times10^{-7}\ \text{m}^2$$
حال می‌توان ρ را به دست آورد.
$$R=\frac{\rho L}{A}\Rightarrow 0.05=\frac{\rho(2)}{7.85\times10^{-7}}\Rightarrow\rho=2\times10^{-8}\ \Omega\cdot\text{m}$$

۱۸●- مقاومت سیمی برابر با R است. مقاومت سیم دیگری که از همان جنس ساخته شده و طول و قطر آن نصف شده باشد، چقدر است؟

حل:
$$R_1=R=\frac{\rho L_1}{A_1}\qquad R_2=R=\frac{\rho L_2}{A_2}$$
از تقسیم کردن دو رابطه بر هم داریم:
$$\frac{R_2}{R}=\frac{L_2A_1}{L_1A_2}=\left(\frac{1}{2}\right)(4)=2\Rightarrow R_2=2R$$

۱۹●- پیچه‌ای از ۲۵۰ دور سیم مسی نمره ۱۶ (قطر = ۱/۳mm) به صورت یک لایه دور استوانه‌ای به شعاع ۱۲cm تشکیل شده است. مقاومت این پیچه چقدر است؟ ضخامت عایق بندی قابل چشمپوشی است (از جدول ۲۲-۱ استفاده کنید.) SSM

حل:
$$A=\pi r^2=\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2=(3.14)\left(\frac{1.33\times10^{-3}}{2}\right)^2$$
$$=1.33\times10^{-6}\ \text{m}^2$$
و طول سیم برابر است با
$$L=n2\pi r=(250)(2)(3.14)(0.12)=188.4\text{m}$$
حال می‌توان R را به دست آورد.

Scanned by CamScanner

$$R=\frac{\rho L}{A}=\frac{(۱/۶۹\times ۱۰^{-۸})(۱۸۸/۴)}{۱/۳۳\times ۱۰^{-۶}}=۲/۴\Omega$$

••۲۰- اگر جریانی به کوچکی ۵۰ mA از نزدیکی قلب انسان عبور کند باعث مرگ ناشی از برق گرفتگی می‌شود. یک برقکار با دستهای عرق کرده با دو رسانایی که هریک را با یک دست نگهداشته است تماس کامل پیدا می‌کند. اگر مقاومت او برابر با ۲۰۰۰ Ω باشد، ولتاژ مرگبار چقدر است؟

حل: ولتاژ مرگبار برابر است با

$$V=iR=(۵۰\times ۱۰^{-۳})(۲۰۰۰)=۱۰۰V$$

••۲۱- سیمی با مقاومت ۶/۰ Ω با دستگاه حدیده کشیده می‌شود به طوری که طول آن به سه برابر طول اولیه برسد. با فرض اینکه مقاومت ویژه و چگالی ماده تغییر نکند، مقاومت سیم بلندتر را پیدا کنید. ILW SSM

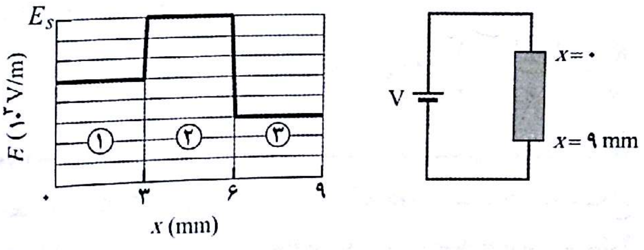
حل: وقتی سیم کشیده می‌شود حجم آن تغییر نمی‌کند.

$$V=A_۱L_۱=A_۲L_۲\Rightarrow \frac{A_۲}{A_۱}=\frac{L_۱}{L_۲}$$

$$\frac{R_۲}{R_۱}=\frac{\rho\frac{L_۲}{A_۲}}{\rho\frac{L_۱}{A_۱}}=\frac{L_۲A_۱}{L_۱A_۲}=\left(\frac{L_۲}{L_۱}\right)^۲$$

$$\frac{R_۲}{۶}=(۳)^۲\Rightarrow R_۲=۵۴\Omega$$

••۲۲- شکل ۲۲-۲۵ الف بزرگی $E(x)$ میدانهای الکتریکی را نشان می‌دهد که توسط یک باتری در میله‌ای مقاومت‌دار به طول ۹/۰۰ mm (شکل ۲۲-۲۴ب) برقرار شده است. مقیاس محور قائم با $E_s=۴/۰۰\times ۱۰^{۳}$ V/m مشخص شده است. میله شامل سه بخش از یک جنس ولی با شعاعهای متفاوت است. (نمودار طرحوار شکل ۲۲-۲۴ ب شعاعهای متفاوت را مشخص نمی‌کند.) شعاع بخش ۳ برابر ۲/۰۰ mm است. شعاع (الف) بخش ۱ و (ب) بخش ۲ چقدر است؟



شکل ۲۲-۲۵ مسئله ۲۲

حل: سه بخش با هم متوالی‌اند پس جریان در آنها یکسان است.

$$i_۱=i_۲=i_۳\Rightarrow j_۱A_۱=j_۲A_۲=j_۳A_۳$$

جنس آنها یکسان است لذا ρ برای آنها یکی است و داریم:

$$E_۱r_۱^۲=E_۲r_۲^۲=E_۳r_۳^۲$$

حال با استفاده از نمودار داده شده می‌توان نوشت:

$$(۲/۵\times ۱۰^{۳})r_۱^۲=(۴\times ۱۰^{۳})r_۲^۲=(۱/۵\times ۱۰^{۳})(۲\times ۱۰^{-۳})^۲$$

(الف) $r_۱=۱/۵۵\times ۱۰^{-۳}$ m

(ب) $r_۲=۱/۲۲\times ۱۰^{-۳}$ m

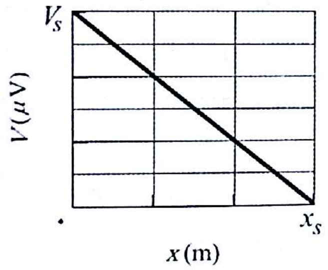
••۲۳- دو رسانا از یک جنس‌اند و طول آنها برابر است. رسانای A یک سیم توپر به قطر ۱/۰ mm است. رسانای B یک لولهٔ تو خالی به قطر خارجی ۲/۰mm و قطر داخلی ۱/۰ mm است. نسبت R_A/R_B که بین دو سر هریک اندازه‌گیری می‌شود چقدر است؟ WWW SSM

حل: $A_A=\pi r_A^۲=(۳/۱۴)(۰/۵\times ۱۰^{-۳})^۲=۷/۸۵\times ۱۰^{-۷}\ m^۲$

$$A_B=\pi(r_B^۲-r_A^۲)=(۳/۱۴)(۱\times ۱۰^{-۳}-۰/۵\times ۱۰^{-۳})$$
$$=۲/۳۲\times ۱۰^{-۶}\ m^۲$$

$$\frac{R_A}{R_B}=\frac{\rho_AL_AA_B}{R_A\rho_BL_B}=\left(\frac{\rho_۱}{\rho_۲}\right)\left(\frac{L_۱}{L_۲}\right)\left(\frac{A_۲}{A_۱}\right)$$
$$=(۱)(۱)\left(\frac{۲/۳۶\times ۱۰^{-۶}}{۷/۸۵\times ۱۰^{-۷}}\right)=۳$$

••۲۴- شکل ۲۲-۲۶ پتانسیل الکتریکی $V(x)$ را در راستای یک سیم مسی حامل جریان یکنواخت، از نقطه با پتانسیل بالای $V_s=۱۲/۰\mu V$ در $x=۰$ تا نقطه با پتانسیل صفر در $x_s=۳/۰$ m نشان می‌دهد. شعاع سیم ۲/۰۰ mm است. جریان در سیم چقدر است؟ GO



شکل ۲۲-۲۶ مسئله ۲۲

حل: شیب منحنی پتانسیل- فاصله، میدان الکتریکی را به دست می‌دهد.

$$E=\left|\frac{dv}{dx}\right|=\frac{۱۲\times ۱۰^{-۶}}{۳}=۴\times ۱۰^{-۶}\ V/m$$

$$E=\rho j \qquad j=\frac{E}{\rho}$$

مساحت سطح مقطع سیم نیز برابر است با $A=\pi r^۲$، لذا داریم:

$$I=jA=\frac{E}{\rho}\cdot\pi r^۲=\left(\frac{۴\times ۱۰^{-۶}}{۱/۶۹\times ۱۰^{-۸}}\right)(۳/۱۴)(۲\times ۱۰^{-۳})^۲$$
$$=۲/۹\times ۱۰^{-۳}\ A$$

••۲۵- یک لامپ فلاش معمولی در ۰/۳۰A و ۲/۹ V (مقدارهای جریان و ولتاژ در شرایط کاری) کار می‌کند. اگر مقاومت رشتهٔ تنگستن در دمای اتاق (۲۰°C) ۱/۱Ω باشد، دمای رشته در هنگام روشن بودن چقدر است؟ ILW

حل: مقاومت رشته لامپ، وقتی لامپ روشن است برابر است با:

$$R=\frac{V}{i}=\frac{۲/۹}{۰/۳}=۹/۷\Omega$$

Scanned by CamScanner

$R = R_0[1+\alpha\Delta T] \Rightarrow ۹/۷ = (۱/۱)[۱+(۴/۵\times۱۰^{-۳})(T-۲۰۰)]$

$T = ۱۷۵۷°C = ۲۰۲۸K$

۲۶••- پرواز بادبادک در توفان. این کار برجسته که بنیامین فرانکلین بادبادکی را موقع شروع توفان به پرواز درآورد فقط کاری بزرگ است- او نه احمق بود و نه می‌خواست خودکشی کند. فرض کنید شعاع نخ بادبادک ۲/۰۰mm و به طور مستقیم تا ۰/۸۰۰km امتداد داشته و با لایه‌ای از آب به ضخامت ۰/۵۰۰mm که مقاومت ویژهٔ آن ۱۵۰Ω.m است پوشیده شده باشد. اگر اختلاف پتانسیل بین دو انتهای نخ ۱۶۰MV باشد، چه جریانی از لایهٔ آب می‌گذرد؟ خطر در این جریان نیست ولی احتمال دارد این نخ آذرخشی را که می‌تواند جریانی به بزرگی $۵۰۰۰۰۰A$ را داشته باشد به خود بکشد. (ورای آن است که فقط مرگبار باشد)

حل:

$$R=\rho\frac{L}{A}=(۱۵۰)\frac{(۰/۸\times۱۰^{۳})}{\pi[(۲/۵)^{۲}-(۲)^{۲}]\times۱۰^{-۶}}$$

$$=۱/۷\times۱۰^{۱۰}\,\Omega$$

$$i=\frac{V}{R}=\frac{۱۶۰\times۱۰^{۶}}{۱/۷\times۱۰^{۱۰}}=۹/۴\times۱۰^{-۳}\ A$$

۲۷••- یک اختلاف پتانسیل ۳/۰۰ nV در دو سر یک سیم مسی به طول ۲/۰۰ cm و شعاع ۲/۰۰ mm برقرار می‌شود. چقدر بار از طریق مقطع سیم در ۳/۰۰ ms سوق داده می‌شود؟

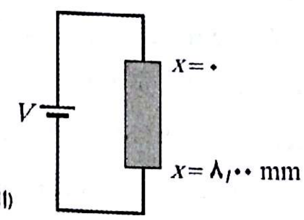
حل:

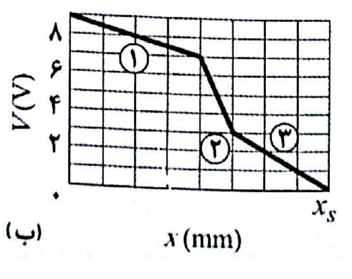
$$R=\frac{\rho L}{A}=\frac{(۱/۶۹\times۱۰^{-۸})(۲\times۱۰^{-۲})}{\pi(۲\times۱۰^{-۳})^{۲}}=۲/۶۹\times۱۰^{-۵}\,\Omega$$

$$i=\frac{V}{R}=\frac{۳\times۱۰^{-۹}}{۲/۶۹\times۱۰^{-۵}}=۱/۱۲\times۱۰^{-۴}\ A$$

$$q=it=(۱/۱۲\times۱۰^{-۴})(۳\times۱۰^{-۳})=۳/۳۶\times۱۰^{-۷}\ C$$

۲۸••- در شکل ۲۲-۲۷ الف، یک باتری ۹/۰۰ V به یک مقاومت به شکل نوار متصل شده است که دارای سه بخش با مساحت مقطع یکسان ولی رسانندگیهای متفاوت است. شکل ۲۲-۲۷ ب پتانسیل الکتریکی $V(x)$ را برحسب مکان x در راستای نوار نشان می‌دهد. مقیاس محور افقی با $x_s = ۸/۰۰mm$ مشخص شده است. بخش ۳ دارای رسانندگی $۳/۰۰\times۱۰^{۷}\ (\Omega.m)^{-1}$ است. رسانندگی بخش (الف) ۱ و (ب) ۲ چقدر است؟





شکل ۲۲-۲۷ مسئلهٔ ۲۸

حل: قدر مطلق شیب قطعه خطهای مستقیم در نمودار برابر با بزرگی میدان‌های الکتریکی مربوطه‌اند.

$$E_1=\left|\frac{\Delta V}{\Delta x}\right|=\frac{۹-۷}{۴\times۱۰^{-۳}}=۵۰۰\,V/m$$

$$E_2=\left|\frac{\Delta V}{\Delta x}\right|=\frac{۷-۳}{(۵-۴)\times۱۰^{-۳}}=۴۰۰۰\,V/m$$

$$E_3=\left|\frac{\Delta V}{\Delta x}\right|=\frac{۳}{(۸-۵)\times۱۰^{-۳}}=۱۰۰۰\,V/m$$

سه بخش به طور متوالی بسته شده‌اند لذا جریان در آنها یکسان است و با توجه به رابطه $J=\sigma E$ می‌توان نوشت

$$i_1=i_2=i_3 \Rightarrow J_1A_1=J_2A_2=J_3A_3$$

$$\sigma_1E_1A_1=\sigma_2E_2A_2=\sigma_3E_3A_3$$

$$\Rightarrow \sigma_1(۵۰۰)=\sigma_2(۴۰۰۰)=(۳\times۱۰^{۷})(۱۰۰۰)$$

(الف) $\sigma_1=۶\times۱۰^{۷}\,(\Omega\cdot m)^{-1}$

(ب) $\sigma_2=۷/۵\times۱۰^{۶}\,(\Omega\cdot m)^{-1}$

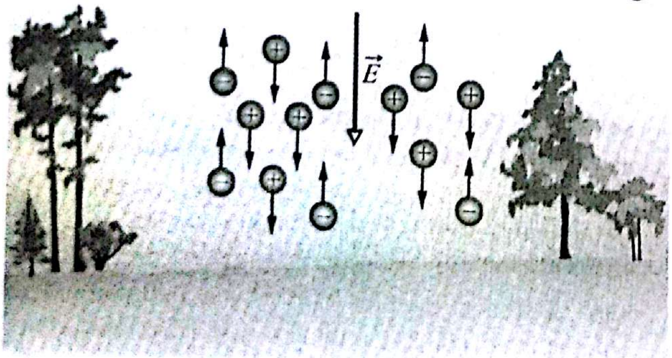
۲۹••- هرگاه ۱۱۵V به سیمی که طول آن ۱۰m و شعاع آن ۰/۳۰ mm است اعمال شود، چگالی جریان برابر با $۱/۴\times۱۰^{۴}\ A/m^{2}$ می‌شود. مقاومت ویژهٔ سیم را پیدا کنید.

حل:

$$V=\rho\frac{L}{A}=\rho\frac{L}{A}jA=\rho Lj$$

$$۱۱۵=\rho(۱۰)(۱/۴\times۱۰^{۴})\Rightarrow \rho=۸/۲۱\times۱۰^{-۴}\,\Omega\cdot m$$

۳۰••- در جو نزدیک سطح زمین یونهای منفی و مثبت وجود دارند که به‌وسیلهٔ عنصرهای پرتوزای موجود در خاک و پرتوهای کیهانی فضا ایجاد شده‌اند. در یک ناحیهٔ معین جو، شدت میدان الکتریکی ۱۲۰ V/m و در جهت قائم رو به پایین است. این میدان سبب می‌شود یونهای مثبت یک بار یونیده، با چگالی $۶۲۰\ cm^{-3}$ رو به پایین و یونهای منفی یک بار یونیده، با چگالی $۵۵۰\ cm^{-3}$ رو به بالا رانده شوند (شکل ۲۲-۲۸). رسانندگی ویژهٔ اندازه‌گیری شدهٔ هوا در این ناحیه برابر با $۲/۷۰\times۱۰^{-۱۴}\ (\Omega.m)^{-1}$ است. (الف) بزرگی چگالی جریان و (ب) تندی سوقی یونها را با فرض اینکه برای یونهای مثبت و منفی یکسان است محاسبه کنید.



شکل ۲۲-۲۸ مسئلهٔ ۳۰

حل: (الف)

$$j=\sigma E=(۲/۷\times۱۰^{-۱۴})(۱۲۰)=۳/۲۴\times۱۰^{-۱۲}\ A/m^{2}$$

Scanned by CamScanner

(ب) $j_۱ = n_۱ e v_d$ $\quad j_۲ = n_۲ e v_d$

$$j = j_۱ + j_۲ = (n_۱ + n_۲)e v_d$$

$$۳/۲۴\times ۱۰^{-۱۲} = (۶۲۰ + ۵۵۰)\times ۱۰^{۶}(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})v_d$$

$$\Rightarrow V_d = ۱/۷۳\times ۱۰^{-۲}\ \text{m/s}$$

●●۳۱- مساحت مقطع عرضی قطعه‌ای به شکل مستطیل توپر برابر با $۳/۵۰\,\text{cm}^۲$، و طول از جلو تا عقب $۱۵/۸\,\text{cm}$ و مقاومت آن ۹۳۵Ω است. این قطعه از ماده‌ای است که $۵/۳۳\times ۱۰^{۲۲}$ الکترون رسانشی بر متر مکعب دارد. بین عقب و جلو آن اختلاف پتانسیل $۳۵/۸\,\text{V}$ برقرار شده است. (الف) جریان در قطعه چقدر است؟ (ب) اگر چگالی جریان یکنواخت باشد، مقدار آن چقدر است؟ (پ) تندی سوقی الکترونهای رسانشی چقدر است؟ (ت) بزرگی میدان الکتریکی در قطعه چقدر است؟

حل: (الف)

$$i = \frac{V}{R} = \frac{۳۵/۸}{۹۳۵} = ۳/۸۳\times ۱۰^{-۲}\ \text{A}$$

(ب)

$$j = \frac{i}{A} = \frac{۳/۸۳\times ۱۰^{-۲}}{۳/۵\times ۱۰^{-۴}} = ۱۰۹\ \text{A/m}^۲$$

(پ)

$$v_d = \frac{j}{ne} = \frac{۱۰۹}{(۵/۳۳\times ۱۰^{۲۲})(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})} = ۱/۲۸\times ۱۰^{-۲}\ \text{m/s}$$

(ت)

$$E = \frac{V}{L} = \frac{۳/۵۸}{۰/۱۵۸} = ۲۲۶/۶\,\text{V/m}$$

●●۳۲- اگر شمارهٔ سیمی ۶ عدد زیاد شود، قطر آن نصف می‌شود؛ اگر شمارهٔ سیم به اندازهٔ ۱ افزایش یابد، قطر با ضریب $۲^{۱/۶}$ کم می‌شود، (به جدول مسئله ۴ نگاه کنید). با دانستن این، و با دانستن اینکه $۱۰۰۰\,\text{ft}$ از یک سیم شمارهٔ ۱۰ دارای مقاومت تقریبی $۱/۰۰\Omega$ است، مقاومت $۲۵\,\text{ft}$ از سیم مسی با شمارهٔ ۲۲ را براورد کنید.

حل: فرض می‌کنیم L طول سیم و D قطر آن باشد.

$$R = \rho\frac{L}{A}$$

$$\frac{R_۲}{R_۱} = \frac{A_۱}{A_۲}\,\frac{L_۲}{L_۱} = \left(\frac{D_۱}{D_۲}\right)^۲\left(\frac{L_۲}{L_۱}\right) \Rightarrow \frac{R_۲}{۱} = (۴)^۲\left(\frac{۲۵}{۱۰۰۰}\right)$$

$$\Rightarrow R_۲ = ۰/۴\Omega$$

●●۳۳- یک کابل الکتریکی ۱۲۵ رشته سیم نازک دارد که مقاومت هر یک $۲/۶۵\mu\Omega$ است. اختلاف پتانسیل یکسانی بین دو سر همهٔ رشته‌ها اعمال و جریان کل $۰/۷۵۰\,\text{A}$ حاصل می‌شود. (الف) جریان در هر رشته چقدر است؟ (ب) اختلاف پتانسیل اعمال شده چقدر است؟ (پ) مقاومت کابل چقدر است؟

حل: (الف) رشته‌ها به طور موازی بسته شده‌اند و جریان در هر رشته برابر است با:

$$i = \frac{۰/۷۵}{۱۲۵} = ۶\times ۱۰^{-۳}\ \text{A}$$

(ب)

$$V = iR = (۶\times ۱۰^{-۳})(۲/۶۵\times ۱۰^{-۶}) = ۱/۵۹\times ۱۰^{-۸}\ \text{V}$$

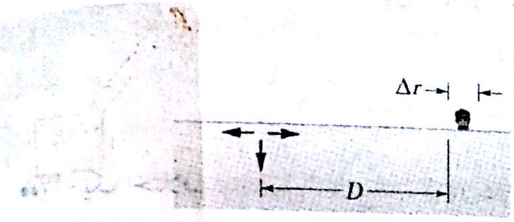
(پ) پتانسیل دو سر کابل برابر با مقدار بالا است، لذا مقاومت معادل برابر است با:

$$R_{eq} = \frac{V}{i_{کل}} = \frac{۱/۵۹\times ۱۰^{-۸}}{۰/۷۵۰} = ۲/۱۲\times ۱۰^{-۸}\ \Omega$$

یا

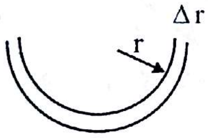
$$R_{eq} = \frac{R}{n} = \frac{۲/۶۵\times ۱۰^{-۶}}{۱۲۵} = ۲/۱۲\times ۱۰^{-۸}\ \Omega$$

●●۳۴- شنا در توفان. شکل ۲۲-۲۹ شناگری را در فاصلهٔ $D = ۳۵/۰\,\text{m}$ از محل آذرخش با آب را نشان می‌دهد که جریان آن $۷۸\,\text{kA}$ است. مقاومت ویژهٔ آب $۳۰\Omega.\text{m}$، پهنای شناگر در راستای خط شعاعی از محل اصابت $۰/۷۰\,\text{m}$ و مقاومت او در این پهنا $۴/۰۰\,\text{k}\Omega$ است. فرض کنید جریان روی آب در کره‌ای به مرکز محل اصابت پخش می‌شود. چه جریانی از شناگر می‌گذرد؟



شکل ۲۲-۲۹ مسئلهٔ ۳۴

حل:



لایه‌ای به شکل نیم‌کره را در نظر می‌گیریم اختلاف پتانسیل دو سر این لایه به ضخامت Δr برابر است با

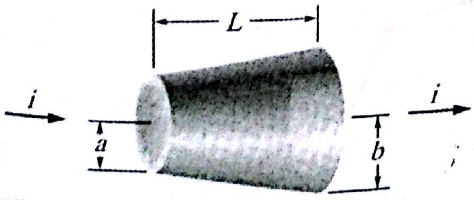
$$\Delta V = i\Delta R = i\rho\frac{\Delta L}{A} = i\rho\frac{\Delta r}{\pi D^۲}$$

با قرار دادن مقادیر داده شده، داریم $\quad \Delta V = ۲۱۳\,\text{V}$

$$\Delta V = iR_p \Rightarrow ۲۱۳ = (۴\times ۱۰^{۳})i$$

$i = ۵/۳\times ۱۰^{-۳}\ \text{A}$ یا $۵/۳\,\text{mA}$

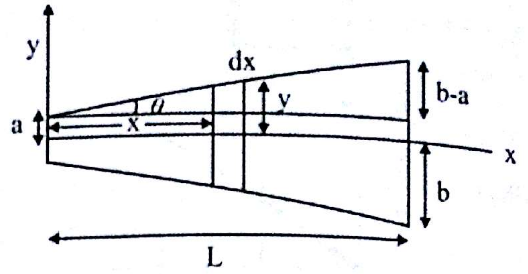
●●●۳۵- در شکل ۲۲-۳۰، در مخروط ناقصی با مقطع دایره‌ای و با مقاومت ویژهٔ $۷۳۱\Omega.\text{m}$ جریانی برقرار شده است. شعاع سمت چپ $a = ۲/۰۰\,\text{mm}$ و شعاع سمت راست $b = ۲/۳۰\,\text{mm}$ و طول آن $L = ۱/۹۴\,\text{cm}$ است. فرض کنید که چگالی جریان در هر مقطعی عمود بر طول یکنواخت باشد. مقاومت مخروط چقدر است؟ SSM WWW



شکل ۲۲-۳۰ مسئله ۳۵

Scanned by CamScanner

حل:



$dR = \rho \frac{dx}{\pi y^{۲}}$

$y - a = x\tan\theta \Rightarrow dx = \frac{dy}{\tan\theta}$

با توجه به شکل داریم $\tan\theta = \frac{b-a}{L}$ لذا داریم: $dx = \frac{L\,dy}{b-a}$

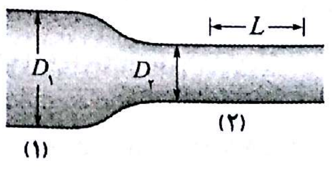
و

$$dR = \rho\frac{L\frac{dy}{b-a}}{\pi y^{۲}} \Rightarrow R = \frac{\rho L}{\pi(b-a)}\int_a^b \frac{dy}{y^{۲}} = \frac{\rho L}{\pi(b-a)}\left[\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}\right]$$

$$R = \frac{\rho L}{\pi(b-a)}\left[\frac{b-a}{ab}\right] \Rightarrow R = \frac{\rho L}{\pi ab}$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت $R = ۹/۸۱\times ۱۰^{۵}\ \Omega$.

●●●۳۶- شکل ۲۲-۳۱ در بخش ۱ سیمی به قطر $D_۱ = ۴/۰۰ R$ و در بخش ۲ سیمی به قطر $D_۲ = ۲/۰۰\ R$ را نشان می‌دهد که با باریک شدن تدریجی به هم متصل شده‌اند. سیم از مس است و جریانی از آن می‌گذرد. فرض کنید که جریان به طور یکنواخت در هر سطح مقطعی در پهنای سیم توزیع شده است. اختلاف پتانسیل الکتریکی V در طول $L = ۲/۰۰ m$ نشان داده شده در بخش ۲ برابر با $۱۰/۰ \mu V$ است. تعداد حاملهای بار بریکای حجم برابر با $۸/۴۹\times ۱۰^{۲۸}\ m^{-۳}$ است. تندی سوقی الکترونهای بخش ۱ چقدر است؟ GO



شکل ۲۲-۳۱ پرسش ۳۶

حل: چون دو قسمت به طور متوالی به هم متصل‌اند لذا جریان در آنها یکسان است.

$$i_۱ = i_۲ \Rightarrow j_۱A_۱ = j_۲A_۲ \Rightarrow j_۱\pi R_۱^{۲} = j_۲\pi R_۲^{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{j_۱}{j_۲} = \left(\frac{R_۲}{R_۱}\right)^{۲}$$

در ضمن برای قسمت دوم داریم $E_۲ = \frac{V_۲}{L_۲}$ و در نتیجه داریم

$$j_۲ = \frac{E_۲}{\rho} = \frac{V_۲}{\rho L_۲} = \frac{۱۰\times ۱۰^{-۶}}{(۱/۶۹\times ۱۰^{-۸})(۲)} = ۲۹۵/۹\ A/m^{۲}$$

و رابطه نسبت چگالی‌های جریان (رابطه بالا)

$$\frac{j_۱}{۲۹۵/۹} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲} \Rightarrow j_۱ = ۷۴\ A/m^{۲}$$

$$j = nev_d \Rightarrow ۷۴ = (۸/۴۹\times ۱۰^{۲۸})(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})v_d$$

$$\Rightarrow v_d = ۵/۴۵\times ۱۰^{-۹}\ m/s$$

بخش ۲۲-۶ نگرش میکروسکوپی قانون اهم

●●۳۷- بر اساس مدل الکترون آزاد رسانش الکتریکی در فلزها و فیزیک کلاسیک، نشان دهید که مقاومت ویژهٔ فلزها با $\sqrt{T}$ متناسب است، که T دما برحسب کلوین است. (به معادلهٔ ۱۵-۳۱ نگاه کنید.)

حل: در مدل الکترون آزاد، سرعت الکترون مشابه سرعت v_{rms} مولکولها در گاز کامل است

$$v_{rms}\,\alpha\sqrt{T}$$
$$v_e\,\alpha\sqrt{T}$$

از طرف دیگر از معادله (۲۲-۲۵) داریم

$$\rho = \frac{m}{e^{۲}n\tau} \Rightarrow \rho\propto\frac{۱}{\tau}$$

$$\lambda = \tau v_e \Rightarrow v_e\propto\frac{۱}{\tau}$$

از دو رابطه فوق می‌توان نتیجه گرفت که در مدل الکترون آزاد

$$\rho\propto v_e\,\alpha\sqrt{T}$$

بخش ۲۲-۷ توان در مدارهای الکتریکی

●۳۸- دانشجویی رادیوی $۹/۰\ V$ و $۷/۰\ W$ خود را از ساعت ۹/۰۰ صبح تا ۲/۰۰ بعد از ظهر با بلندترین صدا روشن نگه می‌دارد. در این مدت چقدر بار وارد رادیو شده است؟

حل: $P = Vi \qquad i = \frac{P}{V}$

$$q = i\Delta t = \frac{P}{V}\Delta t = \frac{۷}{۹}(۱۴-۹)(۳۶۰۰) = ۱۴۰۴۰\ C$$

●۳۹- اختلاف پتانسیل $۱۲۰\ V$ به یک بخاری برقی که در حالت روشن مقاومت آن ۱۴Ω است اعمال می‌شود. (الف) با چه آهنگی انرژی الکتریکی به گرما تبدیل می‌شود؟ (ب) به‌ازای هر کیلو وات ساعت (kW.h) برابر با ۰/۰۵ دلار، کارکرد وسیله به مدت $۵/۰\ h$ چه هزینه‌ای خواهد داشت؟ SSM

حل: (الف) $P = \frac{V^{۲}}{R} = \frac{(۱۲۰)^{۲}}{۱۴} = ۱\times ۱۰^{۳}\ W = ۱kW$

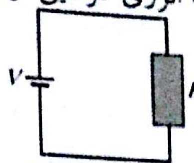
(ب) هزینه $= (۱\ kW)(۵h)(۵cents/kW\cdot h)$

$= ۲۵cents = ۰/۲۵\$$

●۴۰- در شکل ۲۲-۳۲، باتری با اختلاف پتانسیل $V = ۱۲\ V$ به نواری با مقاومت $R = ۶/۰\Omega$ متصل شده است. وقتی الکترونی از یک سر نوار به سر دیگر آن حرکت کند، (الف) در چه جهتی در شکل الکترونها حرکت می‌کنند، (ب) توسط میدان الکتریکی

Scanned by CamScanner

داخل نوار چقدر کار روی الکترون انجام می‌گیرد و (پ) توسط الکترون چقدر انرژی به انرژی گرمایی نوار تبدیل می‌شود؟



شکل ۲۲-۳۲ مسئلهٔ ۴۰

حل: (الف) جهت چگالی جریان روبه‌پایین رشته مقاومت است زیرا جهت میدان الکتریکی نیز روبه‌پایین است $(\vec{E} = \rho \vec{j})$. بنابراین با توجه به اینکه الکترونها دارای بار منفی هستند جهت حرکت آنها روبه‌بالا است.

(ب) کار انجام شده روی یک الکترون برابر است با

$$W = eV = (1/6\times10^{-19})(12) = 1/92\times10^{-18}\ \text{J}$$

(پ) انرژی دریافت شده به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود

$$Q = 1/92\times10^{-18}\ \text{J}$$

●۴۱- مقاومت نامعلومی به پایانه‌های یک باتری ۳/۰۰ ولتی بسته شده است. انرژی با آهنگ ۰/۵۴۰ W در مقاومت تلف می‌شود. سپس همین مقاومت به یک باتری ۱/۵۰ولتی بسته می‌شود. اکنون انرژی با چه آهنگی تلف می‌شود؟ ILW

حل: برای رابطهٔ توان داریم $P = V^2/R$ لذا می‌توان نوشت

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{P_2}{0/54} = \left(\frac{1/5}{3}\right)^2 \Rightarrow P_2 = 0/135\ \text{W}$$

●۴۲- انرژی گرمایی در یک مقاومت با آهنگ ۱۰۰W به هنگام عبور جریان ۳/۰۰A از آن ایجاد می‌شود. مقاومت آن چقدر است؟

حل: $P = Ri^2 \Rightarrow 100 = R(3)^2 \Rightarrow R = 11/1\Omega$

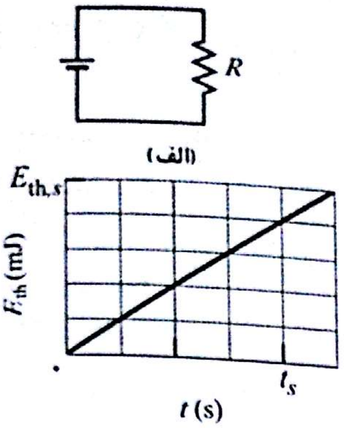
●۴۳- یک بخاری تابشی ۱۲۵۰ واتی برای عمل در ۱۱۵V ساخته شده است. (الف) جریان در بخاری موقع کار چقدر خواهد بود؟ (ب) مقاومت پیچهٔ بخاری چقدر است؟ (پ) چقدر انرژی گرمایی در ۱/۰h توسط بخاری ایجاد می‌شود؟ ILW SSM

حل: (الف) $P = Vi \Rightarrow 1250 = (115)i \Rightarrow i = 10/9\ \text{A}$

(ب) $V = Ri \Rightarrow 115 = R(10/9) \Rightarrow R = 10/6\Omega$

(پ) $W = Pt = (1250)(3600) = 4/5\times10^{6}\ \text{J}$

●۴۴- در شکل ۲۲-۳۳ الف مقاومت ۲۰Ω به باتری وصل شده است. شکل ۲۲-۳۵ ب افزایش انرژی گرمایی E_{th} در مقاومت را برحسب تابعی از زمان t نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $E_{th,s} = 2/50\,\text{mJ}$ و مقیاس محور افقی با $t_s = 4/0\,s$ مشخص شده است. اختلاف پتانسیل دو سر باتری چقدر است؟



شکل ۲۲-۳۳ مسئله ۴۴

حل: شیب منحنی، توان تلف شده را به دست می‌دهد.

$$P = \frac{2/5\times10^{-3}}{5} = 5\times10^{-4}\ \text{W}$$

از آنجا می‌توان نوشت

$$P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow 5\times10^{-4} = \frac{V^2}{20} \Rightarrow V = 0/1\text{V}$$

●۴۵- در یک اجاق داغ برای پخت سوسیس با اعمال یک اختلاف پتانسیل ۱۲۰V به دو سر اجاق و به کمک انرژی گرمایی ایجاد شده در آن، سوسیس می‌پزد. جریان ۱۰/۰A و انرژی لازم برای پختن یک سوسیس ۶۰/۰kJ است. اگر آهنگ انرژی اعمال شده تغییر نکند، چقدر طول می‌کشد تا سه سوسیس به طور همزمان بپزد؟

حل: $W = (3)(60)\times10^{3} = 1/8\times10^{5}\ \text{J}$

$$W = Pt = (Vi)t \Rightarrow 1/8\times10^{5} = (120)(10)t \Rightarrow t = 150\,\text{s}$$

●●۴۶- از هم پاشیدن کفش‌ها. کفش‌های باران جذب کرده شخصی ممکن است براثر عبور جریان از نزدیکی بخار آب حاصل از آذرخش از هم بپاشد.. تبدیل ناگهانی آب به بخار آب موجب می‌شود که انبساط بسیار زیادی رخ دهد و کفشها از هم بپاشند. چگالی آب $1000\,\text{kg/m}^3$ است و به $333\,\text{KJ/kg}$ انرژی برای تبخیر نیاز دارد. اگر جریان افقی ۲/۰۰ms طول بکشد و با آب با مقاومت ویژهٔ $150\,\Omega.\text{m}$ به طول ۱۲/۰cm و مقطع عمودی با مساحت $15\times10^{-5}\ \text{m}^2$ مواجه شود، میانگین جریان لازم برای تبخیر آب چقدر است؟

حل: $V = Ad = (15\times10^{-5})(0/12) = 1/8\times10^{-5}\ \text{m}^3$

$$m = \rho V = (1000)(1/8\times10^{-5}) = 1/8\times10^{-2}\ \text{kg}$$

$$Q = mL_V = (1/8\times10^{-2})(333\times10^{3}) = 5994\,\text{J}$$

$$R = \rho\frac{d}{A} = (150)\frac{(0/12)}{15\times10^{-5}} = 1/2\times10^{5}\ \Omega$$

$$Q = Ri^2t \Rightarrow 5994 = (1/2\times10^{5})i^2(2\times10^{-3})$$

$$\Rightarrow i = 5\text{A}$$

Scanned by CamScanner

●●۴۷- اختلاف پتانسیل ۱۲۰ V به یک بخاری برقی که در ضمن کار ۵۰۰ W مصرف می‌کند اعمال می‌شود. (الف) مقاومت بخاری در موقع کار کردن چقدر است؟ (ب) با چه آهنگی الکترونها از هر مقطعی از عنصر گرم کننده می‌گذرند؟

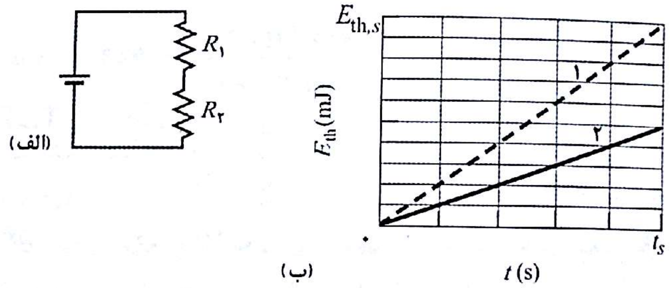
حل: (الف) $P=\frac{V^2}{R} \Rightarrow 500=\frac{(120)^2}{R} \Rightarrow R=28.8\,\Omega$

(ب) $V=Ri \Rightarrow 120=(28.8)i \Rightarrow i=4.17\,A$

و در هر ثانیه مقدار الکترون از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$q=(1)t=ne \Rightarrow 4.17=n(1.6\times10^{-19}) \Rightarrow n=2.6\times10^{19}$

●●۴۸- جریانی که از باتری و مقاومت‌های ۱ و ۲ در شکل ۲۲-۳۴ الف می‌گذرد برابر با ۲/۰۰ A است. انرژی از جریان به صورت انرژی گرمایی E_{th} در دو مقاومت تبدیل می‌شود. منحنی‌های ۱ و ۲ در شکل ۲۲-۳۴ ب انرژی گرمایی E_{th} را به ترتیب برای مقاومتهای ۱ و ۲ برحسب تابعی از زمان t نشان می‌دهند. مقیاس محور قائم با $E_{th,s}=40.0\,mJ$ و مقیاس محور افقی با $t_s=5.00\,s$ مشخص شده است. توان باتری چقدر است؟



شکل ۲۲-۳۴ مسئلهٔ ۴۸

حل: شیب منحنی‌های ۱ و ۲ به ترتیب توان $P_1=8\,mW$ و $P_2=4\,mW$ را به دست می‌دهند. لذا با توجه به پایستگی انرژی، جمع آنها توان باتری را به دست می‌دهد.

$P_{باتری}=P_1+P_2=12\,mW$

●●۴۹- یک عنصر گرم کننده با قراردادن اختلاف پتانسیل ۷۵/۰ V در دو سر طولی از یک سیم نیکرومی با مقطع $2.60\times10^{-6}\,m^2$ ایجاد شده است. مقاومت ویژهٔ نیکروم برابر با $5.00\times10^{-7}\,\Omega.m$ است. (الف) اگر توان تلف شده در این عنصر ۵۰۰۰ W باشد، طول آن چقدر است؟ (ب) اگر ۱۰۰ V برای به دست آوردن همان آهنگ توان تلف شده به کار رود، طول آن باید چقدر باشد؟

حل: (الف) با توجه به دو رابطه $P=V^2/R$ و $R=\rho L/A$ می‌توان طول L را به دست آورد.

$$L=\frac{AV^2}{\rho P}=\frac{(2.6\times10^{-6})(75)^2}{(5\times10^{-7})(500)}=5.85\,m$$

(ب) با روش مشابه می‌توان نوشت

$$L'=\frac{AV'^2}{\rho P}$$

در نتیجه

$$\frac{L'}{L}=\frac{V'^2}{V^2} \Rightarrow \frac{L'}{5.85}=\frac{(100)^2}{(75)^2} \Rightarrow L'=10.4\,m$$

●●۵۰- بزرگی چگالی جریان در یک سیم دایره‌ای معین $J=(2.75\times10^{10}\,A/m^4)r^2$ است، که در آن r فاصلهٔ شعاعی رو به بیرون سیم به شعاع ۳/۰۰ mm است. پتانسیل اعمال شده بر سیم (در دو سر) ۶۰/۰ V است. در مدت ۱/۰۰ h چقدر انرژی به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود؟

حل: $i=\int jdA=\int_0^{0.003}(2.75\times10^{10})r^2(2\pi r\,dr)=3.5\,A$

$W=Vit=(60)(3.5)(3600)=7.56\times10^5\,J$

●●۵۱- یک لامپ روشنایی ۱۰۰ W به برق استاندارد ۱۲۰ V وصل شده است. (الف) در مدت ۳۱ روز یک ماه در صورت روشن ماندن پیوستهٔ لامپ چقدر هزینهٔ آن می‌شود؟ فرض کنید یک کیلو وات ساعت انرژی الکتریکی ۰/۰۶ دلار قیمت دارد. (ب) مقاومت لامپ چقدر است؟ (پ) جریان لامپ چقدر است؟

حل: (الف) $W=Pt=(0.1)(31)(24)=74.4\,kW\cdot h$

$هزینه=(0.06)(74.4)=4.47\,\$$

(ب) $P=\frac{V^2}{R}\Rightarrow 100=\frac{(120)^2}{R}\Rightarrow R=144\,\Omega$

(پ) $V=Ri\Rightarrow 120=(144)i\Rightarrow i=0.83\,A$

●●۵۲- جریان ۲/۰۰A به طور یکنواخت در مساحت مقطع یک سیم مسی با سطح مقطع $2.00\times10^{-6}\,m^2$ و طول ۴/۰۰m توزیع شده است. (الف) بزرگی میدان الکتریکی و طول سیم چقدر است؟ (ب) در مدت ۳۰min چقدر انرژی الکتریکی به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود؟ SSM

حل: (الف)

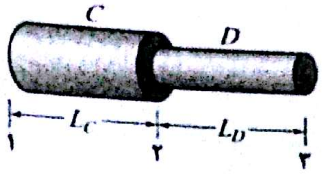
$$E=\rho j=\rho\frac{i}{A}=(1.69\times10^{-8})\frac{2}{2\times10^{-6}}=1.69\times10^{-2}\,V/m$$

(ب) $R=\rho\frac{L}{A}=(1.69\times10^{-8})\frac{4}{2\times10^{-6}}=3.38\times10^{-2}\,\Omega$

$W=Ri^2t=(3.38\times10^{-2})(2)^2(30)(60)=243.4\,J$

●●۵۳- سیم C و سیم D از مواد مختلف ساخته شده‌اند و طول آنها $L_C=L_D=1.0\,m$ است. مقاومت ویژه و قطر سیم C، $2.0\times10^{-6}\,\Omega.m$ و ۱/۰۰mm و برای سیم D، $1.0\times10^{-6}\,\Omega.m$ و ۰/۵۰mm است. این سیمها مانند شکل ۲۲-۳۵ به هم وصل شده‌اند و جریان ۲/۰A از آنها می‌گذرد. اختلاف پتانسیل الکتریکی بین (الف) نقطه‌های ۱ و ۲ و (ب) نقطه‌های ۲ و ۳ چقدر است؟ (پ) آهنگ اتلاف انرژی بین نقطه‌های ۱ و ۲ و (ت) نقطه‌های ۲ و ۳ چقدر است؟

Scanned by CamScanner



شکل ۲۲-۳۵ مسئله ۵۳

حل: (الف) مقاومت سیم C برابر است با

$$R_C=\rho_C\frac{L_C}{\pi r_C^۲}=(۲\times۱۰^{-۶})\frac{۱}{\pi(۰/۵\times۱۰^{-۳})^۲}=۲/۵۵\,\Omega$$

در نتیجه داریم:

$$|V_۱-V_۲|=V_C=R_Ci=(۲/۵۵)(۲)=۵/۰۹\,V$$

(ب) برای سیم D نیز داریم:

$$R_D=\rho_D\frac{L_D}{\pi r_D^۲}=(۱\times۱۰^{-۶})\frac{۱}{\pi(۰/۲۵\times۱۰^{-۳})^۲}=۵/۰۹\,\Omega$$

$$|V_۲-V_۳|=V_D=R_Di=(۵/۰۹)(۲)=۱۰/۱۸\,V$$

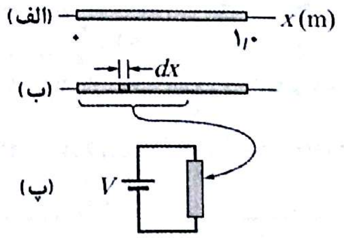
(پ) آهنگ اتلاف انرژی در سیم C برابر است با

$$P_C=R_Ci^۲=(۲/۵۵)(۲)^۲=۱۰/۱۸\,W$$

(ت) و آهنگ اتلاف انرژی در سیم D برابر است با

$$P_D=R_Di^۲=(۵/۰۹)(۲)^۲=۲۰/۳۷\,W$$

●●●۵۴- شکل ۲۲-۳۶ الف میلهٔ مقاومت داری را نشان می‌دهد. مقاومت بریکای طول میله در جهت مثبت محور x افزایش می‌یابد. در هر نقطهٔ x در طول میله، مقاومت dR قسمت باریکی (دیفرانسیلی) با پهنای dx با $dR=۵/۰۰x\,dx$ داده می‌شود که dR برحسب اهم و x برحسب متر است. شکل ۲۲-۳۶ ب این قسمت باریک را نشان می‌دهد. طولی از میله از $x=۰$ تا $x=L$ را می‌بریم و این طول را به یک باتری با اختلاف پتانسیل $V=۵/۰V$ وصل می‌کنیم (شکل ۲۲-۳۱ پ). اگر جریان را در طولی از میله خواسته باشیم که انرژی را با آهنگ ۲۰۰W به انرژی گرمایی تبدیل کند، در چه نقطه‌ای از $x=L$ باید میله را ببریم؟



شکل ۲۲-۳۶ مسئله ۵۴

حل: ابتدا مقاومت میله را به دست می‌آوریم.

$$P=\frac{V^۲}{R}\Rightarrow ۲۰۰=\frac{۲۵}{R}\Rightarrow R=۰/۱۲۵\,\Omega$$

$$R=\int dR=\int_۰^L ۵x\,dx\Rightarrow ۰/۱۲۵=\frac{۵}{۲}x^۲\Big|_۰^L\Rightarrow L=۰/۲۳$$

مسئله‌های اضافی

۵۵- باریکهٔ یکنواختی از ذره‌های آلفا ($q=+۲e$) که با انرژی جنبشی ثابت ۲۰MeV حرکت می‌کند حامل جریان $۰/۲۵\mu A$ است. (الف) اگر باریکه در راستای عمود بر یک سطح صاف باشد، در مدت ۳/۰s چند ذرهٔ آلفا به این سطح برخورد می‌کند؟ (ب) در یک طول ۲۰cm از باریکه، در هر لحظه چند ذرهٔ آلفا وجود دارد؟ (پ) چه اختلاف پتانسیلی لازم است تا هر ذرهٔ آلفا را از حالت سکون شتاب دهد تا به انرژی ۲۰MeV برسد؟

حل: (الف) در مدت زمان Δt مقدار بار $\Delta q=i\Delta t$ با سطح برخورد می‌کند و هر ذره دارای بار $+۲e$ است تعداد ذراتی که به سطح برخورد می‌کنند از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$N=\frac{\Delta q}{۲e}=\frac{i\Delta t}{۲e}=\frac{(۰/۲۵\times۱۰^{-۶})(۳)}{(۲)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}=۲/۳۴\times۱۰^{۱۲}$$ عدد

(ب)

$$k=\frac{۱}{۲}m\bar{v}^۲\Rightarrow(۲۰)(۱۰^۶)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})=\left(\frac{۱}{۲}\right)(۴\times۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷})\bar{v}^۲\Rightarrow\bar{v}=۳/۱\times۱۰^۷\ m/s$$

$$j=\frac{i}{A}=nev_d\Rightarrow n=\frac{i}{Ae\bar{v}}$$

طول باریکه $L=۰/۲cm$ باشد، تعداد کل در حجم AL برابر است با

$$N=nAL=\frac{iL}{۲e\bar{v}}=\frac{(۰/۲۵\times۱۰^{-۶})(۰/۲)}{۲(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۳/۱\times۱۰^۷)}=۵۰۴۰$$ عدد

(پ) طبق پایستگی انرژی داریم:

$$k=eV\Rightarrow ۲۰\times۱۰^۶\,e=eV\Rightarrow V=۱\times۱۰^۷\ V$$

۵۶- رمز خرده شکلات. این داستان با مسئله ۵۶ در فصل ۱۹ شروع شد و در فصلهای ۲۰ و ۲۱ ادامه پیدا کرده است. گرد ریز شکلات از طریق لوله‌ای به شعاع R با تندی یکنواخت v و چگالی بار یکنواخت ρ وارد مخزن می‌شود. (الف) رابطه‌ای برای جریان i (آهنگی که بار روی گرد حرکت می‌کند) که عمود بر مقطع لوله می‌گذرد پیدا کنید. (ب) i را برای شرایط کارخانه محاسبه کنید: شعاع لوله $R=۵/۰cm$ ، تندی $v=۲/۰m/s$ و چگالی بار $\rho=۱/۱\times۱۰^{-۳}\ C/m^۳$.

اگر گرد بر اثر تغییر پتانسیل الکتریکی به اندازهٔ V حرکت می‌کرد، انرژی آن با آهنگ $P=iV$ به جرقه تبدیل می‌شد. (پ) آیا چنین تبدیلی در داخل لوله به واسطهٔ اختلاف پتانسیل شعاعی بحث شده در مسئلهٔ ۶۰ فصل ۲۰ صورت می‌گیرد؟

وقتی گرد از لوله به داخل مخزن جریان می‌یابد، پتانسیل الکتریکی گرد تغییر می‌کند. بزرگی این تغییر دست کم برابر با اختلاف پتانسیل شعاعی در لوله است (همان‌طور که در مسئلهٔ ۶۴ فصل ۲۰ محاسبه شد.) (ت) با فرض این مقدار برای اختلاف پتانسیل و با استفاده از جریان محاسبه شده در (ب)، آهنگ انرژی تبدیل شده از گرد به جرقه را وقتی که گرد لوله را تحریک می‌کند، پیدا کنید. (ث) اگر جرقه در خروجی گرد به مدت ۰/۲s رخ می‌دهد (مقدار مورد انتظار معقول)، چقدر انرژی به جرقه تبدیل می‌شود؟

Scanned by CamScanner

از مسئلهٔ ۵۶ فصل ۱۹ کمینهٔ انرژی تبدیل شده جهت ایجاد انفجار را ۱۵۰ mJ در نظر بگیرید. (ج) محتمل‌ترین محل انفجار گرد در کجاست: در گرد داخل پاتیل در حال تخلیه (مسئله ۵۰ فصل ۲۱)، در داخل لوله، یا در خروجی لولهٔ درون مخزن؟

حل: (الف) استوانه‌ایی با سطح مقطع A و طول dx درنظر می‌گیریم، داریم:

$$dq = \rho A\, dx$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \rho A \frac{dx}{dt} = \rho \pi R^۲ v$$

(ب) با قرار دادن مقادیر عدد در نتیجه قسمت (الف) جریان i به دست می‌آید.

$$i = (۱/۱\times۱۰^{-۳})(۳/۱۴)(۵\times۱۰^{-۲})^۲(۲) = ۱/۷۳\times۱۰^{-۵}\ \text{A}$$

(پ) این جریان بر اثر عبور گرد در طول لوله است و در عرض حرکتی ندارند.

(ت) $P = Vi = (۷/۸\times۱۰^۴)(۱/۷۳\times۱۰^{-۵}) = ۱/۳۵\ \text{W}$

(ث) $W = Pt = (۱/۳۵)(۰/۲) = ۰/۲۷\text{J}$

(ج) انرژی بالا بیشتر از انرژی لازم برای انفجار است پس هنگام خروج، احتمال انفجار وجود دارد.

۵۷- یک بخاری ۵۰۰ W طوری طراحی شده است که با اختلاف پتانسیل اعمالی ۱۱۵ V کار کند. (الف) اگر اختلاف پتانسیل اعمال شده به ۱۱۰ V برسد، خروجی گرما چند درصد کاهش می‌یابد؟ فرض کنید مقاومت تغییر نمی‌کند. (ب) اگر تغییر مقاومت با دما را در نظر بگیرید، آیا کاهش در خروجی گرما بیشتر از مقدار محاسبه شده در (الف) می‌شود یا کمتر؟

حل: (الف)

$$P = \frac{V^۲}{R} \quad , \quad P' = \frac{V'^۲}{R}$$

$$\frac{P'}{p} = \left(\frac{V'}{V}\right)^۲ \Rightarrow \frac{P'}{۵۰۰} = \left(\frac{۱۱۰}{۱۱۵}\right)^۲ \Rightarrow P' = ۴۵۷/۵\ \text{W}$$

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{۴۵۷/۵ - ۵۰۰}{۵۰۰} = -۰/۰۸۵ \quad \text{یا} \quad ٪۸/۵$$

(ب) با افت ولتاژ جریان کاهش می‌یابد و با کاهش جریان، دما و مقدار مقاومت نیز کاهش می‌یابد لذا توان مصرفی نسبت به حالت قبل بیشتر می‌گردد، یعنی ΔP کاهش می‌یابد.

۵۸- اختلاف پتانسیل ۱/۲۰ V به طول ۳۳/۰ m از سیم مسی شماره ۱۸ (به قطر ۰/۰۴۰۰ in) اعمال می‌شود. مطلوب است (الف) جریان، (ب) بزرگی چگالی جریان، (پ) بزرگی میدان الکتریکی داخل سیم و (ت) آهنگ انرژی گرمایی که در سیم ظاهر می‌شود.

حل: (الف)

$$r = ۰/۰۲\,\text{in} = ۵/۰۸\times۱۰^{-۴}\ \text{m}$$

$$A = \pi r^۲ = (۳/۱۴)(۵/۰۸\times۱۰^{-۴}) = ۸/۱\times۱۰^{-۷}\ \text{m}^۲$$

$$R = \rho\frac{L}{A} = (۱/۶\times۱۰^{-۸})\frac{۳۳}{۸/۱\times۱۰^{-۷}} = ۰/۶۹\Omega$$

$$V = Ri \Rightarrow ۱/۲ = (۰/۶۹)i \Rightarrow i = ۱/۷۴\ \text{A}$$

(ب) $j = \frac{i}{A} = \frac{۱/۷۴}{۸/۱\times۱۰^{-۷}} = ۲/۱۵\times۱۰^۶\ \text{A/m}^۲$

(پ) $E = \frac{V}{L} = \frac{۱/۲}{۳۳} = ۳/۶۴\times۱۰^{-۲}\ \text{V/m}$

(ت) $P = Vi = (۱/۲)(۱/۷۴) = ۲/۱\text{W}$

۵۹- یک گرمکن نیکرومی به هنگام اعمال اختلاف پتانسیل ۱۱۰ V و وقتی دمای سیم ۸۰۰°C است ۵۰۰ W تلف می‌کند. اگر با فرو بردن سیم در یک حمام روغن سرد کننده دمای آن در ۲۰۰°C نگهداشته شود، آهنگ اتلاف چقدر می‌شود؟ اختلاف پتانسیل اعمال شده یکسان و α برای نیکروم در ۸۰۰°C برابر با $۴/۰\times۱۰^{-۴}\ \text{K}^{-۱}$ است.

حل: با توجه به رابطه $P = \frac{V^۲}{R}$ و ثابت بودن V، داریم

$$\frac{P_۲}{P_۱} = \frac{R_۱}{R_۲} \Rightarrow \frac{P_۲}{۵۰۰} = \frac{R_۱}{R_۱(۱+\alpha\Delta T)}$$

$$P_۲ = \frac{۵۰۰}{۱+(۴\times۱۰^{-۴})(۲۰۰-۸۰۰)} = ۶۵۷/۹\ \text{W}$$

۶۰- طول یک میلهٔ آلومینیومی با مقطع مربعی ۱/۳ m و طول ضلع آن ۵/۲ mm است. (الف) مقاومت دو سر آن چقدر است؟ (ب) اگر مقاومت یک میلهٔ استوانه‌ای مسی به طول ۱/۳ m یکسان با میلهٔ آلومینیومی باشد، قطر آن باید چقدر باشد؟

حل: (الف)

$$R = \rho\frac{L}{A} = (۲/۷۵\times۱۰^{-۸})\frac{۱/۳}{(۵/۲\times۱۰^{-۳})^۲} = ۱/۳۲\times۱۰^{-۳}\ \Omega$$

(ب)

$$R' = \rho'\frac{L'}{A'} \Rightarrow ۱/۳۲\times۱۰^{-۳} = (۱/۶۹\times۱۰^{-۸})\frac{۱/۳}{A'} \Rightarrow$$

$$A' = ۱/۶۶\times۱۰^{-۵}\ \text{m}^۲$$

$$A' = \pi\frac{D^۲}{۴} \Rightarrow ۱/۶۶\times۱۰^{-۵} = (۳/۱۴)\frac{D^۲}{۴}$$

$$\Rightarrow D = ۴/۶\times۱۰^{-۳}\ \text{m}$$

۶۱- طول یک میلهٔ استوانه‌ای فلزی ۱/۶۰ m و قطر آن ۵/۵۰ mm است. مقاومت بین دو سر آن (در ۲۰°C) $۱/۰۹\times۱۰^{-۳}\ \Omega$ است. (الف) مادهٔ میله چیست؟ (ب) قرص گردی به قطر ۲/۰۰ cm و ضخامت ۱/۰۰ mm از همان ماده ساخته شده است. با فرض اینکه هر صفحه یک سطح هم پتانسیل است، مقاومت بین صفحه‌های گرد چقدر است؟

حل: (الف)

$$R = \rho\frac{L}{A} \Rightarrow ۱/۰۹\times۱۰^{-۳} = \rho = \frac{۱/۶}{\pi(۲/۷۵\times۱۰^{-۳})^۲} \Rightarrow$$

$$\rho = ۱/۶۲\times۱۰^{-۸}\ \Omega\text{m}$$

جنس میله، نقره است.

(ب)

$$R = \rho\frac{L}{A} = (۱/۶۲\times۱۰^{-۸})\frac{۱\times۱۰^{-۳}}{\pi(۰/۰۱)^۲} = ۵/۱۶\times۱۰^{-۸}\ \Omega$$

Scanned by CamScanner

۶۲- یک مقاومت استوانه‌ای به شعاع ۵/۰mm و طول ۲/۰cm از ماده‌ای با مقاومت ویژهٔ $۳/۵\times۱۰^{-۵}\,\Omega.m$ ساخته شده است. وقتی آهنگ اتلاف انرژی در مقاومت ۱/۰W باشد، (الف) بزرگی چگالی جریان و (ب) اختلاف پتانسیل چقدر است؟

حل: (الف)

$$R=\rho\frac{L}{A}=(۳/۵\times۱۰^{-۵})\frac{۰/۰۲}{\pi(۵\times۱۰^{-۳})^{۲}}=۸/۹۲\times۱۰^{-۳}\,\Omega$$

$$P=Ri^{۲}\Rightarrow ۱=(۸/۹۲\times۱۰^{-۳})i^{۲}\Rightarrow i=۱۰/۶A$$

$$j=\frac{i}{A}=\frac{۱۰/۶}{\pi(۵\times۱۰^{-۳})^{۲}}=۱/۳۵\times۱۰^{۵}\,A/m^{۲}$$

(ب)

$$V=Ri=(۸/۹۲\times۱۰^{-۳})(۱/۰۶)=۹/۴۶\times۱۰^{-۲}\,V$$

۶۳- اختلاف پتانسیل V بر سیمی با مساحت مقطع A، طول L و مقاومت ویژهٔ ρ اعمال شده است. اگر بخواهید اختلاف پتانسیل اعمال شده را تغییر دهید و سیم را بکشید به طوری که آهنگ اتلاف انرژی ۳۰/۰ برابر و جریان ۴/۰۰ برابر شود، با فرض اینکه چگالی سیم تغییر نکند، (الف) نسبت طول جدید به L و (ب) نسبت مساحت مقطع جدید به A چقدر است؟

حل: (الف) و (ب)

$$\frac{P_۲}{P_۱}=\frac{R_۲i_۲^{۲}}{R_۱i_۱^{۲}}\Rightarrow ۳۰=\frac{R_۲}{R_۱}(۱۶)\Rightarrow\frac{R_۲}{R_۱}=\frac{۱۵}{۸}$$

حجم پس از کشیدن سیم تغییر نمی‌کند لذا داریم

$$A_۱L_۱=A_۲L_۲\Rightarrow\frac{A_۱}{A_۲}=\frac{L_۲}{L_۱}$$

$$\frac{R_۲}{R_۱}=\frac{L_۲A_۱}{L_۱A_۲}=\left(\frac{L_۲}{L_۱}\right)^{۲}\Rightarrow\frac{۱۵}{۸}=\left(\frac{L_۲}{L_۱}\right)^{۲}\Rightarrow\frac{L_۲}{L_۱}=۱/۳۷$$

$$\frac{A_۲}{A_۱}=\frac{۱}{۱/۳۷}=۰/۷۳$$

۶۴- چراغهای یک ماشین در حال حرکت نیازمند تقریباً ۱۰A از یک مولد ۱۲ ولتی است که توسط موتور تأمین می‌شود. فرض کنید کارایی مولد ۸۰ ٪ است (توان الکتریکی خروجی آن ۸۰ ٪ توان مکانیکی ورودی آن است). مقدار اسب بخار موتور را که باید برای کار چراغها اعمال شود محاسبه کنید.

حل: توان مورد نیاز برحسب اسب بخار برابر است با

$$P=\frac{V_i}{۰/۸}=\frac{(۱۲)(۱۰)}{(۰/۸)(۷۴۶)}=۰/۲hp$$

۶۵- ولتاژ دو سر وسیله‌ای با ۱۸/۰W برابر با ۹/۰۰V است. در مدت ۴/۰۰h چقدر بار از وسیله می‌گذرد؟

حل:

$$i=\frac{P}{V}=\frac{۱۸}{۹}=۲A$$

$$\Delta q=i\Delta t==(۲)(۴)(۳۶۰۰)=۲/۸۸\times۱۰^{۴}\,C$$

۶۶- اختلاف پتانسیل ۱۲V بر یک سیم مسی (دایره‌ای) به طول ۴۵m و شعاع ۲/۰mm اعمال می‌شود. چه مقدار انرژی گرمایی به وسیلهٔ جریان در مدت ۴۰s تولید می‌شود؟

حل:

$$R=\rho\frac{L}{A}=(۱/۶۹\times۱۰^{-۸})\frac{۴۵}{\pi(۲\times۱۰^{-۳})^{۲}}=۶/۰۴\times۱۰^{-۲}\,\Omega$$

$$W=Pt=\frac{V^{۲}}{R}t=\frac{(۱۲)^{۲}}{۶/۰۴\times۱۰^{-۲}}(۴۰)=۹/۵۴\times۱۰^{۴}\,J$$

۶۷- چقدر انرژی در مدت ۲/۰۰h توسط یک مقاومت الکتریکی ۴۰۰Ω به هنگام اعمال پتانسیل ۹۰/۰V مصرف می‌شود؟

حل:

$$W=Pt=\frac{V^{۲}}{R}t=\frac{(۹۰)^{۲}}{۴۰۰}(۲)(۳۶۰۰)=۱/۴۶\times۱۰^{۵}\,J$$

۶۸- مقاومتی با اختلاف پتانسیل ۲۰۰V در دو سر آن انرژی الکتریکی را با آهنگ ۳۰۰۰W به انرژی گرمایی تبدیل می‌کند. مقاومت آن چقدر است؟

حل:

$$P=\frac{V^{۲}}{R}\Rightarrow ۳۰۰۰=\frac{(۲۰۰)^{۲}}{R}\Rightarrow R=۱/۳۳\Omega$$

۶۹- پیچه‌ای از سیم نیکروم در مایعی غوطه‌ور شده است و جریانی از آن می‌گذرد (نیکروم آلیاژ نیکل- کروم- آهن است که عموماً در عنصرهای گرم کننده استفاده می‌شود.) وقتی اختلاف پتانسیل پیچه ۱۲V و جریانی که از آن می‌گذرد ۵/۲A باشد، مایع با آهنگ پایای ۲۱mg/s تبخیر می‌شود. گرمای تبخیر مایع را محاسبه کنید. (به بخش ۱۴-۸ نگاه کنید.)

حل: توان اتلاف شده برابر است با

$$P=Vi=(۱۲)(۵/۲)=۶۲/۴W$$

گرمایی که مایع می‌گیرد تا به جوش آید را می‌توان از رابطه $Q=mL_v$ به دست آورد و در نتیجه آهنگ آن برابر است با $dQ/dt=L_v dm/dt$ در نتیجه داریم:

$$Vi=L_v\frac{dm}{dt}\Rightarrow ۶۲/۴=L_v(۲۱\times۱۰^{-۶})\Rightarrow L_v=۲/۹۷J/kg$$

۷۰- وقتی یک اختلاف پتانسیل به قدر کافی زیاد به دو الکترود یک لامپ تخلیهٔ گازی اعمال شود، جریانی در آن برقرار می‌شود. گاز یونیده می‌شود؛ الکترونها به طرف پایانهٔ مثبت و یونهای مثبت باردار به طرف پایانهٔ منفی حرکت می‌کنند. (الف) در یک لامپ تخلیهٔ هیدروژن که در آن $۳/۱\times۱۰^{۱۸}$ الکترون و $۱/۱\times۱۰^{۱۸}$ پروتون در هر ثانیه از مساحت مقطع هر بخش لوله می‌گذرند، جریان چقدر است؟ (ب) جهت چگالی جریان $\vec{J}$ به طرف پایانه منفی است یا از آن دور می‌شود؟

حل: تعداد ذرات در هر ثانیه از سطح مقطع جریان را به دست می‌دهد، لذا می‌توان نوشت:

$$i=i_e+i_p=(n_e+n_p)e$$
$$=(۳/۱\times۱۰^{۱۸}+۱/۱\times۱۰^{۱۸})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})$$
$$=۰/۶۷۲A$$

۷۱- طول عنصر گرمکن ۲/۰kW یک خشک کننده ۸۰cm است. اگر ۱۰cm از آن برداشته شود، در ۱۲۰V چه توانی توسط عنصر کوتاه شده مصرف می‌شود؟

Scanned by CamScanner

حل: ابتدا رابطهٔ بین توان و طول را وقتی پتانسیل ثابت است به دست می‌آوریم، $P=\frac{V^۲}{R}$ و $R=\rho\frac{L}{A}$ لذا داریم $P\propto\frac{۱}{L}$ و طول جدید برابر با ۷۰/۸۰ طول اولیه است لذا توان جدید برابر است با

$$P=\frac{۸}{۷}(۲)=۲/۴\,\text{kW}$$

۷۲- مقاومت سیم پیچهای مسی موتوری در ۲۰°C وقتی که کار نمی‌کند ۳۰Ω است. پس از اینکه موتور چند ساعت کار کند، مقاومت آن به ۵۸Ω می‌رسد. اکنون دمای سیم‌پیچها چقدر است؟ از تغییرات در ابعاد سیم پیچها چشمپوشی کنید. (به جدول ۲۲-۱ نگاه کنید.)

حل:
$$R-R_۰=R_۰\,\alpha\,(T-T_۰)$$
$$۵۸-۵۰=(۵۰)(۴/۳\times۱۰^{-۳})(T-۲۰)\Rightarrow T=۵۷/۲°\text{C}$$

۷۳- یک لامپ پرتو ایکس با جریان ۷/۰۰mA و اختلاف پتانسیل ۸۰/۰kV کار می‌کند. توان آن برحسب وات چقدر است؟

حل:
$$P=Vi=(۸۰\times۱۰^۳)(۷\times۱۰^{-۳})=۵۶۰\,\text{W}$$

۷۴- هزارپایی به طول ۴/۰cm در جهت سوق الکترون در طول یک سیم مسی لخت به قطر ۵/۲mm که حامل جریان یکنواخت ۱۲A است می‌خزد. (الف) اختلاف پتانسیل بین دو سر هزارپا چقدر است؟ (ب) دم آن نسبت به سر آن مثبت است یا منفی؟ (پ) اگر خزیدن آن با تندی سوقی الکترونها انجام گیرد، چقدر طول می‌کشد تا هزارپا ۱/۰cm را طی کند؟ (تعداد حاملهای بار بر یکای حجم $۸/۴۹\times۱۰^{۲۸}\ \text{m}^{-۳}$ است.)

حل: (الف)
$$V=iR=i\rho_{cu}\frac{L}{A}=(۱۲)(۱/۶۹\times۱۰^{-۸})\frac{۴\times۱۰^{-۲}}{\pi(۵/۲\times۱۰^{-۳})^۲}$$
$$=۳/۸\times۱۰^{-۴}\ \text{V}$$

(ب) چون حرکت هزارپا در جهت سوق الکترون است و الکترون به طرف پتانسیل بالاتر می‌رود. سر آن نسبت به دمش در پتانسیل بالاتری قرار دارد.

(پ)
$$j=\frac{i}{A}=nev_d\Rightarrow\frac{۱۲}{\pi(۵/۲\times۱۰^{-۳})^۲}$$
$$=(۸/۴۹\times۱۰^{۲۸})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})v_d$$
$$v_d=۴/۱۷\times۱۰^{-۵}\ \text{m/s}$$
$$L=v_dt\Rightarrow۰/۰۱=(۴/۱۷\times۱۰^{-۵})t\Rightarrow t=۲۳۹\text{s}$$

۷۵- (الف) در چه دمایی مقاومت یک رسانای مسی دو برابر مقاومت آن در ۲۰°C می‌شود؟ (۲۰/۰°C را به عنوان نقطهٔ مرجع در معادلهٔ ۲۲-۱۷ در نظر بگیرید؛ پاسخ خود را با شکل ۲۲-۱۰ مقایسه کنید.) (ب) آیا این «دمای دو برابر» برای همهٔ رساناهای مسی بدون توجه به شکل یا اندازه برقرار است؟

حل:
$$R-R_۰=R_۰\alpha\Delta T=R_۰\alpha(T-T_۰)$$
$$۲R_۰-R_۰=R_۰(۴/۳\times۱۰^{-۳})(T-۲۰)\Rightarrow T=۲۵۲°\text{C}$$

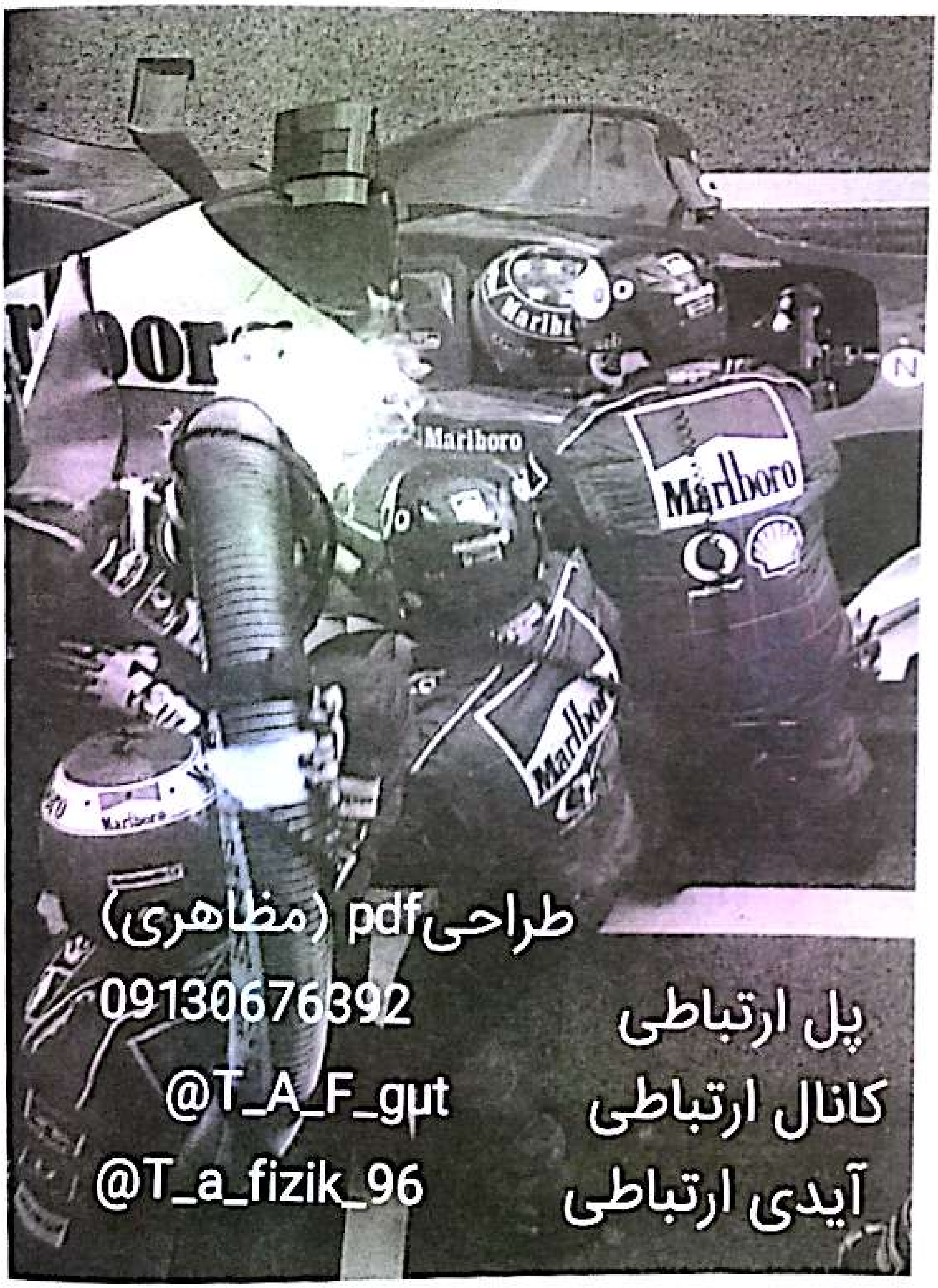
۷۶- مساحت مقطع یک ریل فولادی واگن شهری ۵۶۰ cm² است. مقاومت ۱۰/۰km ریل چقدر است؟ مقاومت ویژهٔ فولاد $۳/۰۰\times۱۰^{-۷}\ \Omega.\text{m}$ است.

حل:
$$R=\rho\frac{L}{A}=(۳\times۱۰^{-۷})\frac{۱۰\times۱۰^۳}{۵۶\times۱۰^{-۳}}=۰/۵۳۶\Omega$$

Scanned by CamScanner

۲۳

مدارها



Scanned by CamScanner

بخش ۲۳-۶ اختلاف پتانسیل میان دو نقطه

●۱- سیمی با مقاومت $5/0\Omega$ به یک باتری با emf برابر با $2/0V$ و مقاومت درونی $1/0\Omega$ وصل شده است. در مدت $2/0min$ ، (الف) چه مقدار انرژی شیمیایی به الکتریکی تبدیل می‌شود؟ (ب) چه مقدار انرژی به صورت انرژی گرمایی در سیم تلف می‌شود و (پ) چه مقدار انرژی به صورت گرما در باتری تلف می‌شود؟

حل: (الف) $W = Pt = \frac{\varepsilon^2}{R+r}t = \frac{(2)^2}{5+1}(120) = 80J$

(ب) $i = \frac{\varepsilon}{R+r} = \frac{2}{5+1} = 0/33A$

اتلاف انرژی در سیم برابر است با

$W_R = Pt = Ri^2t = (5)(0/33)^2(120) = 65/3J$

(پ) تبدیل انرژی به صورت گرمایی در باتری برابر است با

$W_b = W - W_R = 80 - 65/3 = 14/7J$

●۲- بار اولیهٔ یک باتری اتومبیل ۱۲/۰ ولتی ۱۲۰ A.h است. با فرض اینکه پتانسیل دو سر پایانه‌ها تا زمان تخلیهٔ کامل باتری ثابت بماند، باتری چند ساعت انرژی با آهنگ ۱۰۰ W می‌تواند تحویل دهد؟

حل: $P = Vi \Rightarrow 100 = (12)i \Rightarrow i = 8/33A$

$q = it \Rightarrow 120 = (8/33)t \Rightarrow t = 14/4h$

●۳- یک جریان ۵/۰ آمپری به وسیلهٔ یک باتری با قابلیت باردارشدن دوباره با emf برابر با $6/0V$ در مدت 6min در مداری برقرار می‌شود. انرژی شیمیایی باتری چقدر کاهش می‌یابد؟

حل: $W = Pt = \varepsilon it = (6)(5)(6)(60) = 10800J$

●۴- باتری استاندارد لامپ فلاش پیش از آنکه از کار بیفتد تقریباً ۲/۰ W.h انرژی تولید می‌کند. (الف) اگر قیمت باتری ۸ سنت باشد، هزینهٔ روشن کردن یک لامپ ۱۰۰ واتی به مدت ۸/۰h با استفاده از این باتری چقدر است؟ (ب) هزینهٔ توان فراهم شده به وسیلهٔ شرکت خدمات برق به ازای ۶ سنت برای هر کیلووات ساعت چقدر است؟

حل: (الف) $W = Pt = (100)(8) = 800W \cdot h$

تعداد $N = \frac{W}{2} = 400$ عدد باتری مورد نیاز است و با توجه به هزینه هر باتری خواهیم داشت

هزینه کل $= (400)(0/8) = 320\$$

(ب) هزینه توان فراهم شده برحسب کیلو وات ساعت برابر است با

$W' = (100)(8) = 800W \cdot h = 0/8kW \cdot h$

هزینه $= (0/8)(\%6) = \%48\$$

●۵- باتری اتومبیلی با emf برابر با ۱۲V و مقاومت درونی برابر با $0/040\Omega$ با جریان ۵۰A باردار می‌شود. (الف) اختلاف پتانسیل V دو سر پایانه‌ها چقدر است؟ (ب) آهنگ P_r اتلاف انرژی در داخل باتری و (پ) آهنگ P_{emf} تبدیل انرژی به شکل شیمیایی، چقدر است؟ هرگاه این باتری برای استارت اتومبیل با جریان ۵۰A مورد استفاده قرار گیرد، (ث) V و (ج) P_r چقدر است؟ ILW

حل: (الف) $V = \varepsilon + ri = 12 + (\%4)(50) = 14V$

(ب) $P_r = ri^2 = (\%4)(50)^2 = 100W$

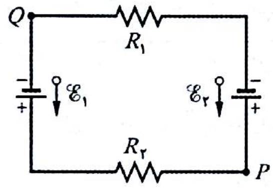
(پ) $P_{emf} = \varepsilon i = (12)(50) = 600W$

(ت) $V = \varepsilon - ri = 12 - (\%4)(50) = 10V$

(ث) $P_r = ri^2 = (\%4)(50)^2 = 100 W$

که همان مقدار قبلی است.

●۶- در شکل ۲۳-۲۵، emf باتریهای آرمانی برابر با $\mathscr{E}_1 = 150V$ و $\mathscr{E}_2 = 50V$ و مقاومت‌ها $R_1 = 3/0\Omega$ و $R_2 = 2/0\Omega$ است. اگر پتانسیل در نقطهٔ P ، ۱۰۰V تعریف شود، پتانسیل در نقطهٔ Q چقدر است؟



شکل ۲۳-۲۵ مسئلهٔ ۶

حل: جریان را در مدار پادساعتگرد می‌گیریم و آن را به دست می‌آوریم.

$-\varepsilon_2 - iR_1 + \varepsilon_1 - iR_2 = 0$

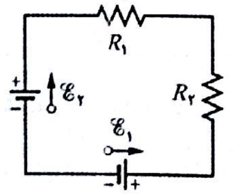
$i = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2} = \frac{150 - 50}{3+2} = 20A$

با مقایسه نیروهای محرکه $(\varepsilon_1 > \varepsilon_2)$ انتظار داشتیم جهت انتخابی درست باشد که پاسخ مثبت i آن را تأیید می‌کند. در جهت جریان از نقطه p به طرف Q می‌رویم.

$V_p - \varepsilon_2 - iR_1 = V_Q$

$V_Q = 100 - 50 - (20)(3) = -10V$

●۷- در شکل ۲۳-۲۶، emf باتریهای آرمانی برابر با $\varepsilon_1 = 12V$ و $\varepsilon_2 = 6/0V$ و مقاومتها برابر $R_1 = 4/0\Omega$ و $R_2 = 8/0\Omega$ است. (الف) جریان، آهنگ اتلاف در (ب) مقاومت ۱ و (پ) مقاومت ۲ و آهنگ تبدیل انرژی در (ت) باتری ۱ و (ث) باتری ۲ چقدر است؟ آیا انرژی توسط (ج) باتری ۱ و (چ) باتری ۲، تولید می‌شود یا گرفته می‌شود؟ SSM WWW



شکل ۲۳-۲۶ مسئلهٔ ۷

Scanned by CamScanner

حل: (الف) جریان در حلقه را پادساعتگرد فرض می‌کنیم (انتظار داریم صحیح باشد چون $\varepsilon_۱ > \varepsilon_۲$ است) و قانون حلقه را می‌نویسیم، داریم:

$$\varepsilon_۱ - iR_۲ - iR_۱ - \varepsilon_۲ = ۰$$

$$i = \frac{\varepsilon_۱ - \varepsilon_۲}{R_۱ + R_۲} = \frac{۱۲-۶}{۴+۸} = ۰/۵A$$

علامت مثبت نشان‌دهنده این است که جهت جریان را درست انتخاب کرده‌ایم.

(ب) توان اتلاف شده در $R_۱$ برابر است با

$$P_۱ = R_۱ i^۲ = (۴)(۰/۵)^۲ = ۱W$$

(پ) توان تلف شده در $R_۲$ برابر است با

$$P_۲ = R_۲ i^۲ = (۸)(۰/۵)^۲ = ۲W$$

(ت) انرژی با آهنگ $P_۱ = \varepsilon_۱ i$ توسط باتری ۱ تهیه می‌شود.

$$P_۱ = (۱۲)(۰/۵) = ۶W$$

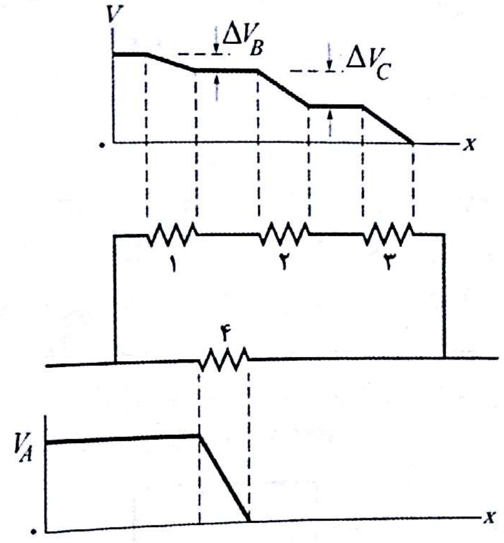
$$P_۲ = \varepsilon_۲ i = (۶)(۰/۵) = ۳W$$

(ث)

(ج) جهت جریان در باتری ۱، همسو با emf است لذا این باتری برای مدار انرژی تهیه می‌کند و تخلیه می‌شود.

(چ) جهت جریان در باتری ۲، در خلاف جهت emf است لذا این باتری انرژی را جذب می‌کند و باردار می‌شود.

●۸- شکل ۲۳-۲۷ مداری شامل چهار مقاومت را نشان می‌دهد که به مدار بزرگتری وصل شده است. نمودار زیر مدار پتانسیل الکتریکی $V(x)$ را بر حسب تابعی از مکان x در طول شاخهٔ پایینی مدار از طریق مقاومت ۴ نشان می‌دهد. نمودار بالای مدار پتانسیل الکتریکی $V(x)$ را برحسب مکان x در طول شاخه بالایی مدار از طریق مقاومتهای ۱، ۲ و ۳ به دست می‌دهد. اختلاف پتانسیلها عبارت‌اند از $\Delta V_B = ۲/۰۰V$ و $\Delta V_C = ۵/۰۰V$. مقاومت ۳ برابر با ۲۰۰Ω است. مقاومت (الف) ۱ و (ب) ۲، چقدر است؟



شکل ۲۳-۲۷ مسئلهٔ ۸

حل: (الف) و (ب) جریان در شاخه بالا را در نظر می‌گیریم.

$$i_۱ = i_۲ = i_۳$$

$$\Delta V_۱ = R_۱ i_۱ = ۲V \qquad \Delta V_۲ = R_۲ i_۲ = ۵V$$

$$\Delta V_۳ = ۱۲ - (۲+۵) = ۵V$$

$$\Delta V_۳ = R_۳ i_۳ = ۵V \Rightarrow i_۳ = \frac{۵}{۲۰۰} = ۲/۵\times۱۰^{-۲}A$$

$$R_۱ = \frac{۲}{(۲/۵\times۱۰^{-۲})} = ۸۰\Omega \qquad R_۲ = \frac{۵}{(۲/۵\times۱۰^{-۲})} = ۲۰۰\Omega$$

●۹- مقاومت کل ۳/۰۰ اهمی از اتصال یک مقاومت نامعلوم به مقاومت ۱۲/۰ اهمی به دست آمده است. (الف) مقاومت نامعلوم باید چقدر باشد و (ب) آیا اتصال باید متوالی باشد یا موازی؟

حل: (الف) و (ب) با توجه به اینکه مقاومت کل کاهش یافته پس باید دو مقاومت به صورت موازی بسته شده باشند.

$$R = \frac{R_۱R_۲}{R_۱+R_۲} \Rightarrow ۳ = \frac{۱۲R_۱}{R_۱+۱۲} \Rightarrow R_۱ = ۴\Omega$$

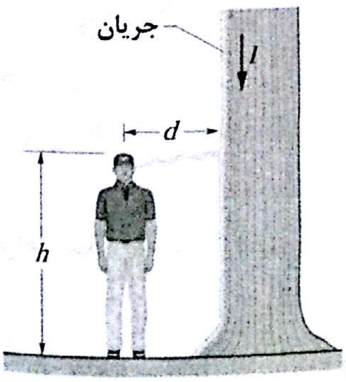
●۱۰- (الف) چقدر کار برحسب الکترون ولت باید انجام گیرد تا باتری آرمانی با emf برابر با ۱۲/۰V الکترونی را از پایانهٔ مثبت باتری به پایانهٔ منفی آن از طریق باتری انتقال دهد؟ (ب) اگر در هر ثانیه $۳/۴۰\times۱۰^{۱۸}$ الکترون عبور کند، توان باتری برحسب وات چقدر است؟

حل: (الف)

$$W = eV = (۱)(۱۲) = ۱۲eV$$

$$P = \frac{nW}{t} = \frac{(۳/۱۴\times۱۰^{۱۸})(۱۲\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{(۱)} = ۶/۵۳W$$

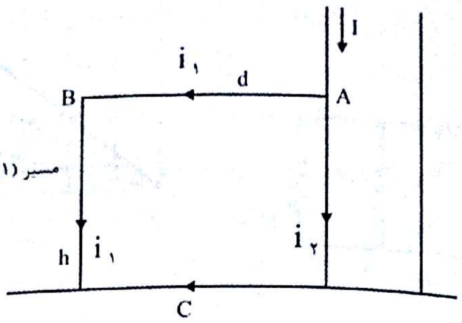
●●۱۱- ناحیهٔ ایمن از رعد و برق. شکل ۲۳-۲۸ بیانگر این است که چرا موقع آذرخش نباید زیر درخت ایستاد. اگر آذرخش از کنارهٔ درخت پایین بیاید قسمتی از آن ممکن است وقتی به قسمت خشکی در پوستهٔ درخت برسد جهش کند و از طریق بدن شخص به داخل زمین برود. در شکل قسمتی از آذرخش فاصلهٔ d را در هوا جهش کرده و سپس از بدن شخص گذشته است (که مقاومت آن نسبت به هوا قابل چشمپوشی است). بقیهٔ جریان فاصلهٔ h را از طریق هوای مجاور درخت به زمین رفته است. اگر $d/h = ۰/۴۰۰$ و جریان کل $I = ۵۰۰۰A$ باشد، جریانی که از بدن شخص می‌گذرد چقدر است؟



شکل ۲۳-۲۸ مسئلهٔ ۱۱

Scanned by CamScanner

حل:



در نقطهٔ A جریان از دو مسیر به زمین می‌رود یکی از طریق هوای مجاور درخت (مسیر ۲) جریان در این مسیر $i_۲$ است و جریان $i_۱$ از مسیر ۱ یعنی هوا و بدن شخصی که مقاومت ناچیزی دارد.

$$V_{AC}=R_۱ i_۱ = R_۲ i_۲$$

$$\frac{i_۱}{i_۲}=\frac{R_۲}{R_۱}$$

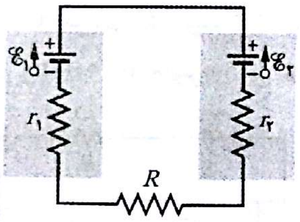
نسبت مقاومت‌ها به نسبت طول مسیر در هوا می‌باشد.

$$\frac{i_۱}{i_۲}=\frac{h}{d}\Rightarrow\frac{i_۱}{i_۱+i_۲}=\frac{h}{d+h}$$

$$\frac{i_۱}{۵۰۰۰}=\frac{h}{۰/۴۰۰+h}=\frac{۱}{۱/۴}$$

$$i_۱=۳۶۰۰\,A$$

●●۱۲- (الف) در شکل ۲۳-۲۹، اگر جریان در مدار $۱/۰\,\text{mA}$ باشد مقدار R باید چقدر باشد؟ $\varepsilon_۱=۲/۰\,\text{V}$ ، $\varepsilon_۲=۳/۰\,\text{V}$ و $r_۱=r_۲=۳/۰\,\Omega$ است. (ب) آهنگ ایجاد انرژی گرمایی در R چقدر است؟



شکل ۲۳-۲۹ مسئلهٔ ۱۲

حل: (الف) چون $\varepsilon_۲>\varepsilon_۱$ است انتظار داریم جریان پادساعتگرد باشد که همین جهت را انتخاب کرده و قاعدهٔ حلقه را می‌نویسیم.

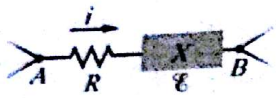
$$-\varepsilon_۱-ir_۱-iR-ir_۲+\varepsilon_۲=۰$$

$$-۲-(۱\times۱۰^{-۳})(۳)-(۱\times۱۰^{-۳})R-(۱\times۱۰^{-۳})(۳)+۳=۰$$

$$\Rightarrow R=۹۹۴\,\Omega$$

(ب) $P=Ri^۲=(۹۹۴)(۱\times۱۰^{-۳})^۲=۹/۹۴\times۱۰^{-۴}\,\text{W}$

●●۱۳- در شکل ۲۳-۳۰ بخش AB از مدار، وقتی جریان $i=۱/۰\,\text{A}$ در جهت نشان داده شده از آن می‌گذرد، انرژی را با آهنگ $۵۰\,\text{W}$ جذب می‌کند. مقاومت $R=۲/۰\,\Omega$ است. (الف) اختلاف پتانسیل میان A و B چقدر است؟ منبع نیروی محرکهٔ الکتریکی X مقاومت درونی ندارد. (ب) emf چقدر است؟ (پ) نقطهٔ B به پایانهٔ مثبت X وصل شده است یا پایانه منفی آن؟
SSM

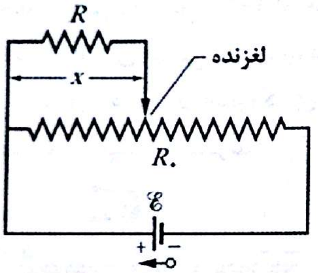


شکل ۲۳-۳۰ مسئلهٔ ۱۳

حل: (الف) $P=V_{AB}i\Rightarrow ۵۰=V_{AB}(۱)\Rightarrow V_{AB}=۵۰\,\text{V}$

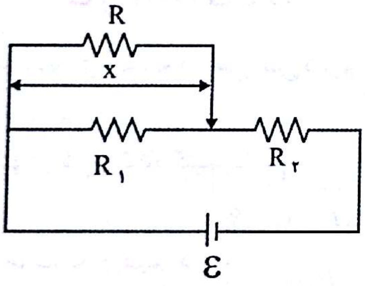
(ب) $V_{AB}=Ri+\varepsilon\Rightarrow ۵۰=(۲)(۱)+\varepsilon\Rightarrow\varepsilon=۴۸\,\text{V}$

●●۱۴- شکل ۲۳-۳۱ یک باتری را نشان می‌دهد که به دو سر مقاومت یکنواخت $R_۰$ وصل شده است. لغزنده‌ای از $x=۰$ تا $x=۱۰\,\text{cm}$ از چپ به راست روی مقاومت حرکت می‌کند. حرکت لغزنده میزان مقاومت سمت چپ و مقاومت سمت راست نقطهٔ تماس را تغییر می‌دهد. آهنگ مصرف انرژی در مقاومت R را برحسب تابعی از x پیدا کنید. این تابع را به ازای $\mathscr{E}=۵۰\,\text{V}$ ، $R=۲۰۰۰\,\Omega$ و $R_۰=۱۰۰\,\Omega$ رسم کنید.



شکل ۲۳-۳۱ مسئلهٔ ۱۴

حل:



$$R_۱+R_۲=R_۰$$

$$R_۱=\frac{x}{۱۰}R_۰=aR_۰$$

برای سادگی فرض کردیم: $\frac{x}{۱۰}=a$

$$R_۲=(۱-a)R_۰$$

$$R'=\frac{RR_۱}{R+R_۱}=\frac{aRR_۰}{R+aR_۰}$$

$$R_{eq}=R'+R_۲=\frac{aRR_۰}{R+aR_۰}+(۱-a)R_۰=\frac{R_۰[R+a(۱-a)R_۰]}{R+aR_۰}$$

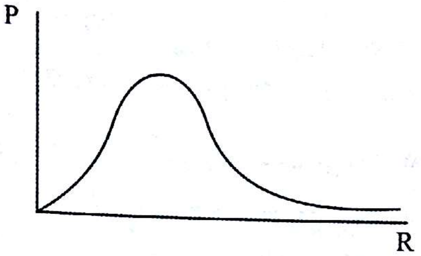
$$i=\frac{\varepsilon}{R_{eq}}=\frac{\varepsilon(R+aR_۰)}{R_۰[R+a(۱-a)R_۰]}$$

ولتاژ دو سر R را V' در نظر می‌گیریم.

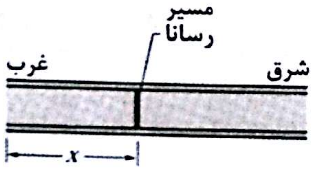
$$V'=R'i=\frac{aRR_۰}{R+aR_۰}\cdot\frac{\varepsilon(R+aR_۰)}{R_۰[R+a(۱-a)R_۰]}=\frac{aR\varepsilon}{R+a(۱-a)R_۰}$$

Scanned by CamScanner

$$P=\frac{V'^2}{R}=\frac{1}{R}\cdot\frac{a^2R^2\varepsilon^2}{[r+a(1-a)R_0]^2}=\frac{x^2R\varepsilon^2}{100\left[R+\frac{x}{100}\left(1-\frac{x}{10}\right)R_0\right]^2}$$



●●۱۵- کابل زیرزمینی طویلی به طول ۱۰km که از شرق به غرب کشیده شده شامل دو سیم موازی است که مقاومت هر یک ۱۳Ω/km است. در فاصلهٔ x از انتهای غربی، با یک رسانا به مقاومت R که دو سیم را به هم وصل می‌کند یک اتصال کوتاه الکتریکی انجام می‌گیرد (شکل ۲۳-۳۲). مقاومت سیمها و اتصال کوتاه وقتی که از انتهای شرقی آن اندازه‌گیری شود برابر با ۱۰۰Ω و وقتی از انتهای غربی آن اندازه‌گیری شود برابر با ۲۰۰Ω است. (الف) x و (ب) R چقدرند؟



شکل ۲۳-۳۲ مسئلهٔ ۱۵

حل: با توجه به داده‌های مسئله فرض می‌کنیم $L=10\,km$ و $a=13\,\Omega/km$ باشند.

(الف) اگر از انتهای شرق نگاه کنیم، داریم

$$R_1=100=2a(L-x)+R$$

و اگر از انتهای غرب نگاه کنیم، داریم:

$$R_2=200=2ax+R$$

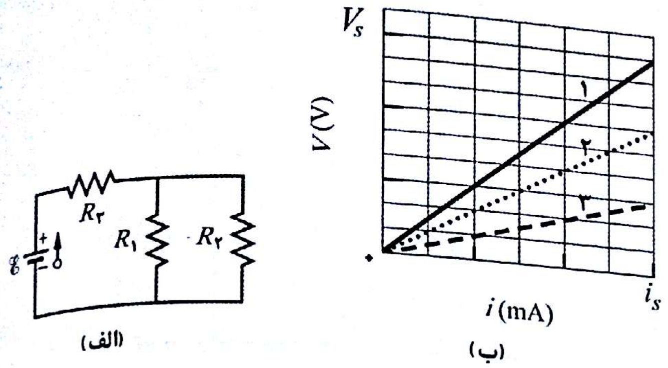
دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

$$200-100=4ax-2aL$$
$$100=(4)(13)x-(2)(13)(10)\Rightarrow x=6.9\,km$$

(ب) دو رابطه R_1 و R_2 را جمع کنیم، داریم:

$$300=2aL+2R$$
$$300=(2)(13)(10)+2R\Rightarrow R=20\,\Omega$$

●●۱۶- emf باتری آرمانی در شکل ۲۳-۳۳ الف $\mathscr{E}=6.0\,V$ است. نمودار ۱ در شکل ۲۳-۳۳ ب جریان i در مقاومت ۱ مدار را برحسب اختلاف پتانسیل الکتریکی V برقرار شده در دو سر آن مقاومت به دست می‌دهد. مقیاس محور V با $V_s=18.0\,V$، و مقیاس محور i با $i_s=3.00\,mA$ مشخص شده است. نمودارهای ۲ و ۳ نمودارهای مشابهی را به ترتیب برای مقاومتهای ۲ و ۳ نشان می‌دهند. جریان در مقاومت ۲ چقدر است؟



شکل ۲۳-۳۳ مسئلهٔ ۱۶

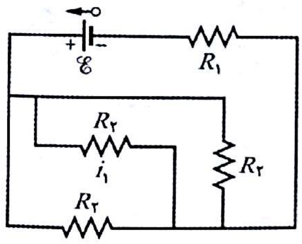
حل: شیب نمودارها مقاومت را به دست می‌دهند.

$$R_1=\frac{\Delta V}{\Delta i_1}=\frac{18}{3\times10^{-3}}=6000\,\Omega$$
$$R_2=\frac{\Delta V}{\Delta i_2}=\frac{12}{3\times10^{-3}}=4000\,\Omega$$
$$R_3=\frac{\Delta V}{\Delta i_3}=\frac{6}{3\times10^{-3}}=2000\,\Omega$$

R_1 و R_2 موازی بسته شده‌اند.

$$R_{12}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=2400\,\Omega$$
$$\varepsilon=(R_3+R_{12})i\Rightarrow 6=(2000+2400)i\Rightarrow i=1.36\times10^{-3}\,A$$
$$V_{12}=R_{12}i=(2400)(1.36\times10^{-3})=3.26\,V$$
$$\bar{I}_2=\frac{V_{12}}{R_2}=\frac{3.26}{4000}=8.15\times10^{-4}\,A$$

●●۱۷- در شکل ۲۳-۳۴، $R_1=6.00\,\Omega$، $R_2=18.0\,\Omega$ و emf باتری آرمانی $\mathscr{E}=12.0\,V$ است. (الف) اندازه و (ب) جهت (چپ یا راست) جریان i_1 چیست؟ (پ) چقدر انرژی در چهار مقاومت در ۱/۰۰ min مصرف می‌شود؟



شکل ۲۳-۳۴ مسئلهٔ ۱۷

حل: (الف) سه مقاومت R_2 موازی‌اند و مقاومت معادل آنها برابر $R=6\,\Omega$ است که با R_1 به صورت متوالی می‌باشد لذا مقاومت معادل مدار برابر $R_{eq}=12\,\Omega$ خواهد بود. در نتیجه جریان در R_{eq} برابر است با:

$$i=\frac{\varepsilon}{R_{eq}}=\frac{12}{12}=1\,A$$

همین جریان از مقاومت R نیز عبور می‌کند و بنا به تقارن جریان عبوری از هر یک از مقاومت‌های R_2 برابر $(1/3)\,A$ در نتیجه $i_1=0.33\,A$ است.

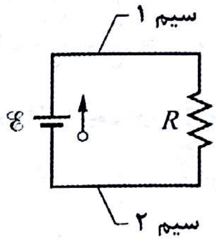
(ب) جهت جریان از چپ به راست است.

(پ)

$$P=R_{eq}i^2=(12)(1)^2=12\,W$$
$$W=Pt=(12)(60)=720\,J$$

Scanned by CamScanner

۱۸●●- شکل ۲۳-۳۵ مقاومت $R=۶/۰۰\Omega$ را نشان می‌دهد که به باتری آرمانی با emf برابر $\varepsilon=۱۲/۰\,V$ به کمک سیمهای مسی متصل شده است. طول هر سیم $۲۰/۰\,cm$ و شعاع آن $۱/۰۰\,mm$ است. در چنین مدارهایی در این فصل از اختلاف پتانسیل در طول سیمها و تبدیل انرژی به انرژی گرمایی در آنها چشمپوشی کردیم. اعتبار این چشمپوشی را در مدار شکل ۲۳-۲۹ بررسی کنید. اختلاف پتانسیل دو سر (الف) مقاومت و (ب) هر یک از دو بخش سیم چقدر است؟ با چه آهنگی انرژی به انرژی گرمایی در (پ) مقاومت و (ت) هر بخش سیم تبدیل می‌شود؟



شکل ۲۳-۳۵ مسئلهٔ ۱۸

حل: دو سیم یکسان‌اند و مقاومت هر یک برابر است با

$$R_{سیم}=\rho\frac{L}{A}=(۱/۶۹\times۱۰^{-۸})\frac{۰/۲}{\pi(۱\times۱۰^{-۳})^{۲}}=۱/۰۸\times۱۰^{-۳}\,\Omega$$

$$R_{eq}=R+R_{سیم}+R_{سیم}=۶+۲(۱/۰۸\times۱۰^{-۳})=۶/۰۰۲۲\Omega$$

$$i=\frac{\varepsilon}{R_{eq}}=\frac{۱۲}{۶/۰۰۲۲}=۱/۹۹۹۳A$$

(الف) $V_R=Ri=(۶)(۱/۹۹۹۳)=۱۱/۹۹۵۸\,V$

(ب) $V_{سیم}=R_{سیم}i=(۱/۰۸\times۱۰^{-۳})(۱/۹۹۹۳)=۲/۱۶\times۱۰^{-۳}\,V$

(پ) $P_R=Ri^{۲}=(۶)(۱/۹۹۹۳)^{۲}=۲۴\,W$

(ت) $P_{سیم}=R_{سیم}i^{۲}=(۱/۰۸\times۱۰^{-۳})(۱/۹۹۹۳)^{۲}$

$$=۴/۳\times۱۰^{-۳}\,W$$

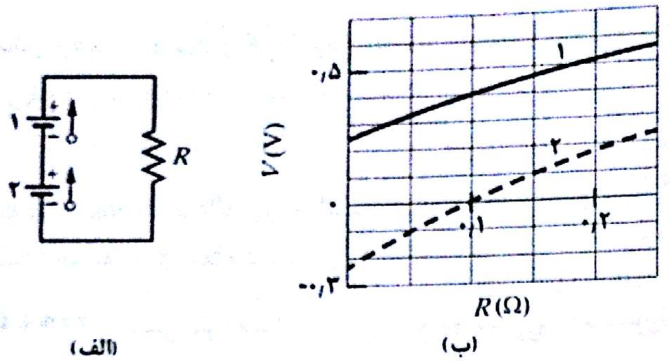
۱۹●●- جریان در یک مدار تک حلقه‌ای با مقاومت R برابر است با $۵/۰A$. وقتی مقاومت اضافی $۲/۰\Omega$ به صورت متوالی با R در مدار قرار داده شود، جریان به $۴/۰A$ می‌رسد. R چقدر است؟ **ILW**

حل:

$$\varepsilon=Ri=۵R$$

$$\varepsilon=(R+۲)i'\Rightarrow ۵R=(R+۲)(۴)\Rightarrow R=۸\Omega$$

۲۰●●- در شکل ۲۳-۳۶ الف هر دو باتری دارای emf برابر با $\mathscr{E}=۱/۲۰\,V$ هستند و مقاومت خارجی R متغیر است. شکل ۲۳-۳۶ ب پتانسیلهای الکتریکی V بین پایانه‌های هر باتری را برحسب تابعی از R به دست می‌دهد: منحنی ۱ مربوط به باتری ۱ و منحنی ۲ مربوط به باتری ۲ است. مقاومت درونی (الف) باتری ۱ و (ب) باتری ۲ چقدر است؟



شکل ۲۳-۳۶ مسئلهٔ ۲۰

حل: از قانون حلقه می‌توان نوشت

$$\varepsilon_{۲}-ir_{۲}+\varepsilon_{۱}-ir_{۱}-iR=۰$$

$$i=\frac{\varepsilon_{۱}+\varepsilon_{۲}}{R_{۱}+r_{۱}+r_{۲}}$$

ولتاژ پایانه باتری ۱ را $V_{۱}$ و ولتاژ پایانه باتری ۲ را $V_{۲}$ درنظر می‌گیریم، داریم:

$$V_{۱}=\varepsilon_{۱}-ir_{۱}=\varepsilon_{۱}-\frac{\varepsilon_{۱}+\varepsilon_{۲}}{R+r_{۱}+r_{۲}}r_{۱}=۱/۲-\frac{۲/۴r_{۱}}{R+r_{۱}+r_{۲}}$$

$$V_{۲}=\varepsilon_{۲}-ir_{۲}=\varepsilon_{۲}-\frac{\varepsilon_{۱}+\varepsilon_{۲}}{R+r_{۱}+r_{۲}}r_{۲}=۱/۲-\frac{۲/۴r_{۲}}{R+r_{۱}+r_{۲}}$$

با توجه به نمودار $V_{۲}$، در $R=۰/۱$ داریم $V_{۲}=۰$ و $V_{۱}=۰/۴$. لذا:

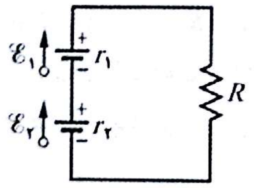
$$۰/۴=۱/۲-\frac{۲/۴r_{۱}}{۰/۱+r_{۱}+r_{۲}}$$

$$۰=۱/۲-\frac{۲/۴r_{۲}}{۰/۱+r_{۱}+r_{۲}}$$

از حل همزمان دو معادله فوق برای $r_{۱}$ و $r_{۲}$ خواهیم داشت:

$$r_{۱}=۰/۲\Omega\quad,\quad r_{۲}=۰/۳\Omega$$

۲۱●●●- در شکل ۲۳-۳۷، emf باتری ۱ برابر با $\mathscr{E}_{۱}=۱۲/۰\,V$ و مقاومت درونی $r_{۱}=۰/۰۱۶\Omega$ و emf باتری ۲ برابر با $\mathscr{E}_{۲}=۱۲/۰\,V$ و مقاومت درونی آن $r_{۲}=۰/۰۱۲\Omega$ است. باتریها به طور متوالی به مقاومت خارجی R وصل شده‌اند. (الف) چه مقدار R اختلاف پتانسیل پایانه به پایانهٔ یکی از باتریها را صفر می‌کند؟ (ب) این کدام باتری است؟ **SSM**



شکل ۲۳-۳۷ مسئلهٔ ۲۱

حل: جریان در مدار برابر است با

$$i=\frac{\varepsilon_{۱}+\varepsilon_{۲}}{R+r_{۱}+r_{۲}}=\frac{۲۴}{R+۰/۰۲۸}\qquad(۱)$$

ولتاژ دو سر پایانه‌های باتریها برابر است با

$$V_{۱}=\varepsilon_{۱}-ir_{۱}=۱۲-۰/۰۱۶i$$

$$V_{۲}=\varepsilon_{۲}-ir_{۲}=۱۲-۰/۰۱۲i$$

Scanned by CamScanner

چون $r_1 > r_2$ نتیجه می‌گیریم ولتاژ دو سر پایانه آن زودتر صفر می‌شود و داریم

$$0 = 12 - 0/016\,i \Rightarrow i = \frac{12}{0/016}$$

که در رابطه (۱) قرار دهیم خواهیم داشت $R = 0/004\Omega$.

(ب) همانطور که گفته شد باتری ۱.

●●●۲۲- وقتی مقاومت 500Ω به دو سر یک سلول خورشیدی وصل شود اختلاف پتانسیل $0/10V$ تولید می‌شود، و هرگاه مقاومت 1000Ω جایگزین شود اختلاف پتانسیل $0/15V$ تولید می‌شود. (الف) مقاومت درونی و (ب) emf سلول خورشیدی چقدر است؟ (پ) مساحت سلول خورشیدی $5/0cm^2$ و آهنگ دریافت انرژی از نور بر یکای مساحت برابر با $2/0mW/cm^2$ است. بازده سلول برای تبدیل انرژی نوری به انرژی گرمایی در مقاومت خارجی 1000Ω چقدر است؟

حل: (الف) مقاومت داخلی سلول خورشیدی را r می‌نامیم. داریم:

$$i = \frac{\varepsilon}{R+r}$$

$$V = \varepsilon - ir = \varepsilon - \frac{\varepsilon r}{R+r} = \frac{\varepsilon R}{R+r}$$

$$0/1 = \frac{500\varepsilon}{500+r}$$

$$0/15 = \frac{1000r}{1000+r}$$

اگر دو رابطه را بر هم تقسیم کنیم $r = 1000\Omega$ به دست می‌آید.

$$0/1 = \frac{500\varepsilon}{500+1000} \Rightarrow \varepsilon = 0/3V$$

(پ) بازده سلول چنین می‌شود

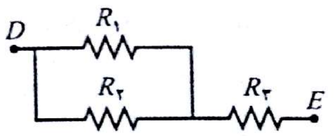
$$\frac{P}{P_{\text{دریافتی}}} = \frac{V^2/R}{P_{\text{دریافتی}}} = \frac{(0/15)^2/(1000)}{(5)(2\times10^{-3})} = 2/25\times10^{-3}$$

یا

٪۰/۲۲۵

بخش ۲۳-۷ مدارهای چند حلقه‌ای

●۲۳- در شکل ۲۳-۳۸، $R_1 = R_2 = 4/00\Omega$ و $R_3 = 2/500\Omega$ است. مقاومت معادل میان نقطه‌های D و E را پیدا کنید. (*راهنمایی:* فرض کنید که یک باتری به این دو نقطه وصل است).



شکل ۲۳-۳۸ مسئلهٔ ۲۳

حل:

$$R_{12} = 2\Omega$$

$$R_{eq} = R_3 + R_{12} = 4/5\Omega$$

●۲۴- وقتی مقاومتهای ۱ و ۲ به طور متوالی به یکدیگر وصل شوند، مقاومت معادل $16/0\,\Omega$ است. هرگاه به طور موازی وصل شوند، مقاومت معادل $3/0\Omega$ است. (الف) مقاومت کوچکتر و (ب) مقاومت بزرگتر چقدر است؟

حل: (الف) و (ب)

$$\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = 3 \quad , \quad R_1 + R_2 = 16$$

از حل همزمان این دو معادله داریم $R_1 = 12\Omega$ و $R_2 = 4\Omega$

●۲۵- چهار مقاومت $18/0\,\Omega$ به طور موازی به دو سر یک باتری آرمانی $25/0\,V$ وصل شده‌اند. جریانی که از باتری می‌گذرد چقدر است؟

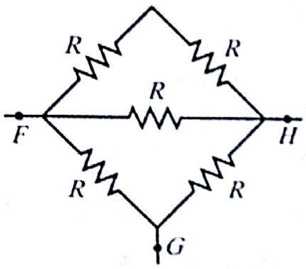
حل:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{4}\frac{1}{R_i} = \frac{4}{R} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R}{4} = \frac{18}{4} = 4/5\Omega$$

در نتیجه جریان عبوری از باتری برابر است با

$$i = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{25}{4/5} = 5/56A$$

●۲۶- شکل ۲۳-۳۹ پنج مقاومت $5/00$ اهمی را نشان می‌دهد. مقاومت معادل بین نقطه‌های (الف) F و H و (ب) F و G را پیدا کنید. (*راهنمایی:* برای هر زوج نقطه، فرض کنید که یک باتری به دو سر زوج متصل است).



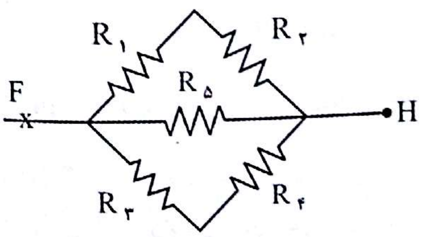
شکل ۲۳-۳۹ مسئلهٔ ۲۶

حل: (الف) مقاومت معادل بین F و H

$$R_{12} = R_1 + R_2 = 5 + 5 = 10\Omega$$

$$R_{34} = R_3 + R_4 = 5 + 5 = 10\Omega$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \Rightarrow R_{eq} = 2/5\Omega$$



(ب)

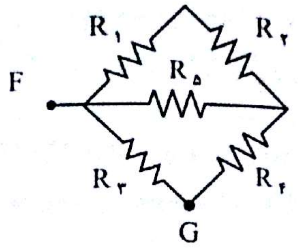
$$R_{12} = 10\Omega$$

$$R_{125} = \frac{(10)(5)}{10+5} = 3/33\Omega$$

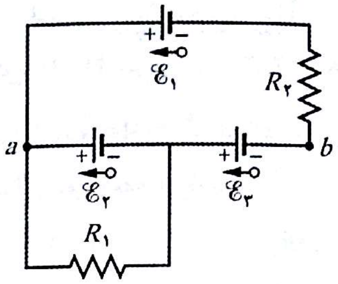
$$R_{1254} = 3/33 + 5 = 8/33\Omega$$

$$R_{eq} = \frac{(8/33)(5)}{8/33+5} = 3/12\Omega$$

Scanned by CamScanner



●۲۷- در شکل ۲۳-۴۰، $R_1 = ۱۰۰\,\Omega$ ، $R_2 = ۵۰\,\Omega$ و در باتریهای آرمانی $\varepsilon_1 = ۶/۰\,V$ ، $\varepsilon_2 = ۵/۰\,V$ و $\varepsilon_3 = ۴/۰\,V$ است. (الف) جریان در مقاومت ۱، (ب) جریان در مقاومت ۲ و (پ) اختلاف پتانسیل بین نقطه‌های a و b را پیدا کنید.



شکل ۲۳-۴۰ مسئلهٔ ۲۷

حل: (الف) حلقه شامل R_1 را در نظر می‌گیریم. جریان را پادساعتگرد در نظر می‌گیریم.

$$i_1 = \frac{\varepsilon_2}{R_1} = \frac{۵}{۱۰۰} = ۰/۰۵\,A$$

(ب) حلقه شامل R_2 را با جهت جریان ساعتگرد در نظر می‌گیریم. با استفاده از قاعده حلقه داریم

$$-\varepsilon_1 - R_2 i_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_2 = ۰$$

$$i_2 = \frac{\varepsilon_3 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1}{R_2} = \frac{۴ + ۵ - ۶}{۵۰} = ۰/۰۶\,A$$

(پ) V_{ab} را می‌توان از سه مسیر محاسبه کرد.

$$V_a - \varepsilon_1 - R_2 i_2 = V_b$$

$$V_a - V_b = \varepsilon_1 + R_2 i_2 = ۶ + (۵۰)(۰/۰۶) = ۹\,V$$

دو مسیر دیگر بعهده خواننده واگذار می‌شود.

●۲۸- در شکل ۲۳-۹، اگر $\varepsilon_1 = ۴/۰\,V$ ، $\varepsilon_2 = ۱/۰\,V$ ، $R_1 = R_2 = ۱۰\,\Omega$ و $R_3 = ۵/۰\,\Omega$ و باتری آرمانی باشد، اختلاف پتانسیل $V_d - V_c$ میان نقطه‌های d و c چقدر است؟

حل: قاعده حلقه را برای حلقه سمت چپ و سمت راست در نظر می‌گیریم.

$$\varepsilon_1 - i_1 R_1 + i_3 R_3 = ۰ \Rightarrow ۴ - ۱۰ i_1 + ۵ i_3 = ۰$$

$$\varepsilon_2 + i_2 R_2 + i_3 R_3 = ۰ \Rightarrow ۱ + ۱۰ i_2 + ۵ i_3 = ۰$$

از قاعده گره نیز داریم

$$i_3 = i_2 - i_1$$

از حل همزمان این سه معادله برای جریانها خواهیم داشت

$$i_1 = ۰/۲۷۵\,A \quad , \quad i_2 = ۰/۰۲۵\,A \quad , \quad i_3 = -۰/۲۵\,A$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که جهت جریان i_3 صحیح انتخاب نشده است. و جهت جریان روبه‌بالا است. اختلاف پتانسیل بین c و d را نیز می‌توان از مسیر به دست آورد. مسیر از طریق R_2:

$$V_d = V_c = i_2 R_2 = (۰/۰۲۵)(۱۰) = ۲/۵\,V$$

دو مسیر دیگر بعهده خواننده واگذار می‌شود.

●۲۹- نه سیم مسی به طول l و قطر d به طور موازی به هم وصل شده و یک رسانای مرکب با مقاومت R را به وجود آورده‌اند. اگر سیم مسی به طول l به تنهایی همان مقاومت را داشته باشد، قطر D آن باید چقدر باشد؟ SSM

حل:

$$R_{eq} = \frac{R}{۹} = \frac{۱}{۹}\rho \frac{۱}{\pi d^2 / ۴}$$

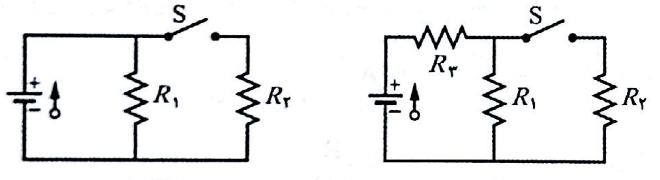
طبق فرض مسئله داریم

$$R_{eq} = \rho \frac{۱}{\pi D^2 / ۴}$$

از برابر قرار دادن مقاومت‌های معادل داریم

$$\frac{۴}{۹}\rho \frac{۱}{\pi d^2} = ۴\rho \frac{۱}{\pi D^2} \Rightarrow D = ۳d$$

●●۳۰- مقاومتها در شکلهای ۲۳-۴۱ الف و ب همگی $۶/۰\,\Omega$ و emf باتریهای آرمانی ۱۲V است. (الف) وقتی کلید S در شکل ۲۳-۴۱ الف بسته شود، آیا پتانسیل الکتریکی V_1 دو سر مقاومت ۱ تغییر می‌کند یا یکسان می‌ماند؟ (ب) وقتی کلید در شکل ۲۳-۴۱ ب بسته شود، آیا V_1 دو سر مقاومت ۱ تغییر می‌کند یا یکسان می‌ماند؟



شکل ۲۳-۴۱ مسئلهٔ ۳۰

حل: (الف) در شکل (الف) در حالت باز بودن کلید

$$V_1 = \varepsilon = ۱۲\,V$$

در حالت بسته بودن کلید اختلاف پتانسیل کماکان همان اختلاف پتانسیل روی R_1 است.

(ب) در شکل (ب) در حالت باز بودن کلید اختلاف پتانسیل دو سر R_1 برابر است با:

$$i = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_3} = \frac{۱۲}{۱۲} = ۱\,A$$

$$V_1 = R_1 i = (۶)(۱) = ۶\,V$$

در حالتی که کلید بسته است داریم:

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = ۳\,\Omega$$

$$R_{eq} = R_3 + R_{12} = ۶ + ۳ = ۹\,\Omega$$

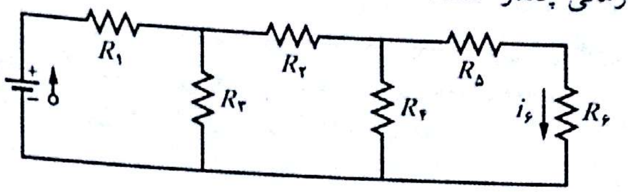
$$i = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{۱۲}{۹} = ۱/۳۳\,A$$

$$V_1 = iR_{12} = (۱/۳۳)(۳) = ۴\,V$$

در نتیجه اختلاف پتانسیل دو سر R_1 تغییر می‌کند.

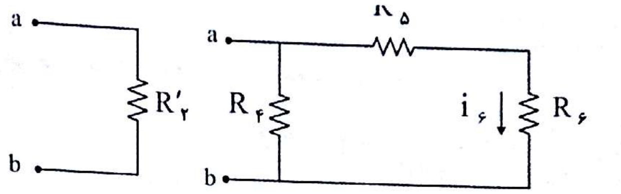
Scanned by CamScanner

●●۳۱- در شکل ۲۳-۴۲ جریان در مقاومت ۶ برابر $i_۶ = ۱/۴۰\,A$ و مقاومتها عبارت اند از $R_۱ = R_۲ = R_۳ = ۲/۰۰\Omega$، $R_۴ = ۱۶/۰\Omega$، $R_۵ = ۸/۰۰\Omega$ و $R_۶ = ۴/۰۰\Omega$. emf باتری آرمانی چقدر است؟



شکل ۲۳-۴۲ مسئله ۳۱

حل: طبق روش مرسوم از سمت راست مدار را بررسی می‌کنیم.



$R'_۱ = R_{۵۶} = ۸+۴ = ۱۲\Omega$

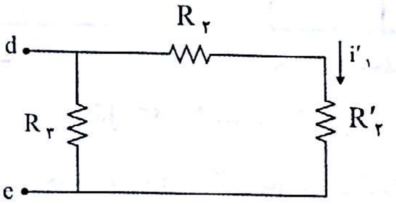
$V_{ab} = R'_۱ i_۶ = (۱۲)(۱/۴) = ۱۶/۸V$

مقاومت معادل دو مقاومت $R'_۱$ و $R_۴$ برابر است با

$$R'_۲ = \frac{R_۴R'_۱}{R_۴+R'_۱} = \frac{(۱۶)(۱۲)}{۱۶+۱۲} = ۶/۹\Omega$$

حال می‌توان جریانی که از $R'_۲$ می‌گذرد را حساب کرد

$$i_۱ = \frac{V_{ab}}{R'_۲} = \frac{۱۶/۸}{۶/۹} = ۲/۴۳A$$



معادل مقاومت $R'_۲$ و $R_۲$ نیز برابر است با

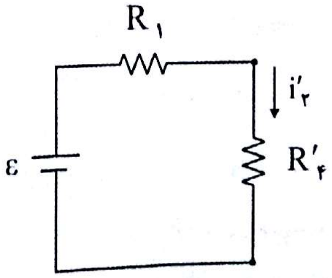
$R'_۳ = R_۲ + R'_۲ = ۲+۶/۹ = ۸/۹\Omega$

$V_{de} = R'_۳ i'_۱ = (۸/۹)(۲/۴۳) = ۲۱/۶V$

معادل مقاومت $R'_۳$ و $R_۳$ نیز برابر است با

$$R'_۴ = \frac{R'_۳R_۳}{R'_۳+R} = \frac{(۸/۹)(۲)}{۸/۹+۲} = ۱/۶۳\Omega$$

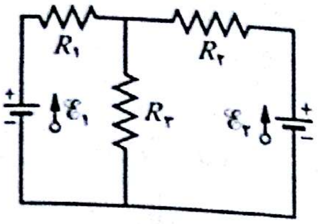
$$i'_۲ = \frac{V_{de}}{R'_۴} = \frac{۲۱/۶۷}{۱/۶۳} = ۱۳/۲۵A$$



$R_{eq} = R_۱ + R'_۴ = ۲+۱/۶۳ = ۳/۶۳\Omega$

$\varepsilon = R_{eq} i'_۲ = (۳/۶۳)(۱۳/۲۵) = ۴۸/۱\Omega$

●●۳۲- در شکل ۲۳-۴۳ emf باتریهای آرمانی $\varepsilon_۱ = ۱۰/۰V$ و $\varepsilon_۲ = ۰/۵۰۰\varepsilon_۱$ و هر یک از مقاومتها $۴/۰۰\Omega$ است. جریان در (الف) مقاومت ۲ و (ب) مقاومت ۳ چقدر است؟



شکل ۲۳-۴۳ مسئله‌های ۳۲، ۴۳ و ۹۸

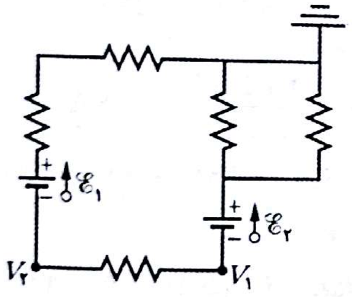
حل: (الف) و (ب) قاعده حلقه را با توجه به جهت جریانها در جهت $\varepsilon_۱$ و $\varepsilon_۲$ برای دو حلقه می‌نویسیم:

$\varepsilon_۱ - i_۱R_۱ - (i_۱+i_۲)R_۲ = ۰$

$\varepsilon_۲ - i_۲R_۳ - (i_۱+i_۲)R_۲$

و همچنین طبق قاعده گره دایم $i_۳ = i_۱ + i_۲$. از حل همزمان معادله‌ها $i_۲ = ۰$ و $i_۳ = ۱/۲۵A$ به دست می‌آید.

●●۳۳- در شکل ۲۳-۴۴، emf باتریهای آرمانی $\varepsilon_۱ = ۵/۰V$ و $\varepsilon_۲ = ۱۲V$، و هر یک از مقاومتها $۲/۰\Omega$ و پتانسیل در نقطه اتصال به زمین مدار صفر تعریف می‌شود. پتانسیلهای (الف) $V_۱$ و (ب) $V_۲$ در نقطه‌های نشان داده شده چقدر است؟ SSM

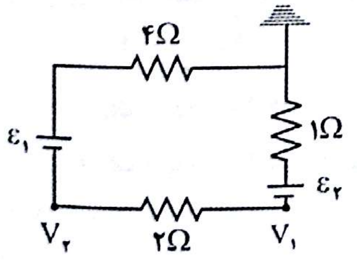


شکل ۲۳-۴۴ مسئلهٔ ۳۳

حل: مدار داده شده را می‌توان به صورت زیر ساده کرده و پس از آن جریان را به دست آورد.

$-۲i - \varepsilon_۱ - ۴i - i + \varepsilon_۲ = ۰$

$-۷i - ۵ + ۱۲ = ۰ \Rightarrow i = ۱A$

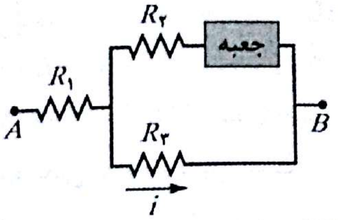


(الف) $V_۱ + \varepsilon_۲ - i = ۰ \Rightarrow V_۱ = -۱۲+۱ = -۱۱V$

(ب) $V_۱ - Ri = V_۲ \Rightarrow V_۲ = -۱۱ + (۲)(۱) = -۹V$

Scanned by CamScanner

●●۳۴- شکل ۲۳-۴۵ بخشی از یک مدار را نشان می‌دهد. مقاومتها عبارت‌اند از $R_1=2.0\,\Omega$ ، $R_2=4.0\,\Omega$ ، $R_3=6.0\,\Omega$ و جریان نشان داده شده $i=6.0\,A$ است. اختلاف پتانسیل الکتریکی میان نقطه‌های A و B که این بخش مدار را به بقیه مدار وصل می‌کند برابر $V_A-V_B=78\,V$ است. (الف) آیا وسیله‌ای که با «جعبه» نشان داده شده است انرژی را از مدار می‌گیرد یا به مدار می‌دهد و (ب) با چه آهنگی؟



شکل ۲۳-۴۵ مسئلهٔ ۳۴

حل: ابتدا اختلاف پتانسیل دو سر R_3 را به دست می‌آوریم

$$V_3=R_3 i=(6)(6)=36\,V$$

در نتیجه

$$V_1=(V_A-V_B)-V_3=78-36=42\,V$$

و جریان عبوری از R_1 برابر است با

$$i_1=\frac{V_1}{R_1}=\frac{42}{2}=21\,A$$

و از قاعده انشعاب جریان عبوری از R_2 به دست می‌آید.

$$i_2=i_1-i=21-6=15\,A$$

از طرف دیگر داریم (V_b ولتاژ دو سر جعبه است)

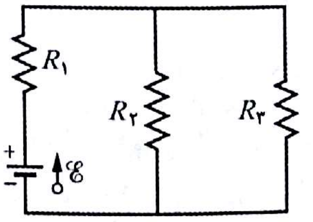
$$V_3=V_2+V_b=R_2 i_2+V_b$$

$$36=(4)(15)+V_b \Rightarrow V_b=-24\,V$$

چون اختلاف پتانسیل دو سر جعبه منفی است لذا می‌توان گفت که این وسیله در حال گرفتن انرژی از مدار است.

(ب) $P=V_b i_2=(24)(15)=360\,W$

●●۳۵- در شکل ۲۳-۴۶، $R_1=2.00\,\Omega$ ، $R_2=5.00\,\Omega$ و باتری آرمانی است. چه مقداری از R_3 آهنگ اتلاف در مقاومت ۳ را بیشینه می‌کند؟



شکل ۲۳-۴۶ مسئله‌های ۳۵، ۹۹، ۱۰۶ و ۱۰۷

حل:

$$R_{23}=\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}=\frac{5R_3}{5+R_3}$$

$$R_{eq}=R_1+R_{23}=2+\frac{5R_3}{5+R_3}=\frac{7R_3+10}{5+R_3}$$

$$i=\frac{\varepsilon}{R_{eq}}=\frac{\varepsilon(5+R_3)}{7R_3+10}$$

$$V_3=iR_{23}=\frac{\varepsilon(5+R_3)}{7R_3+10}\cdot\frac{5R_3}{5+R_3}=\frac{5\varepsilon R_3}{7R_3+10}$$

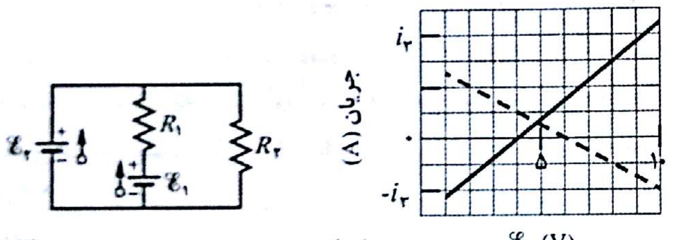
آهنگ اتلاف در R_3 برابر است با:

$$P=\frac{V_3^2}{R_3}=\frac{1}{R_3}\left(\frac{5\varepsilon R_3}{7R_3+10}\right)^2=\frac{25\varepsilon^2 R_3}{(7R_3+10)^2}$$

$$\frac{dP}{dR_3}=0 \qquad \frac{dP}{dR_3}=25\varepsilon^2\left[\frac{(7R_3+10)^2-14(7R_3+10)R_3}{(7R_3+10)^4}\right]=0$$

$$\Rightarrow 7R_3+10-14R_3=0 \qquad R_3=1.43\,\Omega$$

●●۳۶- هر دو باتری در شکل ۲۳-۴۷ آرمانی‌اند. مقدار emf باتری ۱ ثابت است ولی emf باتری ۲ می‌تواند میان مقدار $1.0\,V$ و $10\,V$ تغییر کند. نمودار شکل ۲۳-۴۷ ب جریانهای عبوری از دو باتری را برحسب تابعی از $\mathcal{E}_2$ نشان می‌دهد. مقیاس قائم با $i_2=0.20\,A$ مشخص شده است. باید تصمیم بگیرید که کدام نمودار متناظر با کدام باتری است، ولی در مورد هر دو نمودار، وقتی جهت جریان در باتری خلاف جهت emf باتری باشد، علامت جریان منفی می‌شود. (الف) emf مربوط به $\mathcal{E}_1$ ، (ب) مقاومت R و (پ) مقاومت R_2 چقدر است؟



(الف) (ب)

شکل ۲۳-۴۷ مسئلهٔ ۳۶

حل: (الف) حلقه سمت چپ را در نظر گرفته و قاعده حلقه را می‌نویسیم، داریم:

$$\varepsilon_2+i_1R_1-\varepsilon_1=0$$

با توجه به اینکه وقتی ε_2 و i_1 تغییر می‌کنند ε_1 ثابت نگه داشته می‌شود لذا می‌توان نتیجه گرفت که به ازای مقادیر بزرگ ε_2، جریان i_1 باید منفی باشد. لذا شیب روبه‌پایین یعنی نمودار خط‌چین مربوط به i_1 است. حال با توجه به شکل مشاهده می‌کنیم که به ازای $i_1=0$، داریم $\varepsilon_1=\varepsilon_2=6\,V$.

(ب) از منحنی مشاهده می‌شود که در $\varepsilon_2=2\,V$ ، $i_1=0.2\,A$ و از طرفی $\varepsilon_1=6\,V$ نیز ثابت و برقرار است لذا از رابطه قاعده حلقه بالا خواهیم داشت $R_1=20\,\Omega$.

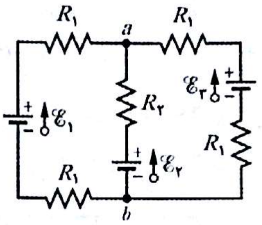
(پ) با توجه به منحنی مربوط به i_2، مشاهده می‌کنیم که به ازای $i_2=0$، $\varepsilon_2=4\,V$ و با در نظر گرفتن $\varepsilon_1=6\,V$ و $R_1=20\,\Omega$ از رابطه حلقهٔ سمت چپ بالا خواهیم داشت $i_1=0.1\,A$.

حال می‌توان از قاعدهٔ حلقه برای حلقه سمت راست استفاده کرد.

$$\varepsilon_1-i_1R_1=i_1R_2 \Rightarrow 6-(0.1)(20)=(0.1)R_2 \Rightarrow R_2=40\,\Omega$$

Scanned by CamScanner

●●۳۷- در شکل ۲۳-۴۸، مقاومتها عبارت‌اند از $R_1=۱/۰\,\Omega$ و $R_2=۲/۰\,\Omega$ و emf باتریهای آرمانی $\varepsilon_1=۲/۰\,V$ و $\varepsilon_2=۴/۰\,V$ است. (الف) اندازه و (ب) جهت (بالا یا پایین) جریان در باتری ۱، (پ) اندازه و (ت) جهت جریان در باتری ۲ و (ث) اندازه و (ج) جهت جریان در باتری ۳، چیست؟ (چ) اختلاف پتانسیل V_a-V_b چقدر است؟ ILW



شکل ۲۳-۴۸ مسئله ۳۷

حل: قاعده حلقه را برای دو حلقه سمت چپ و راست می‌نویسیم و جریان در آنها را به ترتیب i_1 و i_2 و پادساعتگرد در نظر می‌گیریم. جریان عبوری از شاخه وسط برابر $i_2=i_1-i_2$ می‌شود، لذا داریم:

$$-i_1R_1-\varepsilon_1-i_1R_1-(i_1-i_2)R_2+\varepsilon_2=۰$$

$$-i_2R_1+\varepsilon_2-i_2R_1-\varepsilon_2+(i_1-i_2)R_2=۰$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده و حل همزمان دو معادله خواهیم داشت $i_1=۰/۶۶A$ و $i_2=۰/۳۳A$ و در نتیجه $i_3=۰/۳۳A$ می‌شود.

(الف) و (ب) $i_1=۰/۶۶A$ و چون مثبت است لذا جهت انتخاب شده پادساعتگرد صحیح بوده و i_1 در ε_1 به سمت پایین است.

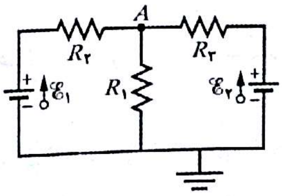
(پ) و (ت) $i_2=۰/۳۳A$ و چون مثبت است پس i_2 در ε_2 به سمت بالا است.

(ث) و (ج) $i_3=۰/۳۳A$ و چون مثبت است لذا روبه‌بالا می‌باشد.

(چ) $V_a-R_1i_1-\varepsilon_1-R_1i_1=V_b$

$$V_a-V_b=۲R_1i_1+\varepsilon_1=(۲)(۱)(۰/۶۶)+۲=۳/۳۴V$$

●●۳۸-در شکل ۲۳-۴۹، $\varepsilon_1=۶/۰۰\,V$، $\varepsilon_2=۱۲/۰\,V$، $R_1=۱۰۰\,\Omega$، $R_2=۲۰۰\,\Omega$ و $R_3=۳۰۰\,\Omega$ است. یک نقطهٔ مدار به زمین متصل شده است ($V=۰$). (الف) اندازه و (ب) جهت (بالا یا پایین) جریان در مقاومت ۱، (پ) اندازه و (ت) جهت (چپ یا راست) جریان در مقاومت ۲ و (ث) اندازه و (ج) جهت جریان در مقاومت ۳ چیست؟ (چ) پتانسیل الکتریکی در نقطهٔ A چقدر است؟ GO



شکل ۲۳-۴۹ مسئله ۳۸

حل: با استفاده از قاعده گره و قاعده حلقه می‌توان نوشت. جریانها را در حلقه سمت چپ ساعتگرد و در حلقه سمت راست پادساعتگرد در نظر می‌گیریم.

$$i_1=i_2+i_3$$

$$\varepsilon_1-R_3i_3-R_1i_1=۰$$

$$\varepsilon_2-R_2i_2-R_1i_1=۰$$

با قرار دادن مقادیر داده شده و حل همزمان معادله‌ها خواهیم داشت $i_1=۰/۰۳۸۲A$ و $i_2=۰/۰۱۰۹A$ و $i_3=۰/۰۲۷۳A$.

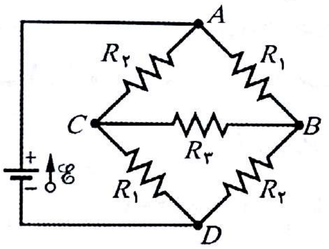
(الف) و (ب) $i_1=۰/۰۳۸۲A$ و چون مثبت است جهت انتخابی صحیح بوده یعنی i_1 روبه‌پایین است.

(پ) و (ت) $i_2=۰/۰۱۰۹A$، چون مثبت است پس جهت انتخابی چپ به سمت راست صحیح است.

(ث) و (ج) $i_3=۰/۰۲۷۳A$ و روبه چپ می‌باشد. (چ) پتانسیل در A برابر است با

(چ) $V_A=i_1R_1=(۰/۰۳۸۲)(۱۰۰)=۳/۸۲$

●●۳۹-در شکل ۲۳-۵۰، $\varepsilon=۱۲/۰\,V$، $R_1=۲۰۰۰\,\Omega$، $R_2=۳۰۰۰\,\Omega$ و $R_3=۴۰۰۰\,\Omega$ است. اختلاف پتانسیل (الف) V_A-V_B، (ب) V_B-V_C، (پ) V_C-V_D و (ت) V_A-V_C چقدر است؟



شکل ۲۳-۵۰ مسئلهٔ ۳۹

حل:

(۱) $\varepsilon=V_{AC}+V_{CD}=R_2i_2+R_1i_1\Rightarrow ۱۲=۳۰۰۰i_2+۲۰۰۰i_1$

در حلقه $ABCA$ داریم

$$-R_2i_2+R_3(i_1-i_2)-R_1i_1$$

$$-۳۰۰۰i_2+۴۰۰۰i_1-۴۰۰۰i_2-۲۰۰۰i_1=۰\Rightarrow$$

(۲) $\Rightarrow -۷i_2+۲i_1=۰\Rightarrow i_2=\frac{۲}{۷}i_1$

با قرار دادن (۲) در (۱)، جریانهای i_1 و i_2 به دست می‌آیند $i_1=۴/۲\times۱۰^{-۳}\,A$ و $i_2=۱/۲\times۱۰^{-۳}\,A$. با استفاده از قاعده انشعاب $i_3=i_1-i_2=+۳\times۱۰^{-۳}\,A$.

(الف) $V_A-V_B=R_1i_1=(۲۰۰۰)(۴/۲\times۱۰^{-۳})=۸/۴V$

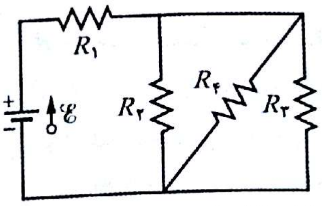
(ب) $V_B-V_C=R_3i_3=(۴۰۰۰)(۳\times۱۰^{-۳})=۱۲V$

(پ) $V_C-V_D=R_1i_1=(۲۰۰۰)(۴/۲\times۱۰^{-۳})=۸/۴V$

(ت) $V_A-V_C=R_2i_2=(۳۰۰۰)(۱/۲\times۱۰^{-۳})=۳/۶V$

Scanned by CamScanner

۴۰●●- در شکل ۲۳-۵۱، $R_1=100\,\Omega$ ، $R_2=R_3=50.0\,\Omega$ ، $R_4=75.0\,\Omega$ و emf باتری آرمانی $\varepsilon=6.00\,V$ است. (الف) مقاومت معادل چقدر است؟ i در (ب) مقاومت ۱، (پ) مقاومت ۲، (ت) مقاومت ۳ و (ث) مقاومت ۴، چقدر است؟



شکل ۲۳-۵۱ مسئله‌های ۴۰ و ۴۸

حل: (الف) ابتدا مقاومت معادل مقاومتها R_2، R_3 و R_4 که به صورت موازی‌اند را به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{R_{234}}=\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}=\frac{1}{50}+\frac{1}{50}+\frac{1}{75}\Rightarrow R_{234}=18.75\,\Omega$$

$$R_{eq}=R_1+R_{234}=100+18.75=118.75$$

(ب) جریان عبوری از R_1 همان جریان کل مدار است

$$i_1=i=\frac{\varepsilon}{R_{eq}}=\frac{6}{118.75}=5.05\times10^{-2}\ A$$

(پ) ولتاژ دو سر R_2، R_3 و R_4 با هم برابر واز رابطه زیر به دست می‌آید.

$$V_2=V_{234}=iR_{234}=(5.05\times10^{-2})(18.75)=0.95\,V$$

$$i_2=\frac{V_2}{R_2}=\frac{0.95}{50}=1.9\times10^{-2}\ A$$

(ت)

$$V_3=V_2=0.95\,V$$

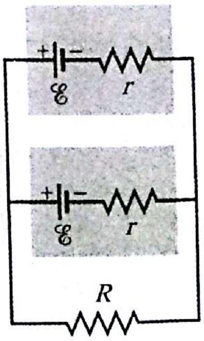
$$i_3=\frac{V_3}{R_3}=\frac{0.95}{50}=1.9\times10^{-2}\ A$$

(ث)

$$V_4=V_2=0.95\,V$$

$$i_4=\frac{V_4}{R_4}=\frac{0.95}{75}=1.25\times10^{-2}\ A$$

۴۱●●- در شکل ۲۳-۵۲، دو باتری با emf برابر با $\varepsilon=12.0\,V$ و مقاومت درونی $r=0.300\,\Omega$ به طور موازی به دو سر مقاومت R بسته شده‌اند. (الف) به ازای چه مقدار R آهنگ مصرف در مقاومت بیشینه است؟ (ب) این بیشینه چقدر است؟



شکل ۲۳-۵۲ مسئله‌های ۴۱ و ۴۲

حل: (الف) چون باتریها مشابه‌اند جریانی که از آنها می‌گذرد یکسان است و اگر آن را i در نظر بگیریم جریانی که از مقاومت R می‌گذرد برابر $2i$ می‌باشد. از قانون حلقه، برای حلقهٔ پایین داریم:

$$\varepsilon-ir-2iR=0\Rightarrow i=\frac{\varepsilon}{r+2R}$$

توان تلف شده در R برابر است با:

$$P=R(2i)^2=R\frac{4\varepsilon^2}{(r+2R)^2}$$

برای اینکه توان بیشینه شود باید $dP/dR=0$ باشد

$$\frac{dP}{dR}=\frac{4\varepsilon^2(r+2R)^2-4R(r+2R)}{(r+2R)^4}=0$$

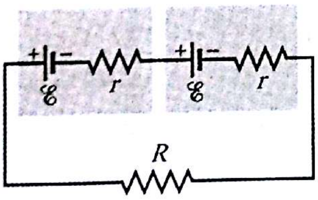
$$r+2R-4R=0\Rightarrow R=\frac{r}{2}$$

که به ازای $r=0.3\,\Omega$ خواهیم داشت $R=0.6\,\Omega$.

(ب) اگر $R=r/2$ را در رابطه P قرار دهیم آهنگ اتلاف بیشینه به دست می‌آید.

$$P_{max}=\frac{4\varepsilon^2(r/2)}{\left[r+2\left(\frac{r}{2}\right)\right]^2}=\frac{\varepsilon^2}{2r}=\frac{(12)^2}{2(0.3)}=240\,W$$

۴۲●●- می‌خواهیم دو باتری مشابه با emf برابر با $\varepsilon=12.0\,V$ و مقاومت درونی $r=0.200\,\Omega$ را به یک مقاومت خارجی R، به صورت موازی (شکل ۲۳-۵۲) یا به صورت متوالی (شکل ۲۳-۵۳) ببندیم. اگر $R=2.00r$ باشد، جریان i در مقاومت خارجی در آرایشهای (الف) موازی و (ب) متوالی چقدر است؟ (پ) در کدام آرایش جریان i بیشتر است؟ اگر $R=r/2.00$ باشد، i در مقاومت خارجی در آرایش‌های (ت) موازی و (ث) متوالی چقدر است؟ (ج) برای کدام آرایش i بیشتر است؟



شکل ۲۳-۵۳ مسئلهٔ ۴۲

حل: (الف) چون باتریها مشابه و به طور موازی‌اند مانند مسئله ۴۱ جریان در آنها یکسان و جریانی که از R می‌گذرد برابر $2i$ می‌باشد و از قانون حلقه داریم:

$$\varepsilon=ir+(2i)R\Rightarrow i=\frac{\varepsilon}{r+2R}$$

$$i_R=2i=\frac{2\varepsilon}{r+2R}=\frac{2(12)}{0.2+(2)(0.4)}=24\,A$$

(ب) در بهم بستن متوالی جریانها یکسانند و داریم:

$$\sum\varepsilon=i\sum R\Rightarrow 2\varepsilon=2ir+iR$$

$$i_R=i=\frac{2\varepsilon}{2r+R}=\frac{2(12)}{2(0.2)+0.4}=30\,A$$

(پ) در بهم بستن متوالی، چون $R>r$ است.

Scanned by CamScanner

(ت) به ازای $R = r/۲ = ۰/۱\Omega$ در بهم بستن موازی داریم:

$$i_R = \frac{۲\varepsilon}{r+۲R} = \frac{۲(۱۲)}{۰/۲+(۲)(۰/۱)} = ۶۰A$$

(ث) و برای اتصال متوالی داریم:

$$i_R = \frac{۲\varepsilon}{۲r+R} = \frac{۲(۱۲)}{۲(۰/۲)+۰/۱} = ۴۸A$$

(ج) در آرایش موازی، چون $R < r$ است.

●●۴۳- شکل ۲۳-۴۳، $\varepsilon_۱ = ۳/۰۰V$، $\varepsilon_۲ = ۱/۰۰V$، $R_۱ = ۴/۰۰\Omega$، $R_۲ = ۲/۰۰\Omega$، $R_۳ = ۵/۰۰\Omega$ و هر دو باتری آرمانی‌اند. آهنگ مصرف انرژی در (الف) $R_۱$، (ب) $R_۲$ و (پ) $R_۳$ چقدر است؟ توان (ت) باتری ۱ و (ث) باتری ۲ چقدر است؟

حل: در دو حلقه سمت چپ و راست را ساعتگرد در نظر می‌گیریم و قاعده حلقه‌ها و انشعاب را به کار می‌بریم.

$$i_۳ = i_۱ - i_۲$$

$$\varepsilon_۱ - R_۱ i_۱ - R_۳ i_۳ = ۰$$

$$\varepsilon_۲ + R_۲ i_۲ + R_۳ i_۳ = ۰$$

با قرار دادن مقادیر داده شده و حل همزمان این معادلات برای جریانها داریم $i_۱ = ۰/۴۲۱A$، $i_۲ = ۰/۱۵۸A$ و $i_۳ = ۰/۲۶۳A$. پاسخ مثبت بیانگر انتخاب صحیح جهت جریانها است.

(الف) توان تلف شده در $R_۱$ برابر است با:

$$P_۱ = R_۱ i_۱^۲ = (۴)(۰/۴۲۱)^۲ = ۰/۷۰۹W$$

(ب) اتلاف در $R_۲$ برابر است با:

$$P_۲ = R_۲ i_۲^۲ = (۲)(۰/۱۵۸)^۲ = ۰/۰۵W$$

(پ) اتلاف در $R_۳$ برابر است با:

$$P_۳ = R_۳ i_۳^۲ = (۵)(۰/۲۶۳)^۲ = ۰/۳۴۶W$$

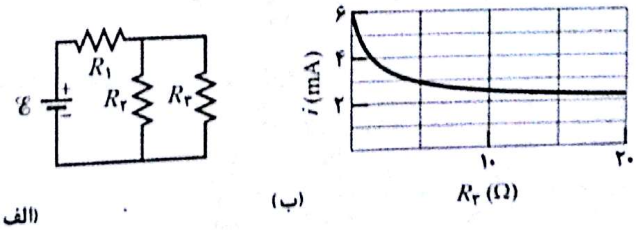
(ت) توان باتری ۱ برابر است با:

$$P_{\varepsilon_۱} = \varepsilon_۱ i_۱ = (۳)(۰/۴۲۱) = ۱/۲۶W$$

(ث)

$$P_{\varepsilon_۲} = \varepsilon_۲ i_۲ = (۱)(۰/۱۵۸) = ۰/۱۵۸W$$

●●۴۴- در شکل ۲۳-۵۴ الف مقاومت ۳ متغیر و emf باتری آرمانی $\varepsilon = ۱۲V$ است. شکل ۲۳-۵۴ب جریان عبوری i از باتری را برحسب تابعی از $R_۳$ به دست می‌دهد. وقتی $R_۳ \to \infty$ میل کند، منحنی دارای مجانب ۲/۰mA است. (الف) مقاومت $R_۱$ و (ب) مقاومت $R_۲$ چقدر است؟



(الف) (ب)

شکل ۲۳-۵۴ مسئلهٔ ۴۴

حل: (الف) وقتی $R_۳ = ۰$ است کل جریان از $R_۱$ و $R_۳$ می‌گذرد. با توجه به شکل ب دیده می‌شود در $R_۳ = ۰$، $i = ۶mA$ است و در نتیجه داریم

$$R_۱ = \frac{\varepsilon}{i} = \frac{۱۲}{۰/۰۰۶} = ۲\times۱۰^۳\Omega$$

(ب) وقتی $R_۳ \to \infty$ به جای اتصال کوتاه حالت قبل در اینجا اتصال باز داریم و کل جریان از $R_۱$ و $R_۲$ می‌گذرد. با توجه به شکل ب دیده می‌شود که به ازای $R_۳ = \infty$، جریانی که از باتری می‌گذرد برابر $i = ۲mA$ است و در نتیجه داریم

$$\varepsilon = i(R_۱ + R_۲) \Rightarrow ۱۲ = (۲\times۱۰^{-۳})(۲\times۱۰^۳ + R_۲) \Rightarrow$$
$$R_۲ = ۴\times۱۰^۳\Omega$$

●●۴۵- تعدادی مقاومت ۱۰ اهمی در اختیار است که توان مصرفی هر کدام بدون سوختن ۱/۰W است. کمترین تعداد این‌گونه مقاومتها چقدر باید باشد تا ترکیبی از آنها به طور متوالی یا موازی با مقاومت ۱۰Ω ایجاد شود و دست کم توان مصرفی ۵/۰W را داشته باشد؟

حل: با توجه به اینکه مقاومت معادل با مقاومت اولیه برابر است لذا تعداد ردیف با تعداد مقاومت‌هایی که در هر ردیف وجود دارد برابر است. از طرف دیگر چون توان مصرفی مجموع 5W است لذا اگر n تعداد ردیفها باشد در هر ردیف n مقاومت وجود دارد. بیشترین جریانی که از هر مقاومت می‌گذرد برابر است با:

$$P_۱ = R i_۱^۲ \Rightarrow ۱ = ۱۰ i_۱^۲ \Rightarrow i_۱ = ۰/۳۱۶A$$

جریان کل برابر است با:

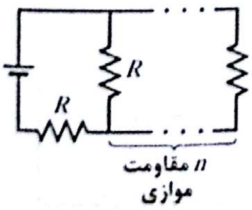
$$۵ = ۱۰ i^۲ \Rightarrow i = ۰/۷۰۷A$$

تعداد ردیف‌ها برابر است با:

$$n = \frac{i}{i_۱} = \frac{۰/۷۰۷}{۰/۳۱۶} = ۲/۲۴$$

و چون می‌خواهیم از سوختن مقاومتها جلوگیری شود لذا باید $n = ۳$ باشد.

●●۴۶- در شکل ۲۳-۵۵، آرایه‌ای شامل n مقاومت موازی به طور متوالی به یک باتری آرمانی و یک مقاومت بسته شده‌اند. اندازهٔ همهٔ مقاومتها یکسان است. اگر مقاومت یکسانی به طور موازی به این آرایش افزوده شود، جریان باتری به اندازهٔ ۱/۲۵٪ تغییر می‌کند. مقدار n چیست؟



شکل ۲۳-۵۵ مسئلهٔ ۴۶

حل: مقاومت معادل برابر است با

$$R_{eq} = R + \frac{R}{n} = \frac{(n+1)R}{n}$$

Scanned by CamScanner

در این حالت جریان در باتری برابر است با:

$$i_n=\frac{\varepsilon}{R_{eq}}=\frac{n\varepsilon}{(n+1)R}$$

لذا i_{n+1} برابر است با:

$$i_{n+1}=\frac{(n+1)\varepsilon}{(n+2)R}$$

برای اینکه افزایش نسبی برابر با $\frac{۱}{۸۰}=۰/۰۱۲۵$ باشد باید داشته باشیم:

$$\frac{i_{n+1}-i_n}{i_n}=\frac{i_{n+1}}{i_n}-۱=\frac{\left(\frac{n+۱}{n+۲}\right)}{\left(\frac{n}{n+۱}\right)}-۱=\frac{۱}{۸۰}\Rightarrow n=۸$$

●●۴۷- یک سیم مسی به شعاع $a=۰/۲۵۰\,mm$ دارای یک پوشش آلومینیومی به شعاع خارجی $b=۰/۳۸۰\,mm$ است. در سیم مرکب جریان $i=۲/۰۰A$ وجود دارد. با استفاده از جدول ۲۲-۱، جریان در (الف) مس و (ب) آلومینیوم را محاسبه کنید. (پ) اگر اختلاف پتانسیل $V=۱۲/۰V$ میان دو سر جریان را ثابت نگهدارد، طول سیم مرکب چقدر است؟ SSM

حل: $A_{Cu}=\pi a^۲(۳/۱۴)(۰/۲۵\times۱۰^{-۳})^۲=۱/۹۶\times۱۰^{-۷}\,m^۲$

$$A_{Al}=\pi(b^۲-a^۲)=(۳/۱۴)[(۰/۳۸)^۲-(۰/۲۵)^۲]\times۱۰^{-۶}$$

$$=۲/۵۷\times۱۰^{-۷}\,m^۲$$

$$R_{Cu}=\rho_{Cu}\frac{L_{Cu}}{A_{Cu}}=(۱/۶۹\times۱۰^{-۸})\frac{L}{(۱/۹۶\times۱۰^{-۷})}=۸/۶۲\times۱۰^{-۲}\,L$$

$$R_{Al}=\rho_{Al}\frac{L_{Al}}{A_{Al}}=(۲/۷۵\times۱۰^{-۸})\frac{L}{(۲/۵۷\times۱۰^{-۷})}=۰/۱۰۷L$$

مقاومت معادل دو سیم موازی برابر است با:

$$R_{eq}=\frac{R_{Cu}R_{Al}}{R_{Cu}+R_{Al}}=۴/۷۷\times۱۰^{-۲}\,L$$

(الف) حال با توجه به اینکه $i_{Cu}+i_{Al}=i=۲A$ است چنانچه اختلاف دو سیم را V فرض کنیم، خواهیم داشت

$$V=R_{Cu}i_{Cu}=R_{Al}i_{Al}\Rightarrow(۸/۶۲\times۱۰^{-۲}\,L)i_۱=(۰/۱۰۷)(۲-i_۱)$$

$$\Rightarrow ۰/۸۱i_{Cu}=۲-i_{Cu}\Rightarrow i_{Cu}=۱/۱A$$

(ب) $i_{Al}=۲-۱/۱=۰/۹A$

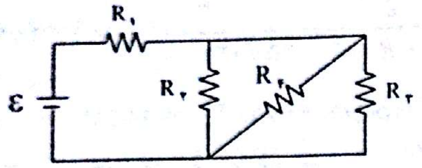
(پ) $R_{eq}=\frac{V}{i}=\frac{۱۲}{۲}=۶\Omega$

و از رابطه $R_{eq}=۴/۷۷\times۱۰^{-۲}\,L$ که به دست آوردیم، خواهیم داشت:

$$۶=۴/۷۷\times۱۰^{-۲}\,L=۱۲۵/۸\,m$$

●●۴۸- در شکل ۲۳-۵۱، $R_۱=۷/۰۰\Omega$، $R_۲=۱۲/۰\,\Omega$، $R_۳=۴/۰۰\Omega$ و emf باتری آرمانی $\varepsilon=۲۴/۰V$ است. به ازای چه مقدار $R_۴$ آهنگ انتقال انرژی باتری به مقاومتها برابر با (الف) ۶۰/۰W، (ب) بیشینه آهنگ ممکن P_{max} و (پ) کمینه آهنگ ممکن P_{min} است؟ (پ) P_{max} و (ت) P_{min} چقدرند؟

حل:



برای به دست آوردن مقاومت معادل مدار، ابتدا $R_{۲۳۴}$ را که مقاومت معادل $R_۲$، $R_۳$ و $R_۴$ که موازی‌اند را به دست می‌آوریم.

$$\frac{۱}{R_{۲۳۴}}=\frac{۱}{R_۲}+\frac{۱}{R_۳}+\frac{۱}{R_۴}=\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{R_۴}\Rightarrow R_{۲۳۴}=\frac{۳R_۴}{R_۴+۳}$$

و مقاومت معادل مدار برابر است با:

$$R_{eq}=R_۱+R_{۲۳۴}=۷+\frac{۳R_۴}{R_۴+۳}=\frac{۱۰R_۴+۲i}{R_۴+۳}$$

(الف) حال با توجه به رابطه توان داریم:

$$P=\frac{\varepsilon^۲}{R_{eq}}\Rightarrow ۶۰=\frac{(۲۴)^۲}{R_{eq}}\Rightarrow R_{eq}=۹/۶\Omega$$

در نتیجه می‌توان از رابطه برای R_{eq}، $R_۴$ را به دست آورد.

$$۹/۶=\frac{۱۰R_۴+۲۱}{R_۴+۳}\Rightarrow R_۴=۱۹/۵\Omega$$

(ب) با توجه به اینکه $P\propto\frac{۱}{R_{eq}}$ است لذا باید R_{eq} کمینه باشد و در نتیجه $R_۴$ باید برابر صفر باشد.

(پ) در اینجا باید R_{eq} را بیشینه کنیم یعنی باید $R=\infty$ شود.

(ت) با توجه به قسمت (ب) کمینه مقدار R_{eq} برابر است با ۷Ω، لذا می‌توان نوشت:

$$P_{max}=\frac{\varepsilon^۲}{R_{eq,min}}=\frac{(۲۴)^۲}{۷}=۸۲/۳W$$

(ث) برای این حالت دیدیم که باید $R_۴=\infty$ باشد لذا R_{eq} چنین می‌شود:

$$R_{eq,max}=\frac{۱۰R_۴+۲۱}{R_۴+۳}=\left.\frac{۱۰+\frac{۲۱}{R_۴}}{۱+\frac{۳}{R_۴}}\right|_{R_۴=\infty}=۱۰\Omega$$

در نتیجه

$$P_{min}=\frac{\varepsilon^۲}{R_{eq,max}}=\frac{(۲۴)^۲}{۱۰}=۵۷/۶W$$

بخش ۲۳-۸ آمپرسنج و ولت‌سنج

●●۴۹- در شکل ۲۳-۱۴، فرض کنید که $\varepsilon=۳/۰V$، $r=۱۰۰\Omega$، $R_۱=۲۵۰\Omega$ و $R_۲=۳۰۰\Omega$ باشد. اگر مقاومت R_V ولت‌سنج برابر با ۵/۰kΩ باشد، به هنگام اندازه‌گیری اختلاف پتانسیل دو سر $R_۱$ چند درصد خطا وجود خواهد داشت؟ از وجود آمپرسنج چشم‌پوشی کنید.

Scanned by CamScanner

حل: ابتدا فرض می‌کنیم ولت‌سنج در مدار نباشد، اختلاف پتانسیل دو سر Cd را به دست می‌آوریم که آن را V_1 می‌نامیم. از قاعده حلقه می‌توان نوشت:

$$i=i_1=\frac{\varepsilon}{R_1+R_2+۲}=\frac{۳}{۲۵۰+۳۰۰+۱۰۰}=۴/۶۲\times۱۰^{-۳}\ A$$

$$V_1=R_1i_1=(۲۵۰)(۴/۶۲\times۱۰^{-۳})=۱/۱۵۵\ V$$

حال ولت‌سنج را در مدار در نظر می‌گیریم.

$$R_1'=\frac{R_1R_V}{R_1+R_V}=\frac{(۲۵۰)(۵۰۰۰)}{۲۵۰+۵۰۰۰}=۲۳۸\Omega$$

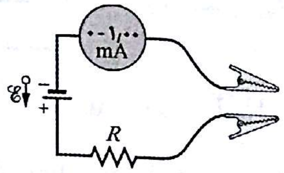
مجدداً از قاعده حلقه خواهیم داشت

$$i'=i_1'=\frac{\varepsilon}{R_1'+R_2+r}=\frac{۳}{۲۳۸+۳۰۰+۱۰۰}=۴/۷\times۱۰^{-۳}\ A$$

$$V_1'=R_1'i_1'=(۲۳۸)(۴/۷\times۱۰^{-۳})=۱/۱۱۹\ V$$

$$\frac{\Delta V}{V_1}=\frac{(۱/۱۵۵-۱/۱۱۹)}{۱/۱۵۵}=۰/۰۳۱$$ یا ٪۳۱

۵۰●●- همان‌طور که در شکل ۲۳-۵۶ نشان داده شده است، یک اهم‌سنج ساده با اتصال یک باتری ۱/۵۰ ولتی به طور متوالی با یک مقاومت R و آمپرسنجی که از ۰ تا ۱/۰۰mA را می‌تواند بخواند ساخته شده است. مقاومت R طوری تنظیم می‌شود که هرگاه گیره‌ها به هم وصل شوند، اهم‌سنج با تمام مقیاس ۱/۰۰mA منحرف می‌شود. اندازهٔ مقاومت خارجی که باعث انحراف (الف) ۱۰٪ و (ب) ۵۰٪ و (پ) ۹۰٪ تمام مقیاس می‌شود چقدر است؟ (ت) اگر مقاومت آمپرسنج ۲۰/۰Ω و مقاومت درونی باتری ناچیز باشد، مقدار R چقدر است؟



شکل ۲۳-۵۶ مسئلهٔ ۵۰

حل: وقتی گیره‌ها را می‌بندیم، داریم:

$$i=\frac{\varepsilon}{R}\Rightarrow ۱\times۱۰^{-۳}=\frac{۱/۵}{R}\Rightarrow R=۱۵۰۰\Omega$$

(الف)
$$i_1=(۰/۱)(۱\times۱۰^{-۳})=۱\times۱۰^{-۴}\ A$$

$$i_1=\frac{\varepsilon}{R+R_1}\Rightarrow ۱\times۱۰^{-۴}=\frac{۱/۵}{۱۵۰۰+R_1}\Rightarrow R_1=۱/۳۵\times۱۰^{۴}\ \Omega$$

(ب)
$$i_2=(۰/۵)(۱\times۱۰^{-۳})=۵\times۱۰^{-۴}\ A$$

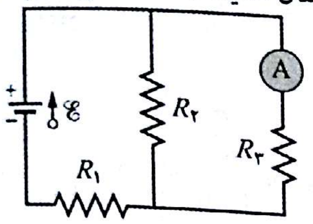
$$i_2=\frac{\varepsilon}{R+R_2}\Rightarrow ۵\times۱۰^{-۴}=\frac{۱/۵}{۱۵۰۰+R_2}\Rightarrow R_2=۱۵۰۰\Omega$$

(پ)
$$i_3=(۰/۹)(۱\times۱۰^{-۳})=۹\times۱۰^{-۴}\ A$$

$$i_3=\frac{\varepsilon}{R+R_3}\Rightarrow ۹\times۱۰^{-۴}=\frac{۱/۵}{۱۵۰۰+R_3}\Rightarrow R_3=۱۶۶/۷\Omega$$

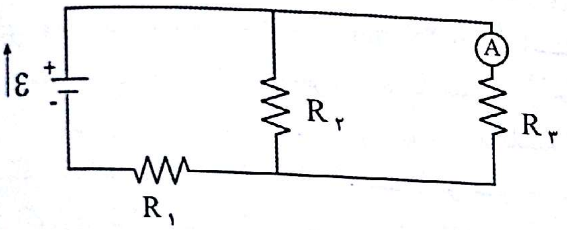
(ت)
$$i=\frac{\varepsilon}{R+r}\Rightarrow ۱\times۱۰^{-۳}=\frac{۱/۵}{R+۲۰}\Rightarrow R_2=۱۴۸۰\Omega$$

۵۱●●-(الف) در شکل ۲۳-۵۷، اگر $\varepsilon=۵/۰V$ (باتری آرمانی)، $R_1=۲/۰\Omega$، $R_2=۴/۰\Omega$ و $R_3=۶/۰\Omega$ باشد، آمپرسنج چه عددی را نشان می‌دهد. (ب) حال جای آمپرسنج و باتری را عوض می‌کنیم. نشان دهید که عدد آمپرسنج تغییر نمی‌کند. HRW



شکل ۲۳-۵۷ مسئلهٔ ۵۱

حل:



(الف)
$$R_{23}=\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}=\frac{(۴)(۶)}{۴+۶}=۲/۴\Omega$$

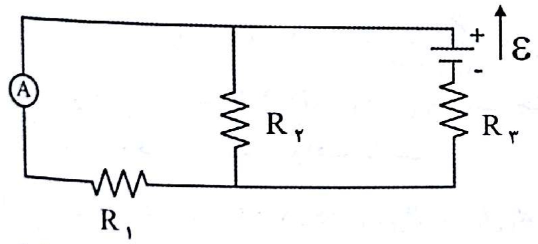
$$R_{eq}=R_1+R_{23}=۲+۲/۴=۴/۴\Omega$$

$$i=i_1=\frac{\varepsilon}{R_{eq}}=\frac{۵}{۴/۴}=۱/۱۴V$$

$$V_{23}=R_{23}i=(۲/۴)(۱/۱۴)=۲/۷۴V$$

$$i_A=i_3=\frac{V_{23}}{R_3}=\frac{۲/۷۴}{۶}=۰/۴۶A$$

(ب) چنانچه جای آمپرمتر و باتری را عوض کنیم، داریم:



$$R_{12}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=\frac{(۲)(۴)}{۲+۴}=۱/۳۳\Omega$$

$$R_{eq}=R_3+R_{12}=۶+۱/۳۳=۷/۳۳\Omega$$

$$i=i_{12}=\frac{\varepsilon}{R_{eq}}=\frac{۵}{۷/۳۳}=۰/۶۸۲A$$

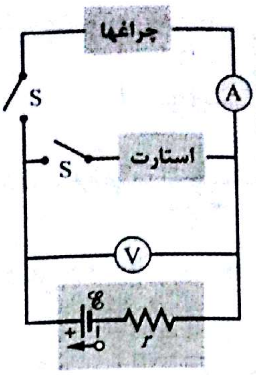
$$V_{12}=R_{12}i_{12}=(۱/۳۳)(۰/۶۸۲)=۰/۹۱V$$

$$i_A=i_1=\frac{V_{12}}{R_1}=\frac{۰/۹۱}{۲}=۰/۴۵۵A$$

۵۲●●- وقتی چراغهای اتومبیلی روشن شود، آمپرسنج متوالی با آنها ۱۰/۰A و ولت‌سنج متصل به دو سر آنها ۱۲/۰V را نشان می‌دهند (شکل ۲۳-۵۸). وقتی استارت زده شود آمپرسنج به عدد ۸/۰۰A کاهش می‌یابد و نور چراغها اندکی کم می‌شود.

Scanned by CamScanner

اگر مقاومت درونی باتری $۰/۰۵۰۰\Omega$ و مقاومت آمپرسنج ناچیز باشد، (الف) emf باتری و (ب) جریانی که در هنگام روشن شدن چراغها از استارت می‌گذرد، چقدر است؟



شکل ۲۳-۵۸ مسئلهٔ ۵۲

حل: (الف) در این حالت ابتدا مقاومت R_L چراغ را که در قسمتهای بعدی لازم داریم، حساب می‌کنیم.

$$i=\frac{V}{R_L}\Rightarrow ۱۰=\frac{۱۲}{R_L}\Rightarrow R_L=۱/۲\Omega$$

حال emf باتری را به دست می‌آوریم:

$$\varepsilon=V+ir=۱۲+(۱۰)(۰/۰۵)=۱۲/۵\text{V}$$

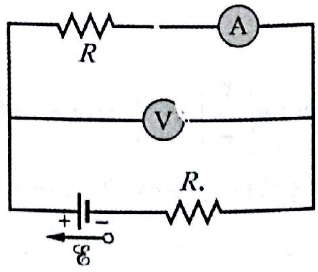
(ب) وقتی استارت زده می‌شود، داریم:

$$V=R_L i\Rightarrow ۱۲=(۱/۲)(۸)=۹/۶\text{V}$$
$$V=\varepsilon-r_i\Rightarrow ۹/۶=۱۲/۵-(۰/۰۵)i\Rightarrow i=۵۸\text{A}$$

و جریانی که از استارتر می‌گذرد برابر است با:

$$i_S=۵۸-۸=۵۰\text{A}$$

••۵۳- در شکل ۲۳-۵۹، ولت‌سنجی با مقاومت $R_V=۳۰۰\Omega$ و آمپرسنجی با مقاومت $R_A=۳/۰۰\Omega$ برای اندازه‌گیری مقاومت R در مداری که همچنین شامل یک مقاومت $R_۰=۱۰۰\Omega$ و یک باتری آرمانی با $\varepsilon=۱۲/۰\text{V}$ است، به کار برده می‌شوند. مقاومت R با رابطهٔ $R=V/i$ داده می‌شود که V اختلاف پتانسیل دو سر R و i مقدار خوانده شده توسط آمپرسنج است. ولت‌سنج عدد V' را نشان می‌دهد که عبارت است از V بعلاوهٔ اختلاف پتانسیل دو سر آمپرسنج. بنابراین، نسبت دو مقدار خوانده شده R نیست بلکه *مقاومت ظاهری* $R=V'/i$ است. اگر $R=۸۵/۰\Omega$ باشد، (الف) مقدار خوانده شده توسط آمپرسنج، (ب) مقدار خوانده شده توسط ولت‌سنج و (پ) R' چقدر است؟ (ت) اگر R_A کم شود، آیا اختلاف میان R' و R افزایش می‌یابد یا کاهش یا یکسان می‌ماند؟



شکل ۲۳-۵۹ مسئلهٔ ۵۳

حل: (الف) جریان عبوری از $R_۰$ را $i_۱$ و جریان عبوری از R و آمپرسنج را $i_۲$ می‌نامیم. با استفاده از قاعدهٔ حلقه می‌توان نوشت:

$$\varepsilon-R_V(i_۱-i_۲)-R_۰i_۱=۰$$
$$R_V(i_۱-i_۲)-Ri_۲-R_Ai_۲=۰$$

که با قرار دادن مقادیر عدد و حل همزمان دو معادله خواهیم داشت $i_۱=۰/۰۷۱\text{A}$ و $i_۲=i_A=۰/۰۵۵\text{A}$.

(ب) عددی که ولت‌سنج نشان می‌دهد برابر است با

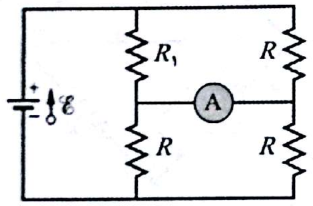
$$V'=R_V(i_۱-i_۲)=(۳۰۰)(۰/۰۱۶)=۴/۸۵\text{V}$$

(پ) مقاومت ظاهری R' برابر خواهد بود با

$$R'=\frac{V'}{i_A}=\frac{۴/۸۵}{۰/۰۵۵}=۸۸\Omega$$

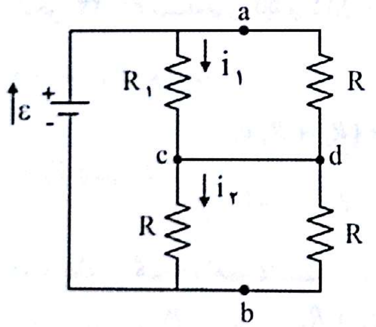
(ت) با توجه به اینکه $R=R'-R_A$ لذا وقتی R_A کاهش یابد اختلاف بین R و R' نیز کاهش می‌یابد و وقتی که $R_A=۰$ شود، داریم $R'=R$.

۵۴- در شکل ۲۳-۶۰، $R_۱=۲/۰۰R$ ، مقاومت آمپرسنج صفر و باتری آرمانی است. چه مضربی از ε/R جریان آمپرسنج را به دست می‌دهد؟



شکل ۲۳-۶۰ مسئلهٔ ۵۴

حل:



آمپرسنج آرمانی است لذا مقاومتی ندارد و می‌توان مقاومت معادل را به صورت زیر به دست آورد:

$$R'_۱=\frac{R_۱R}{R_۱+R}=\frac{۲}{۳}R\qquad R'_۲=\frac{R}{۲}$$

$$R_{eq}=R'_۱+R'_۲=\frac{۲}{۳}R+\frac{R}{۲}=\frac{۷}{۶}R$$

$$V_{ac}=\frac{\varepsilon}{\frac{۷}{۶}R}\cdot R'_۱=\frac{۶\varepsilon}{۷R}\cdot\frac{۲}{۳}R=\frac{۴}{۷}\varepsilon$$

و همچنین داریم:

$$i_۱=\frac{V_{ac}}{R_۱}=\frac{\frac{۴}{۷}\varepsilon}{۲R}=\frac{۲\varepsilon}{۷R}$$

Scanned by CamScanner

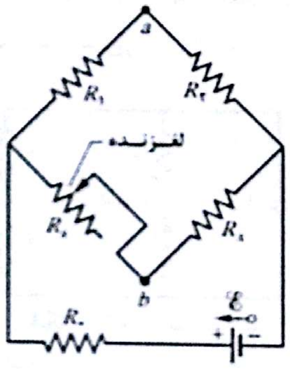
حال می‌توان نوشت:

$$V_{cb} = \varepsilon - V_{ac} = \varepsilon - \frac{۴}{۷}\varepsilon = \frac{۳}{۷}\varepsilon$$

$$i_۲ = \frac{V_{cb}}{R} = \frac{\frac{۳}{۷}\varepsilon}{R} = \frac{۳}{۷}\frac{\varepsilon}{R}$$

$$i_A = i_۲ - i_۱ = \frac{\varepsilon}{۷R} = ۰/۱۴۳$$

●●۵۵- در شکل ۲۳-۶۱، مقدار R_s طوری تنظیم می‌شود که با حرکت دادن لغزنده روی آن پتانسیل نقطه‌های a و b برابر شود. (این شرط را با بستن یک آمپرسنج حساس بین نقطهٔ a و نقطهٔ b می‌توان برقرار کرد؛ اگر این نقطه‌ها در یک پتانسیل باشند، آمپرسنج منحرف نمی‌شود.) نشان دهید که هرگاه این تنظیم انجام شود، این رابطه برقرار است: $R_x = R_s R_۲ / R_۱$. مقاومت مجهول (R_x) را با استفاده از این دستگاه که پل وتستون نامیده می‌شود می‌توان برحسب مقاومت استاندارد (R_s) اندازه‌گیری کرد.



شکل ۲۳-۶۱ مسئله‌های ۵۵ و ۱۱۱

حل: از قاعدهٔ حلقه می‌توان نوشت:

$$(R_۱ + R_۲)i_۱ = (R_S + R_x)i_۲$$

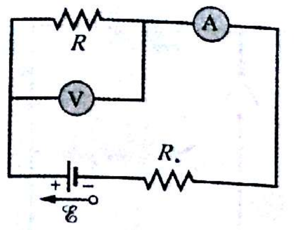
و چون $V_b - V_a = ۰$ است، لذا:

$$R_۱ i_۱ = R_S i_۲$$

با تقسیم کردن دو رابطه بر هم خواهیم داشت:

$$\frac{R_۱ + R_۲}{R_۱} = \frac{R_S + R_x}{R_S} \Rightarrow R_x = \frac{R_۲}{R_۱} R_S$$

●●۵۶- در شکل ۲۳-۶۲ ولت‌سنجی با مقاومت $R_V = ۳۰۰\,\Omega$ و آمپرسنجی با مقاومت $R_A = ۳/۰۰\Omega$ برای اندازه‌گیری مقاومت R در مداری که در آن یک مقاومت $R_۰ = ۱۰۰\Omega$ و یک باتری آرمانی با $\mathscr{E} = ۱۲/۰\,V$ نیز وجود دارد، به کار برده می‌شوند. مقاومت R با رابطهٔ $R = V/i$ داده می‌شود که V مقدار نشان داده شده توسط ولت‌سنج و i جریان در مقاومت R است. ولی، آمپرسنج مقدار i را نشان نمی‌دهد بلکه مقدار i' را نشان می‌دهد، که عبارت است از i بعلاوهٔ جریانی که از ولت‌سنج می‌گذرد. بنابراین، نسبت دو مقدار خوانده شده R نیست بلکه فقط یک مقاومت ظاهری $R' = V/i'$ است. اگر $R = ۸۵/۰\Omega$ باشد، (الف) مقدار نشان داده شدهٔ آمپرسنج، (ب) مقدار نشان داده شدهٔ ولت‌سنج و (پ) R' چقدر است؟ (ت) اگر R_V افزایش یابد، آیا اختلاف میان R' و R افزایش می‌یابد یا کاهش یا یکسان می‌ماند؟



شکل ۲۳-۶۲ مسئلهٔ ۵۶

حل: (الف)

$$R'_۱ = \frac{RR_V}{R + R_V} = \frac{(۸۵)(۳۰۰)}{۸۵ + ۳۰۰} = ۶۶/۲\Omega$$

$$R_{eq} = R'_۱ + R_A + R_۰ = ۶۶/۲ + ۳ + ۱۰۰ = ۱۶۹/۲\Omega$$

$$i = i_A = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{۱۲}{۱۶۹/۲} = ۷/۱ \times ۱۰^{-۲}\ A$$

(ب)

$$V = R'_۱ i = (۶۶/۲)(۷/۱ \times ۱۰^{-۲}) = ۴/۷۷V$$

(پ)

$$R' = R'_۱ = ۶۶/۲\Omega$$

(ت) اگر R_V افزایش یابد، اختلاف میان R و R' کاهش می‌یابد. به بیان دیگر وقتی $R_V \to \infty$ میل کند، $R' \to R$ میل می‌کند یعنی ولتمتر بیشتر آرمانی عمل می‌کند.

بخش ۲۳-۹ مدارهای RC

●۵۷- برحسب ثابت زمانی τ، زمان لازم برای باردار شدن یک خازن بدون بار در یک مدار متوالی RC به اندازهٔ ۹۹/۰٪ بار اولیهٔ آن چقدر است؟ SSM

حل: (الف) رابطه باردار شدن خازن در مدار RC عبارت است از:

$$q = q_۰(۱ - e^{-t/\tau})$$

$$۰/۹۹ q_۰ = q_۰(۱ - e^{-t/\tau}) \Rightarrow e^{-t/\tau} = ۰/۰۱ \Rightarrow -t/\tau = Ln(۰/۰۱)$$

$$t = ۴/۶۰۵\tau$$

●۵۸- خازنی با بار اولیهٔ $q_۰$ از طریق مقاومتی تخلیه می‌شود. برحسب ثابت زمانی τ چقدر زمان نیاز است تا خازن (الف) نخست یک سوم از بار خود و (ب) دو سوم بار خود را از دست بدهد؟

حل: از رابطه تخلیه خازن داریم:

$$q = q_۰ e^{-t/\tau}$$

(الف) وقتی یک سوم بار $q_۰$ تخلیه شود، $\frac{۲}{۳}q_۰$ باقی مانده است، لذا:

$$\frac{۲}{۳}q_۰ = q_۰ e^{-t/\tau} \Rightarrow Ln\left(\frac{۲}{۳}\right) = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow t = ۰/۴۰۵\tau$$

(ب) وقتی دو سوم بار $q_۰$ تخلیه شود، یک سوم آن باقی می‌ماند.

$$\frac{۱}{۳}q_۰ = q_۰ e^{-t/\tau} \Rightarrow Ln\left(\frac{۱}{۳}\right) = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow t = ۱/۰۹\tau$$

Scanned by CamScanner

۵۹●● مقاومت ۱۵/۰ kΩ و خازنی به طور متوالی به هم وصل شده‌اند و سپس اختلاف پتانسیل ۱۲/۰ V به طور ناگهانی به دو سر آنها اعمال می‌شود. اختلاف پتانسیل دو سر خازن در مدت ۱/۳۰ μs به ۵/۰۰ V افزایش می‌یابد. (الف) ثابت زمانی مدار را محاسبه کنید. (ب) ظرفیت خازن را پیدا کنید. ILW

حل: (الف) $V(t)=\varepsilon(1-e^{-t/\tau})$

در $t=۱/۳\,\mu s$ داریم $V=۵V$ لذا داریم:

$$۵=(۱۲)(1-e^{-۱/۳\mu s/\tau})\Rightarrow \tau=(۱/۳\mu s)\,Ln\left(\frac{۱۲}{۷}\right)=۲/۴۱\,\mu s$$

(ب) $\tau=RC\Rightarrow ۲/۴۱\times۱۰^{-۶}=۱۵\times۱۰^{۳}\,C$

$$\Rightarrow C=۱/۶\times۱۰^{-۱۰}\ \text{F}$$

۶۰● در یک مدار متوالی RC، $\varepsilon=۱۲/۰\ V$، $R=۱/۴۰\ M\Omega$ و $C=۱/۸۰\ \mu F$ است. (الف) ثابت زمانی را محاسبه کنید. (ب) بیشینهٔ باری را که روی خازن در ضمن باردار شدن ظاهر می‌شود پیدا کنید. (پ) چقدر طول می‌کشد تا خازن تا ۱۶/۰ μC باردار شود؟

حل: (الف) ثابت زمانی خازن برابر است با:

$$\tau=RC=(۱/۴\times۱۰^{۶})(۱/۸\times۱۰^{-۶})=۲/۵۲s$$

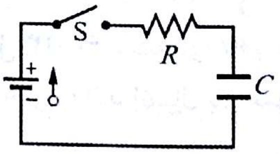
(ب) به ازای $t\to\infty$، بیشینهٔ بار به دست می‌آید.

$$q_{max}=C\varepsilon=(۱/۸\mu F)(۱۲)=۲۱/۶\mu C$$

$$q=q_{max}(1-e^{-t/\tau})\Rightarrow ۱۶=۲۱/۶(1-e^{-t/۲/۵۲})$$

$$\Rightarrow e^{-t/۲/۵۲}=۰/۲۵۹\Rightarrow -\frac{t}{۲۵/۲}=Ln(۰/۲۵۹)\Rightarrow t=۳/۴s$$

۶۱● کلید S در شکل ۲۳-۶۳ در لحظهٔ $t=۰$ بسته می‌شود تا خازن خالی با ظرفیت $C=۱۵/۰\ \mu F$ از طریق مقاومت $R=۲۰/۰\ \Omega$ باردار شود. در چه زمانی پتانسیل دو سر خازن برابر با پتانسیل دو سر مقاومت می‌شود؟



شکل ۲۳-۶۳ مسئله‌های ۶۱ و ۷۶

$$V_C=V_R=\frac{\varepsilon}{۲}$$

$$\tau=RC=(۲۰)(۱۵\times۱۰^{-۶})=۳\times۱۰^{-۴}\ s$$

$$V_c=\varepsilon(1-e)^{-t/z}\Rightarrow \varepsilon/۲=\varepsilon(1-e^{-t/z})$$

$$e^{-t/\tau}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow -\frac{t}{\tau}=Ln\left(\frac{۱}{۲}\right)\Rightarrow t=۲/۰۸\times۱۰^{-۴}\ s$$

۶۲●● خازنی با اختلاف پتانسیل اولیهٔ ۱۰۰ V از طریق مقاومتی وقتی که در لحظهٔ $t=۰$ کلید میان آنها بسته شود شروع به تخلیه می‌کند. در $t=۱۰/۰\ s$، اختلاف پتانسیل دو سر خازن ۱/۰۰ V می‌شود. (الف) ثابت زمانی مدار چقدر است؟ (ب) اختلاف پتانسیل دو سر خازن در $t=۱۷/۰\ s$ چقدر است؟

حل: (الف) در حالت تخلیه داریم

$$V=V_0e^{-t/\tau}$$

$$۱=۱۰۰e^{-۱۰/\tau}\Rightarrow Ln(۰/۰۱)=-\frac{۱۰}{\tau}\Rightarrow \tau=۲/۱۷s$$

(ب) $V=V_0e^{-t/\tau}=(۱۰۰)e^{-۱۷/۲/۱۷}=۳/۹۶\times۱۰^{-۲}\ V$

۶۳●● اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های یک خازن نشتی ۲/۰ μF (بدان معنا که بار از یک صفحه به صفحه دیگر نشت می‌کند) در مدت ۲/۰ s به یک چهارم مقدار اولیهٔ آن می‌رسد. مقاومت معادل بین صفحه‌های خازن چقدر است؟

حل: $V=V_0e^{-t/RC}\Rightarrow Ln\frac{V}{V_0}=-\frac{t}{RC}$

$$\Rightarrow R=-\frac{t}{C\,Ln\frac{V}{V_0}}=-\frac{۲}{(۲\times۱۰^{-۶})Ln\left(\frac{۱}{۴}\right)}=۷/۲۱\times۱۰^{۵}\ \Omega$$

۶۴●● خازن ۱μF با انرژی اولیهٔ ذخیره شدهٔ ۰/۵۰ J از طریق مقاومت ۱MΩ تخلیه می‌شود. (الف) بار اولیه روی خازن چقدر است؟ (ب) وقتی تخلیه شروع شد جریان در مقاومت چقدر است؟ عبارتی پیدا کنید که تابعی برحسب زمان بدهد، (پ) اختلاف پتانسیل V_C دو سر خازن، (ت) اختلاف پتانسیل V_R دو سر مقاومت و (ث) آهنگی را که در آن انرژی گرمایی در مقاومت ایجاد می‌شود، پیدا کنید.

حل: (الف) $U=\frac{q^2}{۲C}\Rightarrow ۰/۵=\frac{q^2}{۲(۱\times۱۰^{-۶})}\Rightarrow q=۱\times۱۰^{-۳}\ C$

(ب) بار خازن در هنگام تخلیه از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$q=q_0e^{-t/\tau}$$

مشتق این رابطه جریان را به دست می‌دهد.

$$i=\left|\frac{dq}{dt}\right|=\frac{q_0}{\tau}e^{-t/\tau}$$

در لحظه شروع $t=۰$ است و داریم

$$i_0=\frac{q_0}{\tau}=\frac{q_0}{RC}=\frac{۱\times۱۰^{-۳}}{(۱\times۱۰^{۶})(۱\times۱۰^{-۶})}=۱\times۱۰^{-۳}\ A$$

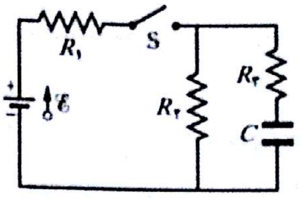
(پ) $q=۱\times۱۰^{-۳}\,e^{-t/\tau}\Rightarrow V_C=\frac{q}{C}e^{-t/\tau}\Rightarrow V_C=۱۰۰۰e^{-t}$

(ت) $V_R=Ri=(۱\times۱۰^{۶})(۱\times۱۰^{-۳}\,e^{-t})=۱۰۰۰e^{-t}$

(ث) $P=Ri^2=(۱\times۱۰^{۶})(۱\times۱۰^{-۳}\,e^{-t})^2=e^{-۲t}$

۶۵●● در مدار شکل ۲۳-۶۴، $\mathcal{E}=۱/۲kV$، $C=۶/۵\ \mu F$، $R_1=R_2=R_3=۰/۷۳M\Omega$. با خازن کاملاً خالی (در $t=۰$) کلید S ناگهان بسته می‌شود. در $t=۰$ (الف) جریان i_1 در مقاومت ۱، (ب) جریان i_2 در مقاومت ۲ و (پ) جریان i_3 در مقاومت ۳ چقدر است؟ در $t=\infty$ (یعنی پس از ثابتهای زمانی زیاد)، (ت) i_1، (ث) i_2 و (ج) i_3 چقدرند؟ اختلاف پتانسیل V_2 در دو سر مقاومت ۱ در (چ) $t=۰$ و (ح) $t=\infty$ چقدر است؟ (خ) V_2 را برحسب t میان این دو زمان حدی رسم کنید. SSM WWW

Scanned by CamScanner



شکل ۲۳-۶۴ مسئله ۶۵

حل: در لحظه بسته شدن کلید $t=۰$ خازن بدون بار است و خازن مانند اتصال کوتاه عمل می‌کند در نتیجه می‌توان نوشت

$$R_{۲۳}=\frac{R_۲R_۳}{R_۲+R_۳}=۰/۳۶۵\,M\Omega$$

$$R_{eq}=R_۱+R_{۲۳}=۰/۷۳+۰/۳۶۵=۱/۰۹۵\,M\Omega$$

$$i=\frac{\varepsilon}{R_{eq}}=\frac{۱/۲\times۱۰^۳}{۱/۰۹۵\times۱۰^۶}=۱/۱\times۱۰^{-۳}\,A$$

(الف) $i_۱=i=۱/۱\times۱۰^{-۳}\,A$

(ب) $V_۲=R_{۲۳}i=(۰/۳۶۵\times۱۰^۶)(۱/۱\times۱۰^{-۳})=۴۰۱/۵V$

$$i_۲=\frac{V_۲}{R_۲}=\frac{۴۰۱/۵}{۰/۷۳\times۱۰^۶}=۵/۵\times۱۰^{-۴}\,A$$

(پ) با توجه به اینکه مقاومت‌های $R_۲$ و $R_۳$ یکسان هستند، لذا داریم:

$$i_۳=i_۲=۵/۵\times۱۰^{-۴}\,A$$

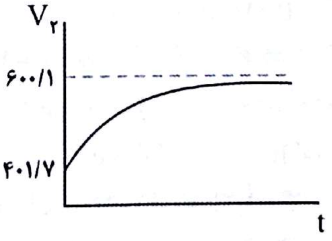
(ت) و (ث) پس از گذشت بسیار زیاد زمان، $t\to\infty$، خازن مانند اتصال باز عمل می‌کند و مقاومت $R_۳$ از مدار حذف می‌شود.

$$i_۱=i_۲=\frac{\varepsilon}{R_۱+R_۲}=\frac{۱/۲\times۱۰^۳}{۲(۰/۷۳\times۱۰^۶)}=۸/۲۲\times۱۰^{-۴}\,A$$

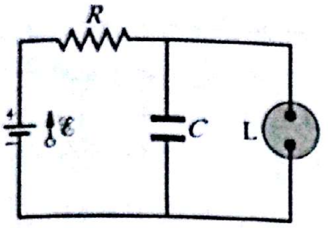
(ج) همانطور که دیدیم جریان این شاخه صفر است یعنی $i_۳=۰$ است.

(چ) تا (خ) در بخش (الف) و (ب) در $t=۰$ دیدیم که ولتاژ دو سر $R_۲$ برابر بود با $V_۲=۴۰۱/۵V$. در $t\to\infty$

$$V_۲=R_۲i_۲=(۰/۷۳\times۱۰^۶)(۸/۲۲\times۱۰^{-۴})=۶۰۰V$$



●●۶۶- شکل ۲۳-۶۵ مدار یک لامپ چشمک‌زن را، مانند لامپی که در محلی در بزرگراهها بسته می‌شود، نشان می‌دهد. لامپ فلورسنت L (با ظرفیت ناچیز) به طور موازی به خازن C در یک مدار RC وصل شده است. فقط هنگامی که اختلاف پتانسیل دو سر لامپ به ولتاژ فروریزش V_L می‌رسد جریانی از لامپ می‌گذرد. در این حال خازن به طور کامل از طریق لامپ تخلیه می‌شود و لامپ برای مدت کوتاهی چشمک می‌زند. در مورد لامپی با ولتاژ فروریزش $V_L=۷۲/۰V$ که به باتری آرمانی $۹۵/۰V$ و خازن $۰/۱۵۰\mu F$ وصل شده است، چه مقاومت R برای دو چشمک در ثانیه لازم است.



شکل ۲۳-۶۵ مسئله ۶۶

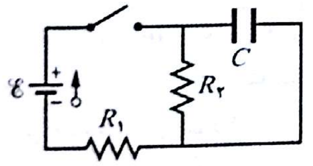
حل: چون می‌خواهیم در هر ثانیه دو چشمک زده شود لذا زمان هر چشمک و رسیدن ولتاژ دو سر لامپ به ولتاژ شکست ۰/۵s می‌شود. خازن از طریق مقاومت تخلیه می‌شود لذا می‌توان زمانی را که پتانسیل دو سر خازن به ولتاژ شکست V_L می‌رسد را از رابطه زیر به دست آورد.

$$V_L=\varepsilon(1-e^{-t/RC})\Rightarrow e^{-t/RC}=\frac{\varepsilon-V_L}{\varepsilon}$$

$$-\frac{t}{RC}=Ln\frac{\varepsilon-V_L}{\varepsilon}\Rightarrow R=\frac{t}{C\,Ln\left[\varepsilon/(\varepsilon-V_L)\right]}$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده $R=۲/۳۵\times۱۰^۶\,\Omega$ به دست می‌آید.

●●۶۷- در شکل ۲۳-۶۶، $R_۱=۱۰/۰\,k\Omega$، $R_۲=۱۵/۰\,k\Omega$، $C=۰/۴۰۰\mu F$ و emf باتری آرمانی $\varepsilon=۲۰/۰V$ است. نخست کلید بسته می‌شود و زمانی طولانی می‌گذرد تا حالت پایا برقرار شود. سپس کلید در لحظهٔ $t=۰$ باز می‌شود. جریان در مقاومت ۲ در $t=۴/۰۰ms$ چقدر است؟



شکل ۲۳-۶۶ مسئله‌های ۶۷ و ۹۷

حل: در حالت پایا، خازن مانند اتصال باز عمل می‌کند و داریم:

$$i_۱=i=\frac{\varepsilon}{R_۱+R_۲}=\frac{۲۰}{(۱۰+۱۵)\times۱۰^۳}=۸\times۱۰^{-۴}\,A$$

$$V_C=V_۲=R_۲i_۲=(۱۵\times۱۰^۳)(۰/۴\times۱۰^{-۶})\Rightarrow V_C=۱۲V$$

در حالتی که کلید باز می‌شود، در $t=۰$، C و R تشکیل یک حلقه بسته و مدار RC را تشکیل می‌دهند

$$\tau=R_۲C=(۱۵\times۱۰^۳)(۰/۴\times۱۰^{-۶})=۶\times۱۰^{-۳}\,s$$

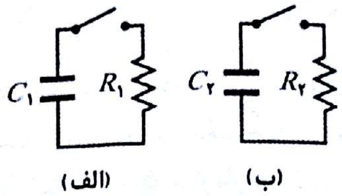
برای تخلیه خازن داریم، $i_۰=۸\times۱۰^{-۴}\,A$ است

$$i=i_۰e^{-t/\tau}=(۶\times۱۰^{-۳})e^{-۴/۶}=۴/۱۱\times۱۰^{-۴}\,A$$

●●●۶۸- شکل ۲۳-۶۷ دو مدار با یک خازن باردار را نشان می‌دهد که باید از طریق مقاومتی در حالت بسته بودن کلید تخلیه شود. در شکل ۲۳-۵۶ الف، $R_۱=۲۰/۰\,\Omega$ و $C_۱=۵/۰۰\mu F$ است. در شکل ۲۳-۵۶ ب، $R_۲=۱۰/۰\,\Omega$ و $C_۲=۸/۰۰\mu F$

Scanned by CamScanner

است. نسبت بارهای اولیه روی دو خازن $q_{۰۲}/q_{۰۱}=۱/۵۰$ است. در لحظهٔ $t=۰$ هر دو کلید بسته می‌شوند. در چه زمان t بار دو خازن برابر خواهد شد؟



شکل ۲۳-۶۷ مسئلهٔ ۶۸

حل: $q_۱ = q_{۰۱}e^{-t/\tau_۱}$ $\qquad q_۲ = q_{۰۲}e^{-t/\tau_۲}$

$\tau_۱ = R_۱C_۱ = ۱\times۱۰^{-۴}\ s \qquad \tau_۲ = R_۲C_۲ = ۸۰\times۱۰^{-۶}\ s$

$$q_۱ = q_۲ \Rightarrow q_{۰۱}e^{-t/\tau_۱} = q_{۰۲}e^{-t/\tau_۲} \Rightarrow e^{-t/\tau_۱} = (۱/۵)e^{-t/\tau_۲}$$

$$\Rightarrow e^{\left(\frac{۱}{\tau_۲}-\frac{۱}{\tau_۱}\right)t} = ۱/۵ \Rightarrow \left(\frac{۱}{۸۰\times۱۰^{-۶}} - \frac{۱}{۱\times۱۰^{-۴}}\right)t = Ln(۱/۵)$$

$$\Rightarrow t = ۱/۶۲\times۱۰^{-۴}\ s$$

۶۹●●●- مقاومت $۳/۰۰M\Omega$ و خازن $۱/۰۰\mu F$ با باتری آرمانی $\varepsilon = ۴/۰۰V$ به طور متوالی بسته شده‌اند. در زمان $۱/۰۰s$ پس از اتصال، آهنگ (الف) افزایش بار خازن (ب) انرژی ذخیره شده در خازن، (پ) اتلاف انرژی گرمایی به وجود آمده در مقاومت و (ت) انرژی تولید شده توسط باتری، چقدر است؟

حل: (الف) $\tau = RC = (۳\times۱۰^{۶})(۱\times۱۰^{-۶}) = ۳s$

$$q = C\varepsilon(۱-e^{-t/\tau})$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{C\varepsilon}{\tau}e^{-t/\tau} = \frac{(۱\times۱۰^{-۶})(۴)}{۳}e^{-۱/۳} = ۹/۵۵\times۱۰^{-۷}\ A$$

(ب) $U = \frac{q^۲}{۲C} \qquad \frac{dU}{dt} = \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = \frac{C\varepsilon(۱-e^{-t/\tau})}{C}i$

$$\frac{dU}{dt} = (۴)(۱-e^{-۱/۳})(۹/۵۵\times۱۰^{-۷}) = ۱/۰۸\times۱۰^{-۶}\ W$$

(پ) آهنگ اتلاف انرژی در مقاومت $P = Ri^۲$ است. در اینجا $i = ۹/۵۵\times۱۰^{-۷}\ A$ است، لذا داریم:

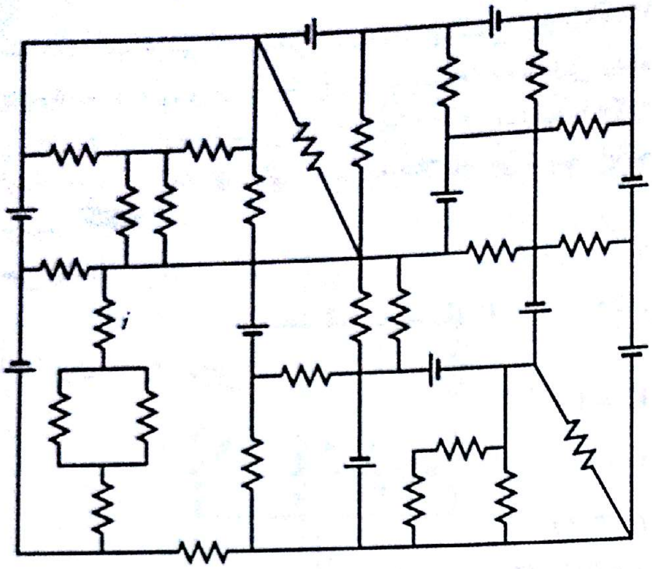
$$P = (۳\times۱۰^{۶})(۹/۵۵\times۱۰^{-۷})^۲ = ۲/۷۴\times۱۰^{-۶}\ W$$

(ت) آهنگ انتقال انرژی از باتری از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$P = \varepsilon i = (۴)(۹/۵۵\times۱۰^{-۷}) = ۳/۸۲\times۱۰^{-۶}\ W$$

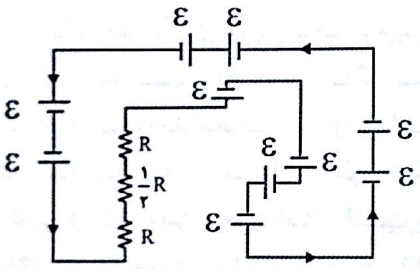
مسئله‌های اضافی

۷۰- (الف) اندازه و (ب) جهت (بالا یا پایین) جریان i در شکل ۲۳-۶۸، که مقدار همهٔ مقاومتها $۴/۰\Omega$ و همهٔ باتریها آرمانی و emf آنها $۱۰V$ است، چیست؟



شکل ۲۳-۶۸ مسئلهٔ ۷۰

حل: (الف) و (ب) در اینجا می‌توان بدون ساده کردن مدار که بسیار وقت‌گیر است و برای به دست آوردن جریان در یک مقاومت معین از قانون حلقه استفاده کرد. مسیر بسته‌ای مطابق مدار زیر را در نظر می‌گیریم که فقط شامل باتری و آن مقاومت باشد.



$$-\varepsilon+\varepsilon-۲/۵Ri+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon-\varepsilon+\varepsilon-\varepsilon = ۰$$

$$۴\varepsilon = ۲/۵Ri \quad \Rightarrow \quad i = ۴A$$

و چون جواب مثبت جهت انتخابی جریان صحیح است.

۷۱- فرض کنید در حالی که روی صندلی نشسته‌اید، جدایی بار بین لباسهایتان و صندلی شما را در پتانسیل $۲۰۰V$ قرار دهد و ظرفیت خازن بین شما و صندلی $۱۵۰pF$ باشد. وقتی می‌ایستید، جدایی بین بدن شما و صندلی زیاد می‌شود و ظرفیت تا $۱۰pF$ کاهش می‌یابد. (الف) حالا پتانسیل بدن شما چقدر است؟ وقتی بار از طریق بدن و کفشها خارج می‌شود (شما خازنی هستید که از طریق یک مقاومت تخلیه انجام می‌گیرد) پتانسیل در طول زمان کاهش می‌یابد. فرض کنید که مقاومت در طول این راه $۳۰۰G\Omega$ باشد. اگر وقتی پتانسیل شما بیشتر از $۱۰۰V$ است و قطعه‌ای الکتریکی را لمس کنید، به آن قطعه آسیب خواهد رسید. (ب) چقدر باید منتظر بمانید تا پتانسیل شما به مقدار ایمن $۱۰۰V$ برسد؟

اگر لباس رسانایی به تن داشته باشید که به زمین متصل باشد، پتانسیل شما تا وقتی که ایستاده‌اید افزایش نمی‌یابد؛ هم‌چنین ممکن است خیلی سریع تخلیه انجام گیرد چون مقاومت از راه اتصال به زمین خیلی کمتر از بدن و کفشهای

Scanned by CamScanner

شماست. (پ) فرض کنید وقتی ایستاده‌اید پتانسیل شما ۱۴۰۰V و ظرفیت صندلی با بدن شما ۱۰pF باشد. مقاومت لباس رسانا تا زمین چقدر باید باشد تا تخلیه در ۱۰۰V در مدت ۰/۳۰ s انجام گیرد، که کمتر از زمانی است که مثلاً بخواهید به رایانه برسید.

حل: (الف)

$q=C_۱V_۱=C_۲V_۲$

$(۱۵۰)(۲۰۰)=(۱۰)V_۲ \Rightarrow V_۲=۳۰۰۰V$

(ب) برای تخلیه داریم

$V_C=V_۰e^{-t/\tau}$

$۱۰۰=۳۰۰۰e^{-t/\tau} \Rightarrow \ln\frac{۱}{۳۰}=-\frac{t}{\tau}$

$t=۳/۴\tau$

$\tau=RC=(۳۰۰\times۱۰^۹)(۱۰\times۱۰^{-۱۲})=۳\,S$

$t=(۳/۴)(۳)=۱۰/۲\,s$

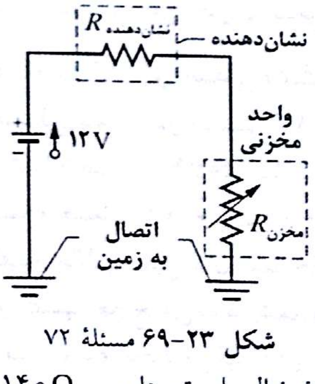
(پ) $V_C=V_۰e^{-t/\tau} \Rightarrow ۱۰۰=۱۴۰۰\,e^{-t/\tau}$

$\ln\frac{۱}{۱۴}=-\frac{۰/۳}{\tau} \Rightarrow \tau=۰/۱۱۴S$

$\tau=RC \Rightarrow ۰/۱۱۴=۱۰\times۱۰^{-۱۲}\,R$

$R=۱/۱۴\times۱۰^{۱۰}\,\Omega$

۷۲- طرحوار دستگاه اندازه‌گیری بنزین یک اتومبیل در شکل ۲۳-۶۹ نشان داده شده است. مقاومت دستگاه نشان دهنده (خط‌چین) ۱۰Ω است. واحد مخزنی شناوری است که به مقاومتی وصل شده است که مقاومت آن به طور خطی برحسب حجم بنزین تغییر می‌کند. وقتی مخزن خالی است مقدار این مقاومت ۱۴۰Ω و وقتی مخزن پر است مقدار آن ۲۰Ω است. وقتی که مخزن (الف) خالی و (ب) نیمه خالی و (پ) پر است، جریان در مدار را پیدا کنید. باتری را آرمانی فرض کنید.



شکل ۲۳-۶۹ مسئلهٔ ۷۲

حل: (الف) مخزن خالی است، داریم $R_{\text{مخزن}}=۱۴۰\Omega$. جریان در مدار برابر است با

$$i=\frac{۱۲}{۱۰+۱۴۰}=۰/۰۸A$$

(ب) با توجه به اینکه رابطهٔ مقاومت مخزن و حجم گازوئیل خطی است. وقتی مخزن نیمه پر است مقاومت مخزن برابر $R_{\text{مخزن}}=\frac{۱}{۲}(۲۰+۱۴۰)=۸۰\Omega$ است.

بنابراین جریان در مدار برابر است با:

$$i=\frac{۱۲}{۱۰+۸۰}=۰/۱۳A$$

(پ) هنگامی که مخزن پر است $R_{\text{مخزن}}=۲۰\Omega$ بود و داریم:

$$i=\frac{۱۲}{۱۰+۲۰}=۰/۴۰A$$

۷۳- کنترل کنندهٔ روی یک اسباب بازی الکترونیکی دارای یک مقاومت متغیر است که به دو سر یک خازن ۰/۲۲۰μF وصل شده است. خازن تا ۵/۰۰V باردار و سپس از طریق یک مقاومت تخلیه می‌شود. زمان کاهش اختلاف پتانسیل دو سر صفحه‌ها به ۰/۸۰۰V با ساعت داخل وسیله اندازه‌گیری می‌شود. اگر گسترهٔ زمان تخلیه که به طور مؤثر می‌تواند تغییر داده شود از ۱۰/۰μs تا ۶/۰۰ms باشد، (الف) مقدار پایین و (ب) مقدار بالای گسترهٔ مقاومت باید چقدر باشد؟ SSM

حل: (الف) برای تخلیه خازن داریم $V=\varepsilon e^{-t/RC}$ و برای $t_{\min}=۱۰\mu s$ داریم

$$e^{-t/RC}=\frac{V}{\varepsilon} \qquad -\frac{t}{RC}=Ln\frac{V}{\varepsilon} \qquad R=\frac{t}{C\,Ln\left(\frac{\varepsilon}{V}\right)}$$

$$R_{\min}=\frac{۱۰\times۱۰^{-۶}}{(۰/۲۲\times۱۰^{-۶})\,Ln(۵/۰/۸)}=۲۴/۸\Omega$$

(ب) به ازای $t_{\max}=۶ms$

$$R_{\max}=\frac{۶\times۱۰^{-۳}}{(۰/۲۲\times۱۰^{-۶})\,Ln(۵/۸)}=۱/۴۹\times۱۰^۴\,\Omega$$

۷۴- (الف) در شکل ۲۳-۴ الف نشان دهید که آهنگ مصرف انرژی در R به صورت انرژی گرمایی، در $R=r$ بیشینه است. (ب) نشان دهید که این توان بیشینه برابر است با $P=\mathcal{E}^۲/۴r$.

حل: (الف) آهنگ اتلاف انرژی گرمایی در R با $P=Ri^۲$ داده می‌شود که $i=\frac{\varepsilon}{R+r}$ است.

$$P=R\left(\frac{\varepsilon}{R+r}\right)^۲$$

برای بیشینه P باید $\frac{dP}{dR}=۰$ باشد.

$$\frac{dP}{dR}=\frac{\varepsilon^۲(R+r)^۲-۲(R+r)\varepsilon^۲R}{(R+r)^۴}=۰ \Rightarrow R=r$$

(ب) به ازای $R=r$، اتلاف در مقاومت R برابر است:

$$P=R\left(\frac{\varepsilon}{r+r}\right)^۲=\frac{\varepsilon^۲}{۴r}$$

۷۵- سیمهای A و B با طولهای مساوی ۴۰/۰m و قطرهای مساوی ۲/۶۰ mm به طور متوالی به هم وصل شده‌اند. اختلاف پتانسیل ۶۰/۰V به دو انتهای سیم مرکب اعمال می‌شود. مقاومت سیمها عبارت‌اند از $R_A=۰/۱۲۷\Omega$، $R_B=۰/۷۲۹\Omega$. در مورد سیم A، (الف) بزرگی J چگالی جریان و (ب) اختلاف پتانسیل V، چقدر است؟ (پ) جنس سیم A از چه ماده‌ای است (به جدول ۲۲-۱ نگاه کنید)؟ در مورد سیم B، (ت) J و (ث) V چقدر است؟ (ج) جنس سیم B از چه ماده‌ای است؟ SSM

Scanned by CamScanner

حل: (الف)

$$A=\pi r^۲=\pi\left(\frac{D}{۲}\right)^۲=(۳/۱۴)(۱/۳\times۱۰^{-۳})^۲$$
$$=۵/۳۱\times۱۰^{-۶}\ m^۲$$
$$R_{eq}=R_A+R_B=۰/۱۲۷+۰/۷۲۹=۰/۸۵۶\Omega$$
$$i=i_A=i_B=\frac{V}{R_{eq}}=\frac{۶۰}{۰/۸۵۶}=۷۰/۱A$$
$$j_A=\frac{i}{A}=\frac{۷۰/۱}{۵/۳۱\times۱۰^{-۶}}=۱/۳۲\times۱۰^۷\ A/m^۲$$

(ب)
$$V_A=R_Ai=(۰/۱۲۷)(۷۰/۱)=۸/۹V$$

(پ)
$$R_A=\rho_A\frac{L}{A}\Rightarrow۰/۱۲۷=\rho_A\frac{۴۰}{۵/۳۱\times۱۰^{-۶}}$$
$$\Rightarrow\rho_A=۱/۶۹\times۱۰^{-۸}\ \Omega\cdot m$$

بنابراین جنس سیم A از مس است.

(ت) $j_B=j_A=۱/۳۲\times۱۰^۷\ A/m^۲$.

(ث) V_B برابر است با

$$V_B=V-V_A=۶۰-۸/۹=۵۱/۱V$$

یا می‌توان گفت

$$V_B=R_Bi=(۰/۷۲۹)(۷۰/۱)=۵۱/۱V$$

(ج)
$$R_B=\rho_B\frac{L}{A}\Rightarrow۰/۷۲۹=\rho_B\frac{۴۰}{۵/۳\times۱۰^{-۶}}$$
$$\rho_B=۹/۶۸\times۱۰^{-۸}\ \Omega\cdot m$$

بنابراین جنس سیم B از آهن است.

۷۶- شکل ۲۳-۶۳ یک باتری آرمانی را با $\varepsilon=۱۲V$ ، مقاومت $R=۴/۰\Omega$ و خازن بدون بار $C=۴/۰\mu F$ نشان می‌دهد. پس از بسته شدن کلید، جریان عبوری از مقاومت، پس از باردار شدن خازن به اندازهٔ $۸/۰\mu C$ چقدر است؟

حل: در حالت شارژ خازن در مدار RC داریم

$$q=\varepsilon C(۱-e^{-t/RC})$$
$$۸=(۱۲)(۴)(۱-e^{-t/RC})\Rightarrow e^{-t/RC}=۰/۸۳۳$$
$$i=\frac{dq}{dt}=\frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC}=\frac{۱۲}{۴}(۰/۸۳۳)\Rightarrow i=۲/۵A$$

۷۷- استارت اتومبیلی خیلی آهسته می‌چرخد و تعمیرکار باید دربارهٔ تعویض آن، کابل یا باتری تصمیم بگیرد. از کتابچهٔ راهنمای اتومبیل معلوم می‌شود که مقاومت درونی باتری ۱۲ ولتی نباید بیشتر از $۰/۰۲۰\Omega$ ، مقاومت استارت نباید بیشتر از $۰/۲۰۰\Omega$ و مقاومت کابل نباید بیشتر از $۰/۰۴۰\Omega$ باشد. تعمیرکار موتور را روشن می‌کند و ولتاژ دو سر باتری را $۱۱/۴V$، ولتاژ دو سر کابل را $۳/۰V$ و جریان را $۵۰A$ اندازه‌گیری می‌کند. کدام قطعه معیوب است؟ SSM

حل: ولتاژ دو سر باتری برابر است با

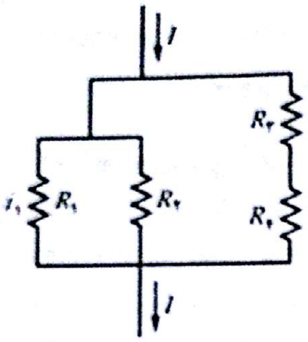
$$V=\varepsilon-ir\Rightarrow۱۱/۴=۱۲-(۵۰)r\Rightarrow$$
$$r=۰/۰۱۲\Omega<۰/۰۲\Omega$$

پس باتری سالم است. مقاومت کابل برابر است با

$$R=\frac{۳۰}{۵۰}=۰/۰۶\Omega>۰/۰۴$$

پس کابل معیوب است و باید تعویض شود.

۷۸- شکل ۲۳-۷۰ قسمتی از مداری را نشان می‌دهد که جریان $I=۶/۰۰A$ از آن می‌گذرد. مقاومتها عبارتند از $R_۱=R_۲=۲/۰۰R_۳=۲/۰۰R_۴=۴/۰۰\Omega$. جریان $i_۱$ در مقاومت ۱ چقدر است؟

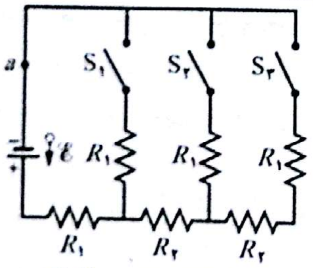


شکل ۲۳-۷۰ مسئلهٔ ۷۸

حل: (الف) با استفاده از مقاومت معادل مسئله را حل می‌کنیم

$$R_{۳۴}=R_۳+R_۴=۴\Omega$$
$$R_{۱۲}=\frac{R_۱R_۲}{R_۱+R_۲}=۲\Omega$$
$$R_{eq}=\frac{R_{۱۲}R_{۳۴}}{R_{۱۲}+R_{۳۴}}=\frac{(۴)(۲)}{۴+۲}=\frac{۴}{۳}\Omega$$
$$V_۱=V=R_{eq}i=\left(\frac{۴}{۳}\right)(۶)=۸V$$
$$i_۱=\frac{V_۱}{R_۱}=\frac{۸}{۴}=۲A$$

۷۹- در شکل ۲۳-۷۱، $R_۱=۲۰/۰\Omega$ ، $R_۲=۱۰/۰\Omega$ و emf باتری آرمانی $\varepsilon=۱۲۰V$ است. اگر (الف) فقط کلید $S_۱$ ، (ب) فقط کلید $S_۱$ و $S_۲$ و (پ) هر سه کلید، بسته شوند، جریان در نقطهٔ a چقدر است؟



شکل ۲۳-۷۱ مسئلهٔ ۷۹

حل» (الف) وقتی فقط کلید $S_۱$ بسته شود، داریم:

$$i=\frac{\varepsilon}{۲R_۱}=\frac{۱۲۰}{۲(۲۰)}=۳A$$

(ب) وقتی کلید $S_۱$ و $S_۲$ بسته شوند، در حلقهٔ دوم داریم:

$$R_{۱۲}=R_۱+R_۲=(۲۰+۱۰)=۳۰\Omega$$

حال مقاومت معادل حلقه اول و دوم را به دست می‌آوریم

$$R'=\frac{R_۱R_{۱۲}}{R_۱+R_{۱۲}}+R_۱=۱۲+۲۰=۳۲$$
$$i=\frac{\varepsilon}{R'}=\frac{۱۲۰}{۳۲}=۳/۷۵A$$

Scanned by CamScanner

(پ) بالاخره وقتی هر سه کلید بسته شوند، با کمی دقت می‌بینیم که مقاومت حلقهٔ سوم $R'_3 = 30\Omega$، مقاومت حلقه دوم $R'_2 = 30\Omega$ و مقاومت شاخه دوم $R_1 = 20\Omega$.

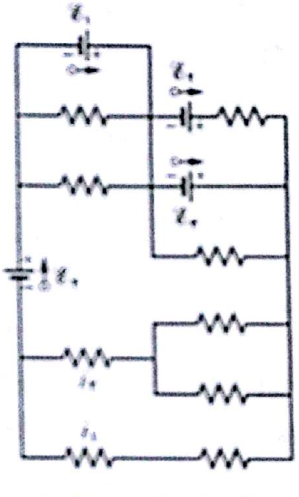
$$\frac{1}{R'}=\frac{1}{30}+\frac{1}{30}+\frac{1}{20} \Rightarrow R' = 8.57\Omega$$

مقاومت معادل کل مدار برابر است

$$R_{eq} = R' + R_1 = 8.57 + 20 = 28.75\Omega$$

$$i = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{120}{28.75} = 4.2\,A$$

۸۰- در شکل ۲۳-۷۲، emf باتریهای آرمانی $\varepsilon_1 = 20.0\,V$، $\varepsilon_2 = 10.0\,V$، $\varepsilon_3 = 5.00\,V$ و $\varepsilon_4 = 5.00\,V$ و مقاومت هر یک از مقاومتها برابر با 2.00Ω است. (الف) اندازه و (ب) جهت (چپ یا راست) جریان i_1 و (پ) اندازه و (ت) جهت جریان i_2 چیست؟ (این را فقط با یک محاسبهٔ ذهنی می‌توان پاسخ داد.) (ث) با چه آهنگی انرژی به باتری ۴ منتقل می‌شود و آیا (ج) انرژی توسط باتری تولید می‌شود یا جذب؟



شکل ۲۳-۷۲ مسئلهٔ ۸۰

حل: (الف) مقاومت معادل دو مقاومت پایینی که متوالی هستند برابر $R' = 4\Omega$ است و جریان i_1 از آن می‌گذرد. حلقه شامل این مقاومت معادل و باتریهای ε_1 و ε_3 و ε_4 را در نظر گرفته و با استفاده از قاعده حلقه داریم

$$i_1 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4}{R'} = \frac{20+5+5}{4} = 7.5\,A$$

(ب) جواب مثبت است پس جهت جریان i_1 که به سمت چپ انتخاب کردیم، صحیح است.

(پ) اختلاف پتانسیل دو سر این مقاومت معادل برابر با $i_1R' = (7.5)(4) = 30\,V$ این ولتاژ برابر ولتاژ دو سر سایر مقاومتهایی است که در بالای این جفت مقاومت واقع‌اند. در یکی از شاخه‌ها جریان i_2 و $i_2/2$ از مقاومتها می‌گذرد. لذا داریم:

$$30 = 2i_2 + 2\left(\frac{i_2}{2}\right) \Rightarrow i_2 = 10\,A$$

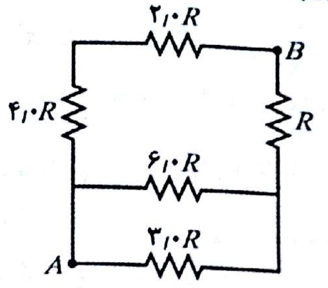
(ت) جواب مثبت است پس i_2 به سمت چپ است.

(ث) آهنگ انتقال انرژی به باتری ۴ برابر است با:

$$P_4 = \varepsilon_4(i_1 + i_2) = (5)(7.5 + 10) = 87.5\,W$$

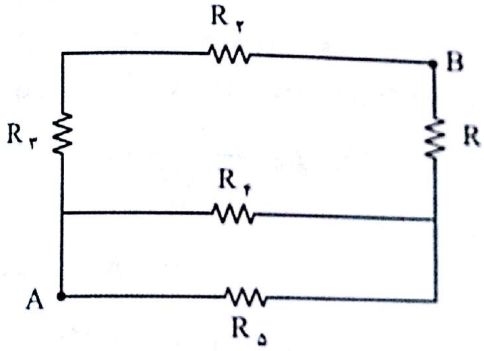
(ج) با توجه به جهت جریان مشاهده می‌شود که انرژی به مدار داده می‌شود.

۸۱- در شکل ۲۳-۷۳، $R = 10\Omega$ است. مقاومت معادل میان نقطه‌های A و B چقدر است؟ (*راهنمایی:* اگر در ابتدا فرض کنیم که نقطه‌های A و B به یک باتری وصل شده‌اند این مدار ساده‌تر خواهد شد.)



شکل ۲۳-۷۳ مسئلهٔ ۸۱

حل:



$$R_{45} = \frac{R_4R_5}{R_4+R_5} = \frac{(6R)(3R)}{6R+3R} = 2R$$

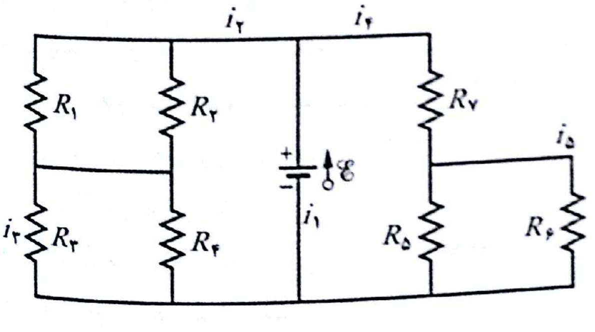
$$R_{145} = R_1 + R_{45} = R + 2R = 3R$$

$$R_{23} = (2R) + (4R) = 6R$$

$$R_{eq} = \frac{R_{23}R_{145}}{R_{23}+R_{145}} = \frac{(6R)(3R)}{6R+3R} = 2R$$

$$R_{eq} = 2(10) = 20\Omega$$

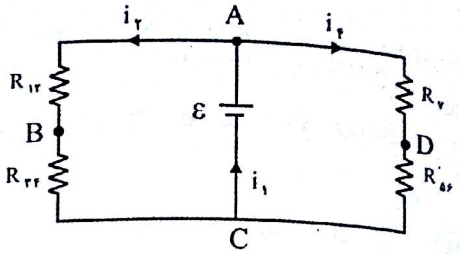
۸۲- در شکل ۲۳-۷۴، emf باتری آرمانی $\mathscr{E} = 30.0\,V$ و مقاومتها عبارت‌اند از $R_1 = R_2 = 14\Omega$، $R_3 = R_4 = R_5 = 6.0\Omega$، $R_6 = 2.0\Omega$ و $R_7 = 1.5\Omega$. جریانهای (الف) i_2، (ب) i_4، (پ) i_1، (ت) i_3 و (ث) i_5 چقدرند؟



شکل ۲۳-۷۴ مسئلهٔ ۸۲

حل: (الف) مدار را می‌توان به صورت ساده زیر در نظر گرفت:

Scanned by CamScanner



$$R_{12} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = 7\Omega \qquad R_{34} = \frac{R_3R_4}{R_3+R_4} = 3\Omega$$

$$\varepsilon - (R_{12}+R_{34})i_2 = 0 \Rightarrow 30-(7+3)i_2 = 0 \Rightarrow i_2 = 3A$$

(ب)
$$R_{56} = \frac{R_5R_6}{R_5+R_6} = 1.5\Omega$$

$$\varepsilon-(R_7+R_{56})i_4 = 0 \Rightarrow 30-(1.5+1.5)i_4 = 0 \Rightarrow i_4 = 10A$$

(پ) با استفاده از قانون انشعاب در نقطه A می‌توان نوشت

$$i_1 = i_2+i_4 = 3+10 = 13A$$

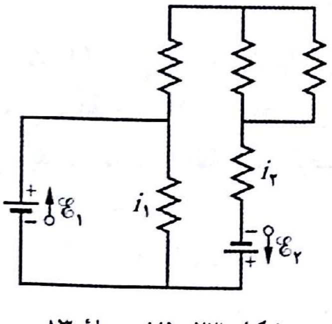
(ت)
$$V_{34} = R_{34}i_2 = (3)(3) = 9V$$

$$i_3 = \frac{V_{34}}{R_3} = \frac{9}{6} = 1.5A$$

(ث)
$$V_{56} = R_{56}i_4 = (1.5)(10) = 15V$$

$$i_5 = \frac{V_{56}}{R_6} = \frac{15}{2} = 7.5A$$

۸۳- در شکل ۲۳-۷۵، emf های باتریهای آرمانی $\varepsilon_1 = 12.0V$ و $\varepsilon_2 = 4.00V$ و اندازهٔ هر یک از مقاومتها ۴/۰۰Ω است. (الف) اندازه و (ب) جهت (بالا یا پایین) i_1 چیست؟ (پ) اندازه و (ت) جهت i_2 چیست؟ (ث) آیا باتری ۱ انرژی تولید می‌کند یا جذب؟ و (ج) آهنگ انتقال انرژی آن چقدر است؟ (چ) آیا باتری ۲ انرژی تولید می‌کند یا جذب و (ح) آهنگ انتقال انرژی آن چقدر است؟



شکل ۲۳-۷۵ مسئلهٔ ۸۳

حل: (الف) برای حلقهٔ سمت چپ داریم

$$i_1 = \frac{\varepsilon_1}{R} = \frac{12}{4} = 3A$$

(ب) جهت i_1 روبه‌پایین است

(پ) قاعده حلقه را برای حلقه وسط می‌نویسیم

$$\varepsilon_2 + i_1R - i_2R + \frac{i_2}{2}R - i_2R = 0$$

که با قرار دادن مقادیر معلوم، $i_2 = 1.6A$ به دست می‌آید. (ت) جواب مثبت است پس جهت روبه‌پایین انتخابی برای i_2 صحیح است.

(ث) باتری ۱ تولید انرژی می‌کند چون جریان عبوری در باتری روبه‌جلو است.

(ج) با استفاده از قانون انشعاب داریم:

$$i_3 = i_1 + i_2 = 3+1.6 = 4.6A$$

در نتیجه آهنگ انتقال انرژی برابر است با

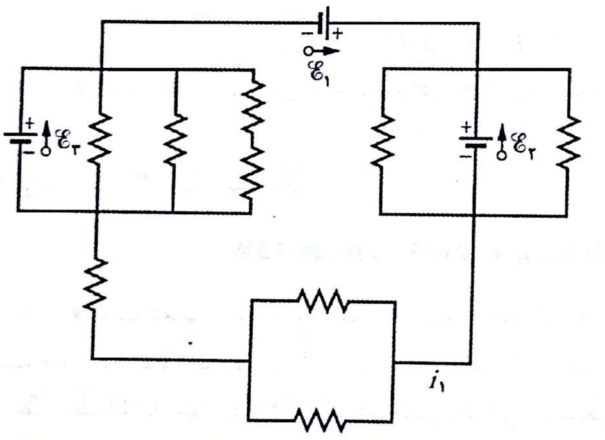
$$P = \varepsilon i = (12)(4.6) = 55.2W$$

(چ) چون جریان عبوری در باتری ۲ روبه‌جلو است لذا این توان را تولید می‌کند.

(ح) آهنگ انتقال انرژی برابر است با:

$$P = (4)i_2 = 6.4W$$

۸۴- در شکل ۲۳-۷۶، emf باتریهای آرمانی $\varepsilon_1 = 20.0V$ و $\varepsilon_2 = 10.0V$ و $\varepsilon_3 = 5.00V$ و اندازه هر یک از مقاومتها ۲/۰۰Ω است. (الف) اندازه و (ب) جهت (چپ یا راست) جریان i_1 چیست؟ (پ) آیا باتری ۱ انرژی تولید می‌کند یا جذب، و (ت) توان آن چقدر است؟ (ث) آیا باتری ۲ انرژی تولید می‌کند یا جذب و (ج) توان آن چقدر است؟ (چ) آیا باتری ۳ انرژی تولید می‌کند یا جذب و (ح) توان آن چقدر است؟ GO



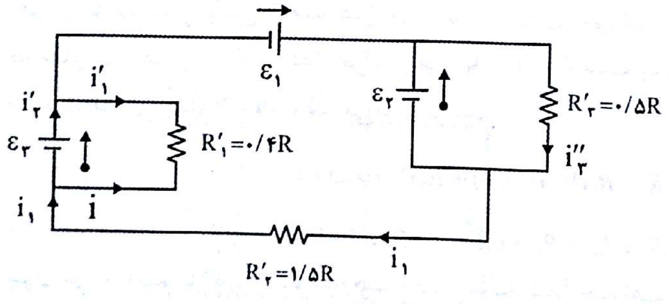
شکل ۲۳-۷۶ مسئلهٔ ۸۴

حل: مدار را به صورت ساده‌تر در می‌آوریم.

$$R'_1 = 0.4R = 0.8\Omega$$

$$R'_2 = 1.5R = 3\Omega$$

$$R'_3 = 0.5R = 1\Omega$$



(الف) با استفاده از قاعده حلقه می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_3 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - i_1R'_2 = 0$$

$$50+20-10-i_1(3) = 0 \quad \Rightarrow \quad i_1 = 5A$$

(ب) جهت i_1 به سمت چپ صحیح است.

Scanned by CamScanner

(پ) چون جریان i_1 از باتری ۱ روبه‌جلو است یعنی وارد قطب منفی آن می‌شود این باتری در حال کار و انرژی دادن به مدار است.

(ت) توان باتری ۱ برابر است با

$$P_1 = \varepsilon i = (20)(5) = 100\,W$$

(ث) جریان i_4' از R_4' می‌گذرد

$$\varepsilon_2 = R_4' i_4' \Rightarrow 10 = (1) i_4' \Rightarrow i_4' = 10\,A$$

جهت این جریان در R_4' روبه‌پایین است پس جریان i_2 که از باتری ε_2 می‌گذرد روبه‌بالا است و مقدار آن $i_2 = i_4' - i_1 = 5A$ است و چون به قطب منفی وارد می‌شود این باتری در حال انرژی دادن است.

(ج) توان باتری ۲ برابر است با

$$P_2 = \varepsilon_2 i_2 = (10)(5) = 50\,W$$

(چ) جهت جریانی که از R_1' می‌گذرد i_1' نامیده می‌شود و روبه‌پایین در نظر می‌گیریم

$$\varepsilon_3 = R_1' i_1' \Rightarrow 5 = 0/8 i_1' \Rightarrow i_1' = 6/25\,A$$

جریان i_3 که از باتری می‌گذرد روبه‌بالا و برابر است با:

$$i_3 = i_1' + i_1 = 6/25 + 5 = 11/25\,A$$

این باتری در حل جذب انرژی از مدار و در حال پر شدن است.

(ح) توان باتری ۳ برابر است با

$$P_3 = \varepsilon_3 i_3 = (5)(11/25) = 56/25\,W$$

۸۵- یک مقاومت دمایی- پایدار از یک مقاومت ساخته شده از سیلیسیوم و یک مقاومت ساخته شده از آهن تشکیل شده است که به طور متوالی به هم متصل‌اند. اگر در گسترهٔ دمایی وسیعی حول $20°\,C$ مقاومت کل 1000Ω مورد نیاز باشد، (الف) مقاومت سیلیسیومی و (ب) مقاومت آهنی چقدر است؟ (به جدول ۲۲-۱ نگاه کنید.) SSM

حل: (الف) سیلیسیوم نیمه‌هادی است لذا با افزایش دما، مقاومت آن کاهش می‌یابد. سیلیسیوم را با شاخص پایین ۱ و آهن را با شاخص پایین ۲ مشخص می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که مقاومت آهن با افزایش دما، افزایش می‌یابد. دو مقاومت به صورت متوالی بسته شده‌اند، لذا می‌توان نوشت

$$R = R_1(1 - \alpha_1 \Delta T) + R_2(1 + \alpha_2 \Delta T)$$

$$R = R_1 + R_2 + (R_2\alpha_2 - R_1\alpha_1)\Delta T$$

چون می‌خواهیم با تغییر دما، مقاومت ثابت بماند لذا خواهیم داشت

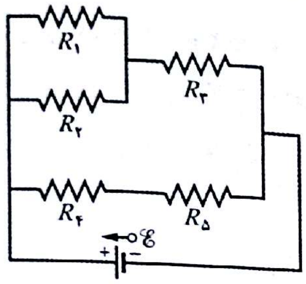
$$R_2\alpha_2 - R_1\alpha_1 = 0 \Rightarrow R_2 = R_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

$$R_2 = R_1 \frac{6/5\times10^{-3}}{70\times10^{-3}} \Rightarrow R_2 = \frac{6/5}{70} R_1$$

ضمناً داریم $R_1 + R_2 = 1000$ لذا با حل همزمان این دو معادله داریم:

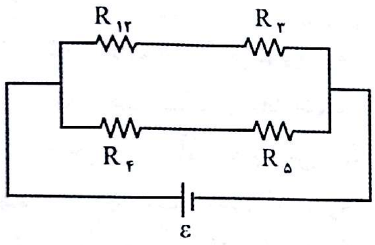
$$R_1 = 915\Omega \qquad R_2 = 85\Omega$$

۸۶- در شکل ۲۳-۷۷، یک باتری آرمانی با $\varepsilon = 12/0\,V$ به شبکهٔ مقاومتهای $R_1 = 6/00\Omega$ ، $R_2 = 12/0\,\Omega$ ، $R_3 = 4/00\Omega$ ، $R_4 = 3/00\Omega$ و $R_5 = 5/00\Omega$ بسته شده است. اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت ۵ چقدر است؟



شکل ۲۳-۷۷ مسئلهٔ ۸۶

حل: مدار را ساده می‌کنیم



$$i_5 = \frac{\varepsilon}{R_{45}} = \frac{12}{3+5} = 1/5\,A$$

$$V_5 = i_5 R_5 = (1/5)(5) = 7/5\,V$$

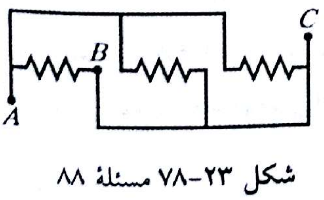
۸۷- در یک مقاومت $0/10\Omega$ که به یک باتری $1/5\,V$ متصل است، انرژی گرمایی با آهنگ $10\,W$ ظاهر می‌شود، (الف) چه اختلاف پتانسیلی باید در دوسر مقاومت برقرار باشد؟ (ب) مقاومت داخلی باتری باید چقدر باشد؟

حل: (الف) $P = Ri^2 \Rightarrow 10 = (0/1) i^2 \Rightarrow i = 10\,A$

$$V = Ri = (0/1)(10) = 1V$$

(ب) $i = \frac{\varepsilon}{R + r} \Rightarrow 10 = \frac{1/5}{0/1 + r} \Rightarrow r = 0/05\Omega$

۸۸- شکل ۲۳-۷۸ سه مقاومت $20/0$ اهمی را نشان می‌دهد. مقاومت معادل میان نقطه‌های (الف) A و B، (ب) A و C و (پ) B و C را پیدا کنید. (*راهنمایی:* تصور کنید که به هر زوج نقطهٔ داده شده یک باتری متصل است.)



شکل ۲۳-۷۸ مسئلهٔ ۸۸

Scanned by CamScanner

حل: (الف) مقاومت معادل بین A و B برابر است با (سه مقاومت موازی داریم)

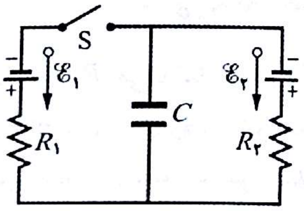
$$R_{eq}=\frac{۲۰}{۳}=۶/۶۷\Omega$$

(ب) مقاومت معادل بین A و C برابر است با (سه مقاومت موازی داریم)

$$R_{eq}=\frac{۲۰}{۳}=۶/۶۷\Omega$$

(پ) مقاومت معادل بین B و C صفر است چون B و C با یک سیم رسانا متصل شده‌اند.

۸۹- مدار شکل ۲۳-۷۹ یک خازن، دو باتری آرمانی، دو مقاومت و یک کلید را نشان می‌دهد. در آغاز S به مدت طولانی باز است. اگر سپس این کلید به مدت طولانی بسته شود، تغییر در بار خازن چقدر می‌شود؟ فرض کنید که $C=۳/۰V$، $R_۱=۰/۲۰\Omega$ و $R_۲=۰/۴۰\Omega$.



شکل ۲۳-۷۹ مسئلهٔ ۸۹

حل: وقتی کلید S به مدت طولانی باز است بار $q_۱$ توسط باتری $\varepsilon_۲$ در خازن انباشته می‌شود

$$q_i=\varepsilon_۲ C=(۳)(۱۰)=۳۰\mu C$$

وقتی کلید S بسته می‌شود بار خازن پس از رسیدن به حالت تعادل موجب می‌شود که خازن اتصال باز شود در این حالت داریم

$$i=\frac{\varepsilon_۲-\varepsilon_۱}{R_۱+R_۲}=\frac{۳-۱}{۰/۲+۰/۴}=۳/۳۳A$$

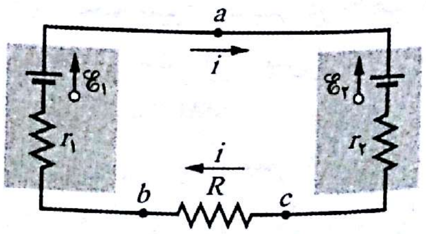
با داشتن i می‌توان اختلاف پتانسیل دو سر باتری را به دست آورد.

$$V=\varepsilon_۲-iR_۲=۳-(۳/۳۳)(۰/۴)=۱/۶۷V$$

بار نهایی روی خازن برابر است با $q_f=CV$ لذا تغییر بار روی خازن برابر خواهد بود:

$$\Delta q=q_f-q_i=C(V-\varepsilon_۲)=(۱۰)(۱/۶۷-۳)=-۱۳/۳۳\mu C$$

۹۰- در شکل ۲۳-۸ الف، با در نظر گرفتن مسیری که شامل R، $r_۱$ و $\mathscr{E}_۱$ است، اختلاف پتانسیل میان a و c را محاسبه کنید.



حل:

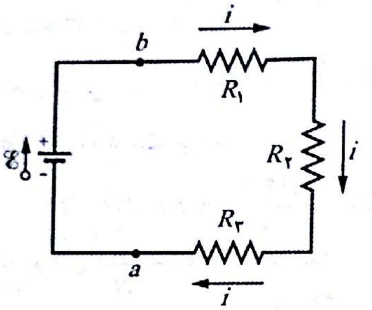
با استفاده از قاعده حلقه ابتدا جریان i را به دست می‌آوریم.

$$-\varepsilon_۲-r_۲ i-Ri-r_۱ i+\varepsilon_۱=۰$$

$$i=\frac{\varepsilon_۱-\varepsilon_۲}{R+r_۱+r_۲}=\frac{۴/۴-۲/۱}{۵/۵+۱/۸+۲/۳}=۰/۲۴A$$

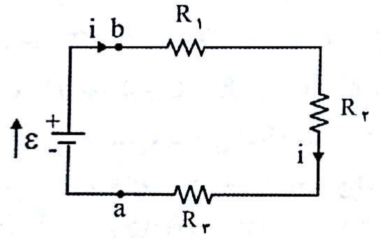
$$V_a-V_c=\varepsilon_۲+r_۲ i=۲/۱+(۲/۳)(۰/۲۴)=۲/۵۳V$$

۹۱- در شکل ۲۳-۵۷ الف، اگر $\mathscr{E}=۱۲V$، $R_۱=۳/۰\Omega$، $R_۲=۴/۰\Omega$ و $R_۳=۵/۰\Omega$ باشد، اختلاف پتانسیل دو سر $R_۲$ را پیدا کنید.



شکل ۲۳-۵۷ مسئلهٔ ۹۱

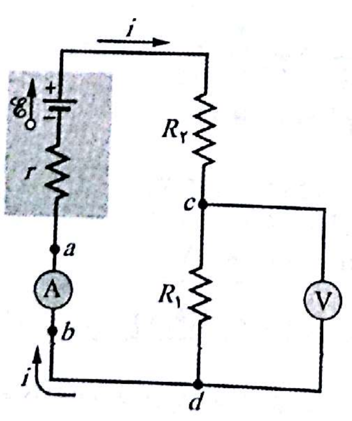
حل:



اختلاف پتانسیل در سر $V_۲$ برابر است با

$$V_۲=iR_۲=\frac{\varepsilon}{R_۱+R_۲+R_۳}R_۲=\frac{۱۲}{۳+۴+۵}(۴)=۴V$$

۹۲- در شکل ۲۳-۱۴، فرض کنید که $\mathscr{E}=۵/۰V$، $r=۲/۰\Omega$، $R_۱=۵/۰\Omega$ و $R_۲=۴/۰\Omega$ است. اگر مقاومت آمپرسنج R_A برابر $۰/۱۰\Omega$ باشد، در اندازه‌گیری جریان چه درصد خطایی وارد می‌شود؟ فرض کنید که ولت سنج وجود ندارد.



حل: جریان در مدار برابر است با:

$$i=\frac{\varepsilon}{R_۱+R_۲+r+r_A}=\frac{۵}{۵+۴+۲+r_A}=\frac{۵}{۱۱+r_A}$$

Scanned by CamScanner

بدون آمپرسنج جریان برابر $i_1=\frac{5}{11}=0/455\,A$ و با آمپرسنج برابر $i_2=\frac{5}{11/1}=0/450\,A$ است. لذا درصد خطا چنین است

$$\frac{\Delta i}{i_1}=\frac{0/455-0/450}{0/455}=0/011 \quad \text{یا} \quad \%1/1$$

۹۳- یک خط قدرت ۱۲۰ V با یک فیوز ۱۵A حفاظت می‌شود. بیشینهٔ تعداد لامپ ۵۰۰ واتی که به طور همزمان و به طور موازی در این خط می‌توانند کار کنند بدون آنکه فیوز بر اثر اضافه جریان بسوزد، چقدر است؟

حل: مقاومت مجاز برابر است با $R=\frac{120}{15}=8\Omega$ و مقاومت هر لامپ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

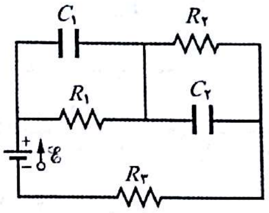
$$P=\frac{V^2}{r}\Rightarrow 500=\frac{(120)^2}{r}\Rightarrow r=28/8\Omega$$

لامپها به صورت موازی بسته شده‌اند لذا داریم:

$$R=\frac{r}{N}\Rightarrow 8=\frac{28/8}{N}\Rightarrow N=3/6$$

به این ترتیب باید ۳ عدد قرار داد چون ۴ لامپ فیوز را می‌سوزاند.

۹۴- در شکل ۲۳-۸۰، $R_1=5/00\,\Omega$، $R_2=10/0\,\Omega$، $R_3=15/0\,\Omega$، $C_1=5/00\,\mu F$، $C_2=10/0\,\mu F$ و emf باتری آرمانی $\varepsilon=20/0\,V$ است. با فرض اینکه مدار در حالت پایا باشد، انرژی کل ذخیره شده در دو خازن چقدر است؟



شکل ۲۳-۸۰ مسئلهٔ ۹۴

حل: در حالت پایا و تعادل جریانی از خازنها عبور نمی‌کند و خازن‌ها اتصال باز هستند. مقاومتها متوالی‌اند و از قاعده حلقه داریم

$$i=\frac{\varepsilon}{R_1+R_2+R_3}=\frac{20}{5+10+15}=0/67A$$

$$V_1=R_1i=(5)(0/67)=3/35V$$

$$U_1=\frac{1}{2}C_1V_1^2=\frac{1}{2}(5\times10^{-6})(3/35)^2=2/81\times10^{-5}\,J$$

$$V_2=R_2i=(10)(0/67)=6/7V$$

$$U_2=\frac{1}{2}C_2V_2^2=\frac{1}{2}(10\times10^{-6})(6/7)^2=2/24\times10^{-4}\,J$$

۹۵- خازن C که در ابتدا بدون بار است توسط وسیله‌ای با emf ثابت که به طور متوالی توسط مقاومت R به آن وصل شده است کاملاً باردار می‌شود. (الف) نشان دهید که انرژی ذخیره شدهٔ نهایی در خازن نصف انرژی تولید شده توسط منبع emf است. (ب) با انتگرالگیری مستقیم از i^2R روی زمان باردارشدن نشان دهید که انرژی گرمایی مصرف شده به وسیلهٔ مقاومت نیز نصف انرژی تولید شده توسط منبع emf است. SSM

حل: (الف) برای شارژ بار روی خازن داریم

$$q=\varepsilon Ce^{-t/RC}$$

انرژی ذخیره شده در خازن برابر است با

$$U_C=\frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}=\frac{\varepsilon^2C^2}{2C}=\frac{1}{2}C\varepsilon^2$$

انرژی‌ای که emf در dt تولید می‌کند برابر است با:

$$dU_{emf}=Pdt=\varepsilon i\,dt=\varepsilon\left(\frac{dq}{dt}\right)dt=\varepsilon\left[\frac{\varepsilon C}{RC}\right]e^{-t/RC}dt$$

$$U_{emf}=\frac{\varepsilon^2}{R}\int_0^\infty e^{-t/RC}dt=\frac{\varepsilon^2}{R}RC=C\varepsilon^2=2U_C$$

(ب)

$$dU_R=Pdt=Ri^2dt=R\left(\frac{\varepsilon^2}{C}e^{-2t/RC}\right)dt$$

$$U_R=\frac{\varepsilon^2}{R}\int_0^\infty e^{-2t/RC}dt=\frac{\varepsilon^2}{R}\frac{RC}{2}=\frac{1}{2}C\varepsilon^2$$

۹۶- دو مقاومت R_1 و R_2 می‌توانند به طور متوالی یا به طور موازی به باتری با emf برابر با ε وصل شوند. می‌خواهیم آهنگ مصرف انرژی ترکیب موازی پنج برابر مقدار آن در ترکیب متوالی باشد. اگر $R_1=100\,\Omega$ باشد، (الف) کمترین و (ب) بیشترین دو مقدار R_2 باید چقدر باشد تا این آهنگ مصرف حاصل شود؟

حل: وقتی اتصال دو مقاومت R_1 و R_2 متوالی باشند آهنگ اتلاف انرژی برابر است با $P_S=\frac{\varepsilon^2}{R_{eq}}=\frac{\varepsilon^2}{R_1+R_2}$ و وقتی اتصال موازی است داریم $P_P=\frac{\varepsilon^2(R_1+R_2)}{R_1R_2}$. با توجه به صورت مسئله داریم $P_P=5P_S$، لذا خواهیم داشت:

$$\frac{\varepsilon^2(R_1+R_2)}{R_1R_2}=5\frac{\varepsilon^2}{R_1+R_2}\Rightarrow(R_1+R_2)^2=5R_1R_2$$

با توجه به اینکه $R_1=100\,\Omega$ است لذا خواهیم داشت

$$\Rightarrow R_2^2-300R_2+10^4=0$$

که با حل این معادله درجه دوم خواهیم داشت:

(الف) کمترین مقدار R_2 برابر است با $38/2\Omega$.

(ب) بیشترین مقدار R_2 برابر است با $261/8\Omega$.

۹۷- در شکل ۲۳-۶۶، emf باتری آرمانی $\varepsilon=30\,V$، مقاومتها $R_1=20\,k\Omega$ و $R_2=10\,k\Omega$ و خازن بدون بار است. وقتی در لحظهٔ $t=0$ کلید بسته شود، جریان در (الف) مقاومت ۱ و (ب) مقاومت ۲ چقدر است؟ (پ) پس از زمان طولانی جریان در مقاومت ۲ چقدر است؟ SSM

حل: (الف) درست پس از بسته شدن کلید خازن به صورت اتصال کوتاه عمل می‌کند و اختلاف پتانسیل دو سر R_2 برابر صفر است، لذا داریم: $i_1=\frac{\varepsilon}{R_1}=\frac{30}{20\times10^3}=1/5\times10^{-3}\,A$

Scanned by CamScanner

(ب) $i_{۰۲}=۰$ است.

(پ) پس از گذشت زمان طولانی خازن به صورت اتصال باز عمل می‌کند و داریم:

$$i_۱=i_۲=\frac{\varepsilon}{R_۱+R_۲}=\frac{۳۰}{(۲۰+۱۰)\times۱۰^۳}=۱\times۱۰^{-۳}\ \text{A}$$

۹۸- در شکل ۲۳-۴۳، $R_۱=۱۰/۰\ \Omega$ ، $R_۲=۲۰/۰\ \Omega$ و emf باتریهای آرمانی $\varepsilon_۱=۲۰/۰\ \text{V}$ و $\varepsilon_۲=۵۰/۰\ \text{V}$ است. به ازای چه مقدار از $R_۳$ هیچ جریانی از باتری ۱ نمی‌گذرد؟

حل: با استفاده از قاعده انشعاب $i_۱=i_۲+i_۳$ و از قاعده حلقه داریم

$$۲۰-i_۱R_۱-i_۲R_۲=۰$$
$$۲۰-i_۱R_۱-i_۲R_۲=۰$$

چون جریانی از باتری نمی‌گذرد لذا $i_۱=۰$ و در نتیجه $i_۲=i_۳$ است. با حل همزمان دو معادله فوق به ازای $R_۱=۱۰\Omega$ و $R_۲=۲۰\Omega$ به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$i_۱=\frac{۴۰-۳R_۳}{۲۰+۳R_۳}$$

که چون $i_۱=۰$ باید صفر باشد، خواهیم داشت:

$$R_۳=\frac{۴۰}{۳}=۱۳/۳\Omega$$

۹۹- در شکل ۲۳-۴۶، $R_۱=R_۲=۱۰/۰\ \Omega$ و emf باتری آرمانی $\varepsilon=۱۲/۰\ \text{V}$ است. (الف) چه مقداری از $R_۳$ آهنگ تولید انرژی در باتری را بیشینه می‌کند و (ب) این آهنگ بیشینه چقدر است؟ SSM

حل:

$$R_{eq}=R_۱+\frac{R_۲R_۳}{R_۲R_۳}=\frac{۲۰R_۳+۱۰۰}{R_۳+۱۰}$$

$$P=\frac{V^۲}{R_{eq}}=\frac{V^۲(R_۳+۱۰)}{۲۰R_۳+۱۰۰}=\frac{۱۴۴(R_۳+۱۰)}{۲۰(R_۳+۵)}$$

برای اینکه P بیشینه باشد:

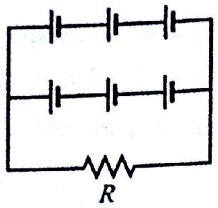
$$\frac{dP}{dR_۳}=۰\Rightarrow\frac{dP}{dR_۳}=-\frac{۳۶}{(R_۳+۵)^۲}$$

(الف) چون شیب منفی به دست آمده نتیجه می‌گیریم که تابع همواره نزولی است. پس هرچه $R_۳$ بیشتر باشد P کمتر است و برعکس هرچه R۳ کمتر باشد P بیشتر است. لذا به ازای $R_۳=۰$، P بیشترین مقدار را دارد.

(ب) P به ازای $R_۳=۰$ برابر است با

$$P=\frac{۱۴۴(۰+۱۰)}{۲۰(۰+۵)}=۱۴/۴\ \text{W}$$

۱۰۰- emf هر یک از شش باتری واقعی شکل ۲۳-۸۱ برابر با ۲۰V و مقاومت آن ۴/۰Ω است. (الف) چه جریانی از مقاومت (خارجی) $R=۴/۰\Omega$ می‌گذرد؟ (ب) اختلاف پتانسیل دو سر هر باتری چقدر است؟ (پ) توان هر باتری چقدر است؟ (ت) با چه آهنگی هر باتری انرژی را به انرژی گرمایی درونی تبدیل می‌کند؟ GO



شکل ۲۳-۸۱ مسئلهٔ ۱۰۰

حل: (الف) با توجه به تقارن مدار، جریان در هر شاخهٔ شامل باتریها یکسان‌اند و اگر آن را i_b بنامیم جریانی که از مقاومت R می‌گذرد برابر $i=۲i_b$ است. برای حلقهٔ پایینی داریم:

$$-۳ri_b+۳\varepsilon-Ri=۰$$

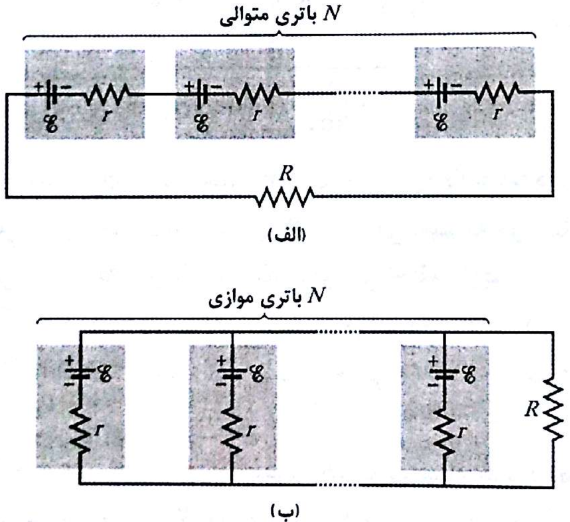
$$-۳(۴)\left(\frac{i}{۲}\right)-۳(۲۰)-۴i=۰\qquad i=۶$$

$$i=۶\text{A}\quad\Rightarrow\quad i_b=۳\text{A}$$

(ب) $V=\varepsilon-i_br=۲۰-(۳)(۴)=۸\text{V}$

(پ) $P=\varepsilon i_b=(۲۰)(۳)=۶۰\text{W}$

۱۰۱- فرض کنید دسته‌ای شامل N باتری مشابه با emf برابر با $\mathscr{E}$ و مقاومت درونی r، همه به طور متوالی (شکل ۲۳-۸۲ الف) یا همه به طور موازی (شکل ۲۳-۸۲ ب) بسته شده و به دو سر مقاومت R متصل‌اند. نشان دهید که اگر $R=r$ باشد هر دو آرایش در R جریان یکسانی به دست می‌دهند.



شکل ۲۳-۸۲ مسئلهٔ ۱۰۱

حل: قاعده حلقه برای حالت متوالی رابطهٔ زیر است:

$$N\varepsilon-Nri-Ri=۰\quad\Rightarrow\quad i=\frac{N\varepsilon}{Nr+R}$$

برای حالت موازی با استفاده از قاعدهٔ حلقه داریم:

$$\varepsilon-r\frac{i}{N}-Ri=۰\quad\Rightarrow\quad i=\frac{N\varepsilon}{r+NR}$$

حل از مقایسه این دو نتیجه مشاهده می‌کنیم که به ازای $r=R$ آنها برابر می‌شوند.

۱۰۲- جدول اختلاف پتانسیل الکتریکی V_T دو سر پایانه‌های یک باتری را برحسب تابعی از جریان i که از باتری کشیده می‌شود نشان می‌دهد. (الف) معادله‌ای بنویسید که رابطهٔ میان

Scanned by CamScanner

V_T و i را نشان دهد. داده‌ها را به ماشین حساب خود وارد کنید و برازش برگشتی خطی از V_T را برحسب i به دست آورید. از پارامترهای برازش (ب) emf باتری و (پ) مقاومت درونی آن را به دست آورید.

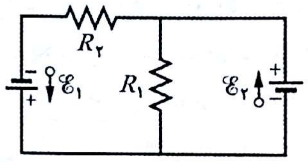
$i(A)$	۵۰/۰	۷۵/۰	۱۰۰	۱۲۵	۱۵۰	۱۷۵	۲۰۰
$V_T(V)$	۱۰/۷	۹/۰۰	۷/۷۰	۶/۰۰	۴/۸۰	۳/۰۰	۱/۷۰

حل: (الف) اختلاف پتانسیل دو سر پایانه‌های باتری $V_T = \varepsilon - ir$ می‌شود.

(ب) با روشهای کامپیوتری آزمون خطا می‌توان V_T را به دست آورد. V_T بر حسب i به صورت $V_T = ۱۳/۶۲ - ۰/۰۵۹۹i$ به دست می‌آید که از آنجا $\varepsilon = ۱۳/۶۱V$ به دست می‌آید.

(پ) از رابطه V_T دیده می‌شود که $r = ۰/۰۶۰\Omega$ است.

۱۰۳- در شکل ۲۳-۸۳، $\varepsilon_1 = ۶/۰۰V$ ، $\varepsilon_2 = ۱۲/۰V$ ، $R_1 = ۲۰۰\Omega$ و $R_2 = ۱۰۰\Omega$. (الف) اندازه و (ب) جهت (بالا یا پایین) جریان در مقاومت ۱، (پ) اندازه و (ت) جهت جریان در مقاومت ۲ و (ث) اندازه و (ج) جهت جریان در باتری ۲ چیست؟



شکل ۲۳-۸۳ مسئلهٔ ۱۰۳

حل: (الف) برای حلقه سمت راست جریان را پادساعتگرد در نظر می‌گیریم جریان عبوری از R_1 را i_1 می‌نامیم که روبه‌پایین می‌شود. با استفاده از قاعده حلقه برای این حلقه داریم

$$\varepsilon_2 - i_1R_1 = ۰ \Rightarrow ۱۲ - i_1(۲۰۰) = ۰ \Rightarrow i_1 = ۰/۰۶A$$

(ب) جواب مثبت است لذا جهت انتخابی ما صحیح بوده و روبه‌پایین است.

(پ) جریان را در حلقه سمت چپ پادساعتگرد درنظر می‌گیریم. جریان در R_2 را i_2 نامیده که جهت آن به سمت چپ است. با استفاده از قاعده حلقه داریم:

$$\varepsilon_1 + i_1R_1 - i_2R_2 = ۰$$

$$۶ + (۰/۰۶)(۲۰۰) - i_2(۱۰۰) = ۰ \Rightarrow i_2 = ۰/۱۸A$$

(ت) چون i_2 مثبت است لذا جهت سمت چپ برای آن صحیح است.

(ث) و **(ج)** از قاعده انشعاب می‌توان جریان عبوری از باتری را به دست آورد که برابر $۰/۱۸ + ۰/۰۶ = ۰/۲۴$ است و جهت آن نیز به سمت بالا است.

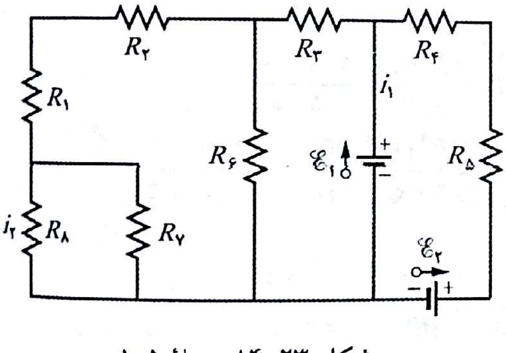
۱۰۴- یک لامپ ۱۲۰ ولتی سه راهی که دو رشته دارد در ۱۰۰، ۲۰۰ و ۳۰۰ وات کار می‌کند. یک رشته می‌سوزد. پس از این لامپ با همان شدت (مصرف انرژی با همان آهنگ) در وضعیت کلید پایینی مانند وضعیت کلید بالا کار می‌کند ولی در وضعیت وسط کار نمی‌کند. (الف) وضعیت دو رشته نسبت به کلید سه وضعیتی چگونه است؟ مقدار مقاومت‌های رشتهٔ (ب) کوچکتر و (پ) بزرگتر چقدر است؟

حل: (الف) داریم $P = \dfrac{\varepsilon^2}{R_{eq}}$ لذا می‌توان چنین بحث کرد که بیشترین توان مربوط به کمترین مقدار R_{eq} است. در نتیجه وضعیت اتصال به مقاومت بزرگتر R_1 به کمترین توان، وضعیت اتصال به مقاومت کوچکتر R_2 به توان میانی و وضعیت اتصال به هر دو مقاومت به طور موازی، به بیشترین توان دست می‌یابیم.

(ب) و **(پ)**
$$\begin{cases} R_{eq} = \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2} \\ R_{eq} = R_1 = \dfrac{\varepsilon^2}{P} = \dfrac{(۱۲۰)^2}{۱۰۰} = ۱۴۴\Omega \end{cases}$$

که از حل همزمان این دو معادله $R_1 = ۱۴۴\Omega$ و $R_2 = ۷۲\Omega$.

۱۰۵- در شکل ۲۳-۸۴ ، $R_1 = R_2 = ۲/۰\Omega$ ، $R_3 = ۴/۰\Omega$ ، $R_4 = ۳/۰\Omega$ ، $R_5 = ۱/۰\Omega$ و $R_6 = R_7 = R_8 = ۸/۰\Omega$ و emf باتریهای آرمانی $\varepsilon_1 = ۱۶V$ و $\varepsilon_2 = ۸/۰V$ است. (الف) اندازه و (ب) جهت (بالا یا پایین) جریان i_1 و (پ) اندازه و (ت) جهت جریان i_2 چیست؟ آهنگ انتقال انرژی در (ث) باتری ۱ و (ج) باتری ۲ چقدر است؟ آیا در (چ) باتری ۱ و (ح) در باتری ۲، انرژی تولید می‌شود یا جذب؟



شکل ۲۳-۸۴ مسئلهٔ ۱۰۵

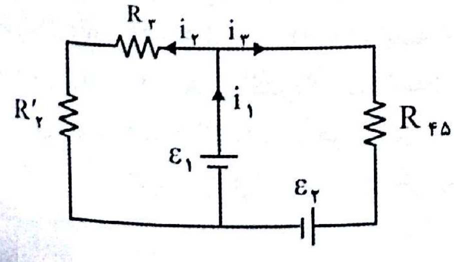
حل: ابتدا مقاومت معادل را طی مراحل زیر به دست می‌آوریم

$$R_{78} = \frac{R_7R_8}{R_7 + R_8} = ۴\Omega$$

$$R_{12} = R_1 + R_2 = ۴\Omega \qquad R'_1 = R_{12} + R_{78} = ۴ + ۴ = ۸\ \Omega$$

$$R'_2 = \frac{R_6R'_1}{R_6 + R'_1} = \frac{(۸)(۸)}{۸ + ۸} = ۴\Omega \quad R_{45} = R_4 + R_5 = ۳ + ۱ = ۴\Omega$$

حال مدار ساده شده را رسم می‌کنیم



Scanned by CamScanner

(الف) با استفاده از قاعده حلقه می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_1 - i_3 R_{45} - \varepsilon_2 = 0 \Rightarrow 16 - 4i_3 - 8 = 0 \Rightarrow i_3 = 2A$$

$$\varepsilon_1 - i'_2 R_3 - i'_2 R'_2 = 0 \Rightarrow 16 - i'_2(4+4) = 0 \Rightarrow i_2 = 2A$$

و از قاعده انشعاب خواهیم داشت:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

$$i_1 - 2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_1 = 4A$$

(ب) جواب i_1 مثبت است، لذا جهت آن به سمت بالا است.

(پ) ابتدا مقاومت معادل سمت چپ را به دست می‌آوریم. آن را R می‌نامیم.

$$R = R'_2 + R_3 = 4 + 4 = 8\Omega$$

لذا جریان عبوری از آن برابر است با:

$$i_R = \frac{\varepsilon_1}{R} = \frac{16}{8} = 2A$$

حال می‌توان جریان i_2 را از تقسیم پی‌درپی i_R در سایر مقاومتها به دست آورد. جریان عبوری از R_3 همان i_R است ولی این جریان پس از آنکه به دو شاخه انشعاب می‌یابد یکی از مقاومت $R_6(8\Omega)$ می‌گذرد و دیگری از مقاومت معادل R_1، R_2، R_7 و $R_8(8\Omega)$ می‌گذرد پس i_R به طور مساوی بین این دو شاخه تقسیم می‌شود و از هر شاخه $iR/2$ می‌گذرد. در اینجا R_1، R_2 و مقاومت معادل R_7 و R_8 اتصال متوالی دارند و چون $R_7 = R_8$ لذا جریان $iR/2$ مجدد به طور مساوی بین R_7 و R_8 تقسیم می‌شود در نتیجه جریان i_2 که از مقاومت R_8 می‌گذرد خواهد بود

$$i_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{i_R}{2}\right) = 0/5A$$

(ت) جهت i_2 به سمت پایین است.

(ث) توان باتری ۱ برابر است با

$$P_1 = \varepsilon_1 i_1 = (16)(4) = 64W$$

(ج) انرژی باتری ۱ تولید و به مدار داده می‌شود.

(چ) انرژی توسط باتری ۲ جذب می‌شود.

۱۰۶-در شکل ۲۳-۴۶، $\varepsilon = 6/00V$ ، $R_1 = 100\Omega$ ، $R_2 = 300\Omega$ و $R_3 = 600\Omega$ است. (الف) مقاومت معادل سه مقاومت، (ب) پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت ۱ و (پ) جریان در مقاومت ۳ چقدر است؟

حل: (الف) R_2 و R_3 موازی ـ مقاومت معادل آنها با R_1 اتصال متوالی دارد. لذا داریم:

$$R_{eq} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 100 + \frac{(300)(600)}{300+600} = 300\Omega$$

(ب) جریان عبوری از مدار معادل i، با جریان عبوری از R_1 یکسان است. یعنی داریم:

$$i_1 = i = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{6}{300} = 0/02A$$

در نتیجه می‌توان اختلاف پتانسیل دو سر R_1 را به دست آورد.

$$V_1 = i_1 R_1 = (0/02)(100) = 2V$$

(پ) از قاعده حلقه داریم

$$\varepsilon - V_1 - i_3 R_3 = 0 \Rightarrow 6 - 2 - i_3(600) \Rightarrow i_3 = 6/67 \times 10^{-3} A$$

۱۰۷- در شکل ۲۳-۴۶، emf باتری آرمانی $\varepsilon = 12/0 V$ و مقدار هر مقاومت $4/00\Omega$ است. (الف) جریان در مقاومت ۳ و (ب) آهنگ تولید انرژی چقدر است؟

حل: ابتدا مقاومت معادل مدار را به دست می‌آوریم

$$R_{eq} = R_1 + R_{23} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 6\Omega$$

$$i = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{12}{6} = 2A$$

بنا به تقارن $i_3 = 1A$ می‌شود. این‌را می‌توان به صورت زیر نیز به دست آورد.

$$V_{23} = R_{23} i = (2)(2) = 4V$$

$$i_3 = \frac{V_{23}}{R_3} = \frac{4}{4} = 1A$$

۱۰۸- خازنی با ظرفیت C_0 پس از اینکه به باتری با emf برابر با ε_0 به مدت طولانی بسته شد، در لحظهٔ $t = 0$ از طریق مقاومت 200000Ω تخلیه می‌شود. سپس اختلاف پتانسیل دو سر خازن برحسب تابعی از زمان در یک بازهٔ زمانی کوتاه اندازه‌گیری می‌شود؛ نتایج آن در زیر آمده است. (الف) معادله‌ای بنویسید که اختلاف پتانسیل دو سر خازن را برحسب زمان توصیف کند. داده‌ها را وارد ماشین حساب خود کنید و یک برازش برگشتی خطی از $\ln V_C$ برحسب t انجام دهید. از پارامترهای برازش، (ب) emf باتری یعنی ε_0 و (ب) ثابت زمانی τ را برای این مدار تعیین کنید. (ت) سرانجام مقدار C_0 را تعیین کنید.

V_C(V)	۹/۹	۷/۲	۵/۷	۴/۴	۳/۴	۲/۷	۲/۰
t(s)	۰/۲۰	۰/۴۰	۰/۶۰	۰/۸۰	۱/۰	۱/۲	۱/۴

حل: (الف) معادله تخلیه خازن برابر است با:

$$q = q_0 e^{-t/RC} = q_0 e^{-t/\tau}$$

از تقسیم کردن معادله فوق بر ظرفیت معادله اختلاف پتانسیل به دست می‌آید $V_C = \frac{q_0}{C} e^{-t/\tau}$ یا $V_C = \varepsilon_0 e^{-t/\tau}$. از طرفین رابطه لگاریتم طبیعی می‌گیریم.

$$LnV_C = -\frac{1}{\varepsilon_0} t + Ln\varepsilon_0$$

Scanned by CamScanner

رابطه را به صورت $y=ax+b$ می‌نویسیم که $y \to LnV_C$ و $a \to \frac{۱}{\tau}$ و $b \to Ln\varepsilon_۰$ که با دادن مقادیر به دستگاه می‌توان ثابتها را به دست آورد.

(ب) با توجه به قسمت (الف) $LnV_C = -۱/۲۹۹۴t + ۲/۴۸۴۹$ لذا:

$$b = Ln\varepsilon_۰ \Rightarrow ۲/۴۸۴۹ = Ln\varepsilon_۰ \Rightarrow \varepsilon_۰ = ۱۲V$$

(پ) $a = \frac{۱}{\tau} \Rightarrow ۱/۲۹۹۴ = \frac{۱}{\tau} \Rightarrow \tau = ۰/۷۷s$

(ت) $\tau = RC \Rightarrow ۰/۷۷ = ۲\times۱۰^{۵}\, C \Rightarrow C = ۳/۸\times۱۰^{-۶}\, F$

۱۰۹- توسط یک منبع با emf برابر با E به یک خط انتقالی با مقاومت R توان داده می‌شود. نسبت توان مصرف شده در خط با $\varepsilon = ۱۱۰۰۰۰\ V$ به توان مصرف شده به ازای $\varepsilon = ۱۱۰\ V$ را با فرض اینکه توان داده شده در دو حالت یکسان است پیدا کنید.

حل: نسبت توان مصرف شده از مقاومت R در دو حالت برابر است با

$$\frac{P_۱}{P_۲} = \frac{Ri_۱^۲}{Ri_۲^۲} = \left(\frac{\varepsilon_۱}{R+r}\right)^۲\left(\frac{R+r}{\varepsilon_۲}\right)^۲ = \left(\frac{\varepsilon_۱}{\varepsilon_۲}\right)^۲$$
$$= \left(\frac{۱۱۰۰۰۰}{۱۱۰}\right)^۲ = ۱\times۱۰^۶$$

۱۱۰- یک باتری با emf برابر با $\varepsilon = ۲/۰۰V$ و مقاومت درونی $r = ۰/۵۰۰\Omega$ موتوری را به حرکت درمی‌آورد. این موتور یک وزنهٔ ۲/۰۰ نیوتونی را با تندی ثابت $v = ۰/۵۰۰ m/s$ بلند می‌کند. دو ترکیب در جریان i مدار باتری – موتور و اختلاف پتانسیل V در دو سر پایانه‌های موتور این کار را امکان‌پذیر می‌کند. از میان دو پاسخ ممکن، (الف) i بزرگتر و (ب) V متناظر و (پ) i کوچکتر و (ت) V متناظر، چقدرند؟

حل: توان موتور برابر است با:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(mgy) = mg\frac{dy}{dt} = (mg)\upsilon$$
$$= (۲)(۰/۵) = ۱W$$

باتری علاوه بر اتلاف داخلی باید توان لازم برای بالا آوردن وزنه را نیز تامین کنید. اگر توان باتری P_b بنامیم خواهیم داشت:

$$P_b = ri^۲ + Ri^۲$$

که R مقاومت درونی موتور و r مقاومت درونی باتری است.
اگر ولتاژ دو سر موتور را V در نظر بگیریم، داریم $V_i = Ri^۲ = P$ و همچنین $\varepsilon = ri + Ri$ که در i ضرب کنیم $\varepsilon i = ri^۲ + Ri^۲$ که $P_b = \varepsilon i$ است، لذا می‌توان نوشت:

$$\varepsilon i = ri^۲ + P \Rightarrow ۲i = ۰/۵i^۲ + ۱$$

که از حل این معادله درجه ۲ خواهیم داشت $i_۱ = ۳/۴۱A$ و $i_۲ = ۰/۵۹A$.

(الف) جریان بیشتر برابر است با ۳/۱۴A.

(ب) از $V = \varepsilon - ir$ با قرار دادن $i = ۳/۴۱$ داریم

$$V = ۲-(۳/۱۴)(۰/۵) = ۰/۲۹۳V$$

(پ) جریان کمتر برابر است با ۰/۵۹A.

(ت) مقدار V مربوط به آن برابر است با

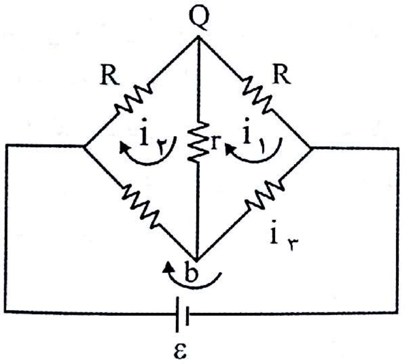
$$V = \varepsilon - ir = ۲-(۰/۵۹)(۰/۵) = ۱/۷۱V$$

۱۱۱- (الف) اگر نقطه‌های a و b در شکل ۲۳-۶۱ با سیمی با مقاومت r به هم وصل شوند، نشان دهید که جریان در مدار عبارت است از

$$i = \frac{\varepsilon(R_s + R_x)}{(R+۲r)(R_s+R_x) + ۲R_sR_x}$$

که در آن E برابر با emf باتری آرمانی و $R = R_۱ = R_۲$ است. فرض کنید که $R_۰$ برابر با صفر است. (ب) آیا این فرمول با نتیجهٔ مسئله ۵۵ سازگار است؟

حل: (الف) سه جریان $i_۱$، $i_۲$ و $i_۳$ را در نظر می‌گیریم. جریانی که از سیم یا شاخه وسط می‌گذرد $i = i_۱ + i_۲$ است. با استفاده از قاعده حلقه می‌توان برای حلقه سمت چپ، راست و حلقه پایین به ترتیب نوشت:



$$(R+r+R_s)i - ri_۲ - R_si_۳ = ۰$$
$$ri_۱ - (R+r+R_x)i_۲ + R_xi_۳ = ۰$$
$$R_si_۱ + R_xi_۲ - (R_s+R_x)i_۳ = -\varepsilon$$

این روابط را می‌توان مانند یک دستگاه حل کرد. دترمینان ضرایب برابر است با:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (R+r+R_s) & -r & -R_s \\ r & -(R+r+R_x) & R_x \\ R_s & R_x & -(R_s+R_x) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (R+r+R_s) & -r & -R_s \\ r & -(R+r+R_x) & R_x \\ R_s & R_x & -(R_s+R_x) \end{vmatrix} \begin{bmatrix} i_۱ \\ i_۲ \\ i_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ -\varepsilon \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

$$i_۱=\frac{۱}{\Delta}\begin{vmatrix} ۰ & -r & -R_s \\ ۰ & -(R+r+R_x) & R_x \\ -\varepsilon & R_x & -(R_s+R_x) \end{vmatrix}$$

$$i_۲=\frac{۱}{\Delta}\begin{vmatrix} (R+r+R_s) & ۰ & -R_s \\ r & ۰ & R_x \\ R_s & -\varepsilon & -(R_s+R_x) \end{vmatrix}$$

جریانی که از شاخه وسط می‌گذرد $i=i_۱+i_۲$.

$$i=\frac{۱}{\Delta}\begin{vmatrix} (R+r+R_s) & -r & -۲R_s \\ r & -(R+r+R_s) & ۲R_x \\ R_s-\varepsilon & -\varepsilon+R_x & -۲(R_s+R_x) \end{vmatrix}$$

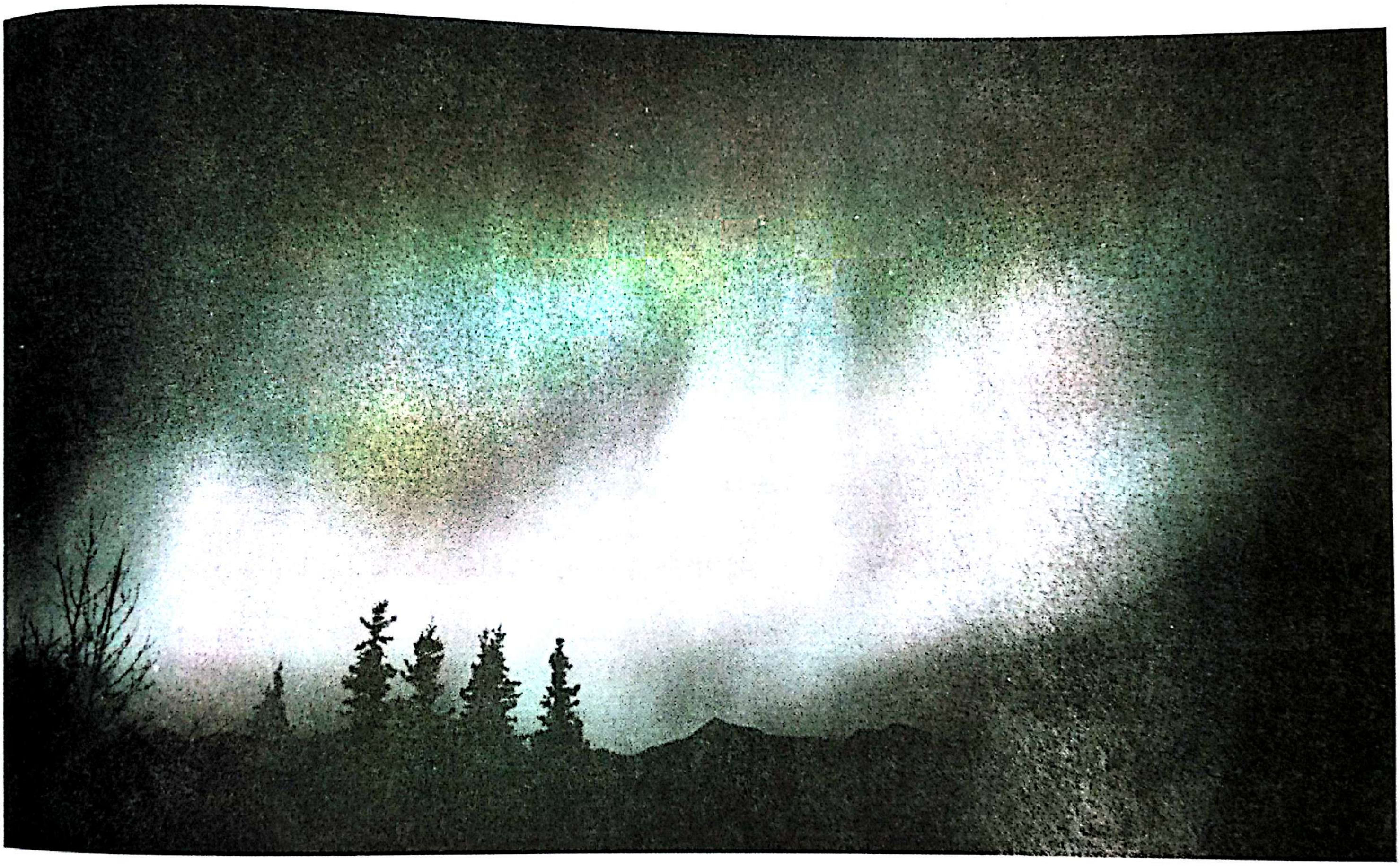
با حل این دترمینان خواهیم داشت:

$$i=\frac{\varepsilon(R_s-R_x)}{(R+۲r)(R_s+R_x)+۲R_sR_x}$$

(ب) در حالت خاص برای $R_s=R_x$ داریم $i=۰$ و این مجموعه را که پل وتستون می‌نامند، در حالت تعادل خواهد بود. این فرمول با نتیجه مسئله ۵۵ سازگار است. جریانی از شاخه وسط نمی‌گذرد و می‌توان این شاخه را حذف کرد.

Scanned by CamScanner

۲۴ میدان‌های مغناطیسی



Scanned by CamScanner

بخش ۲۴-۳ تعریف $\vec{B}$

●۱- الکترونی با سرعت

$$\vec{v}=(2.0\times10^{6}\ m/s)\hat{i}+(3.0\times10^{6}\ m/s)\hat{j}$$

در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}=(0.030\,T)\hat{i}+(0.15\,T)\hat{j}$ حرکت می‌کند. (الف) نیروی وارد بر الکترون را پیدا کنید. (ب) محاسبه را برای پروتونی با همین سرعت تکرار کنید.

حل: (الف)

$$\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}=-(1.6\times10^{-19})\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2\times10^{6} & 3\times10^{6} & 0\\ 0.03 & -0.15 & 0\end{vmatrix}$$

$$=-(1.6\times10^{-19})[(-0.3\times10^{6}-0.09\times10^{6})]\hat{k}$$

$$=6.24\times10^{-14}\ \hat{k}\ N$$

(ب) وقتی به جای الکترون پروتون داشته باشیم مقدار نیرو تغییر نمی‌کند ولی جهت آن عوض می‌شود.

$$\vec{F}=-6.24\times10^{-14}\ \hat{k}\ N$$

●۲- یک ذرهٔ آلفا با سرعت $\vec{v}$ با بزرگی $550\,m/s$ در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به بزرگی $0.045\,T$ حرکت می‌کند (بار ذره آلفا $+3.2\times10^{-19}\,C$ و جرم آن $6.6\times10^{-27}\,kg$ است.) زاویهٔ میان $\vec{v}$ و $\vec{B}$ برابر با 52° است. بزرگی (الف) نیروی $\vec{F}_B$ وارد بر ذره ناشی از میدان و (ب) شتاب ذره ناشی از $\vec{F}_B$ چقدر است؟ (پ) آیا تندی ذره افزایش می‌یابد یا کاهش یا ثابت می‌ماند؟

حل: (الف)

$$F=qvB\sin\theta$$

$$=(3.2\times10^{-19})(550)(0.045)(\sin 52^\circ)$$

$$=6.24\times10^{-18}\ N$$

(ب) از قانون دوم نیوتون داریم

$$F=ma\Rightarrow 6.24\times10^{-18}=(6.6\times10^{-27})a$$

$$\Rightarrow a=9.46\times10^{8}\ m/s$$

(پ) چون نیرو بر سرعت عمود است لذا کاری روی ذره انجام نمی‌دهد و تندی ذره بدون تغییر می‌ماند. شتاب جانب مرکز است فقط صرف تغییر جهت سرعت می‌شود و مقدار آن را تغییر نمی‌دهد.

●۳- پروتونی با زاویهٔ 23.0° نسبت به جهت یک میدان مغناطیسی باشدت $2.60\,mT$ حرکت می‌کند و نیروی مغناطیسی $6.50\times10^{-17}\,N$ بر آن وارد می‌شود. (الف) تندی پروتون و (ب) انرژی جنبشی آن را برحسب الکترون ولت، محاسبه کنید.
SSM ILW

حل: (الف)

$$F=qvB\sin\theta\ \Rightarrow v=\frac{F}{qB\sin\theta}$$

$$v=\frac{6.5\times10^{-17}}{(1.6\times10^{-19})(2.6\times10^{-3})(\sin 23^\circ)}=4\times10^{5}\ m/s$$

(ب)

$$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}(1.67\times10^{-27})(4\times10^{5})^2=1.34\times10^{-16}\ J$$

$$=(1.34\times10^{-16})(1.6\times10^{-19})=835\ eV$$

●۴- ذره‌ای به جرم $10\,g$ و بار $80\,\mu C$ در میدان مغناطیسی یکنواخت در ناحیه‌ای که شتاب سقوط آزاد $-9.8\,\hat{j}\,m/s^2$ است حرکت می‌کند. سرعت ذره مقدار ثابت $20\,\hat{i}\,km/s$ است که بر میدان مغناطیسی عمود است. میدان مغناطیسی چگونه است؟

حل: نیروی وزن نیروی مغناطیسی را خنثی کرده است، لذا داریم:

$$\vec{F}_g=\vec{F}_B\Rightarrow mg\,\hat{j}=q\vec{v}\times\vec{B}$$

$$(10\times10^{-3})(9.8)\hat{j}=(8\times10^{-6})[(20\times10^{3}\ \hat{i})\times(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})]$$

از مساوی قرار دادن مؤلفه‌های متناظر خواهیم داشت:

$$\vec{B}=-6.1\times10^{-2}\ \hat{k}\ N$$

لذا

$$B_x=0\quad B_y=0\quad B_z=-6.1\times10^{-2}$$

●●۵- الکترونی در میدان مغناطیسی یکنواختی حرکت می‌کند که با $\vec{B}=B_x\hat{i}+(3.0B_x)\hat{j}$ داده شده است. در یک لحظهٔ معین سرعت الکترون $\vec{v}=(2.0\hat{i}+4.0\hat{j})m/s$ و نیروی مغناطیسی وارد بر آن $(6.4\times10^{-19}N)\hat{k}$ است. B_x را پیدا کنید.

حل:

$$\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}$$

$$(6.4\times10^{-19})\hat{k}=-(1.6\times10^{-19})[(2\hat{i}+4\hat{j})\times(B_x\hat{i}+3B_x\hat{j})]$$

$$=-(1.6\times10^{-19})(6B_x-4B_x)\hat{k}$$

در نتیجه داریم $B_x=-2T$.

●●۶- پروتونی در میدان مغناطیسی یکنواختی حرکت می‌کند که با $\vec{B}=(10\hat{i}-20\hat{j}+30\hat{k})mT$ داده شده است. در لحظهٔ t_1 سرعت پروتون با $\vec{v}=v_x\hat{i}+v_y\hat{j}+(2.0\,km/s)\hat{k}$ و نیروی مغناطیسی وارد بر پروتون با $\vec{F}_B=(4.0\times10^{-17}\,N)\hat{i}+(2.0\times10^{-17}\,N)\hat{j}$ داده شده است. در آن لحظه (الف) v_x و (ب) v_y چقدر است؟

حل: (الف) و (ب)

$$\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}$$

$$=(4\times10^{-17}\ \hat{i}+2\times10^{-17}\ \hat{j})$$

$$=e(v_x\hat{i}+v_y\hat{j}+2\times10^{3}\ \hat{k})\times(10\hat{i}-20\hat{j}+30\hat{k})\times10^{-3}$$

$$=(1.6\times10^{-19})[(0.03v_y+40)\hat{i}+(20-0.03v_x)\hat{j}-(0.02v_x-0.01v_y)\hat{k}]$$

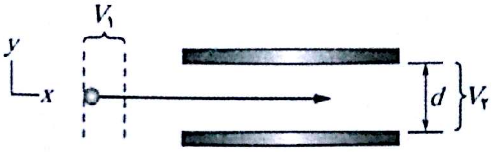
از برابر قرار دادن مؤلفه‌های متناظر خواهیم داشت

$$v_y=7\times10^{3}\ m/s\quad,\quad v_x=3.5\times10^{3}\ m/s$$

Scanned by CamScanner

بخش ۲۴-۴ میدان‌های عمود برهم: کشف الکترون

●۷- در شکل ۲۴-۳۵، الکترونی از حالت سکون با اختلاف پتانسیل $V_1 = ۱/۰۰\,kV$ شتابدار شده و وارد شکاف میان دو صفحهٔ موازی با فاصلهٔ $d = ۲۰/۰\,mm$ و اختلاف پتانسیل $V_2 = ۱۰۰\,V$ می‌شود. صفحهٔ پایینی در پتانسیل کمتر است. از اثر لبه‌ها چشم‌پوشی کرده و فرض کنید که بردار سرعت الکترون بر بردار میدان الکتریکی میان صفحه‌ها عمود است. بر حسب بردار یکه، میدان مغناطیسی یکنواختی که موجب حرکت الکترون در راستای یک خط راست در شکاف می‌شود چقدر است؟ ILW



شکل ۲۴-۳۵ مسئلهٔ ۷

حل:

$$eV = K = \frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow$$

$$(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۱\times۱۰^{۳}) = \frac{۱}{۲}(۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱})v^۲$$

$$\Rightarrow v = ۱/۸۷\times۱۰^{۷}\ m/s$$

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) = ۰ \Rightarrow E = vB$$

$$\Rightarrow \frac{۱۰۰}{۲۰\times۱۰^{-۳}} = (۱/۸۷\times۱۰^{۷})B$$

$$\Rightarrow B = ۲/۶۷\times۱۰^{-۴}\ T$$

●۸- میدان الکتریکی $۱/۵۰\,kV/m$ و میدان مغناطیسی $۰/۴۰۰\,T$ بر الکترون متحرکی اثر می‌کنند به طوری که هیچ نیروی خالصی ایجاد نمی‌شود. اگر میدانها بر یکدیگر عمود باشند، تندی الکترون چقدر است؟

حل: $|F_E| = |F_B| \Rightarrow qE = qvB\sin\theta$

$$E = vB \Rightarrow ۱۵۰۰ = v(۰/۴) \Rightarrow v = ۳۷۵۰\ m/s$$

●۹- سرعت اولیهٔ الکترونی $(۱۲/۰\hat{j}+۱۵/۰\hat{k})\,km/s$ و شتاب ثابت آن درناحیه‌ای که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی یکنواختی وجود دارند $(۲/۰۰\times۱۰^{۱۳}\,m/s^۲)\hat{i}$ است. اگر $\vec{B} = (۴۰۰\,\mu T)\hat{i}$ باشد، میدان الکتریکی $\vec{E}$ را پیدا کنید.

حل: $\vec{F} = m\vec{a} = (۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱})(۲\times۱۰^{۱۲}\,\hat{i}) = ۱/۸۲\times۱۰^{-۱۸}\,\hat{i}$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$$

ابتدای $\vec{v}\times\vec{B}$ را حساب می‌کنیم:

$$\vec{v}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ ۰ & ۱۲\times۱۰^{۳} & ۱۵\times۱۰^{۳} \\ ۴۰۰\times۱۰^{-۶} & ۰ & ۰ \end{vmatrix} = ۶\hat{j} - ۴/۸\hat{k}$$

حال می‌توان نوشت

$$۱/۸۲\times۱۰^{-۱۸}\,\hat{i} = -(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})\vec{E} - (۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۶\hat{j} - ۴/۸\hat{k})$$

$$\Rightarrow \vec{E} = (۱۱/۳۸\hat{i} - ۶\hat{j} + ۴/۸\hat{k})\ V/m$$

●●۱۰- پروتونی در میدانهای مغناطیسی و الکتریکی یکنواختی حرکت می‌کند. میدان مغناطیسی $\vec{B} = -۲/۵۰\,\hat{i}\,mT$ است. در یک لحظه سرعت پروتون $\vec{v} = ۲۰۰۰\,\hat{j}\,m/s$ است. در این لحظه اگر میدان الکتریکی (الف) $۴/۰۰\hat{k}\,V/m$، (ب) $-۴/۰۰\hat{k}\,V/m$، و (پ) $۴/۰۰\hat{i}\,V/m$ باشد، نیروی خالص وارد بر ذره را برحسب بردار یکه پیدا کنید.

حل: $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$

$$\vec{v}\times\vec{B} = (۲۰۰۰\,\hat{j})\times(-۲/۵\times۱۰^{-۳}\,\hat{i}) = ۵\hat{k}$$

(الف) $\vec{F} = (۱/۶\times۱۰^{-۱۹})[۴\hat{k} + ۵\hat{k}] = ۱/۴۴\times۱۰^{-۱۸}\,\hat{k}$

(ب) $\vec{F} = (۱/۶\times۱۰^{-۱۹})[-۴\hat{k} + ۵\hat{k}] = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\,\hat{k}$

(پ) $\vec{F} = (۱/۶\times۱۰^{-۱۹})[۴\hat{i} + ۵\hat{k}]$

$$= ۶/۴\times۱۰^{-۱۹}\,\hat{i} + ۸\times۱۰^{-۱۹}\,\hat{k}$$

●●۱۱- یک چشمهٔ یون، یونهای ^۶Li ایجاد می‌کند که بار آنها $+e$ و جرم آنها $۹/۹۹\times۱۰^{-۲۷}\,kg$ است. یونها توسط اختلاف پتانسیل $۱۰\,kV$ شتاب می‌گیرند و به طور افقی وارد ناحیه‌ای می‌شوند که در آنجا میدان مغناطیسی یکنواخت قائمی به بزرگی $B=۱/۲\,T$ وجود دارد. شدت کمترین میدان الکتریکی را محاسبه کنید که در همان منطقه برقرار شود و یونهای ^۶Li بتوانند بدون انحراف از آن بگذرند.

حل: شرط آنکه یونهای ^۶L_i بدون انحراف عبور کنند این است که $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$ باشد، یعنی داریم:

$$E = vB$$

از طرف دیگر یونها تحت ولتاژ V شتاب می‌گیرید، یعنی:

$$eV = \frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow (۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۱۰\times۱۰^{۳})$$

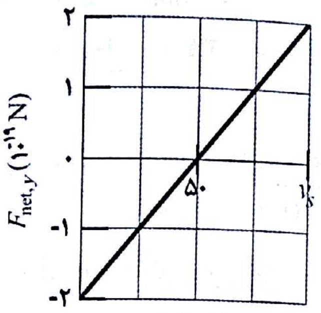
$$= \frac{۱}{۲}(۹/۹۹\times۱۰^{-۲۷})v^۲ \Rightarrow v = ۵/۶۶\times۱۰^{۵}\ m/s$$

لذا داریم:

$$E = (۵/۶۶\times۱۰^{۵})(۱/۲) = ۶/۸\times۱۰^{۵}\ V/m$$

Scanned by CamScanner

●●۱۲- در لحظهٔ t_1، الکترونی در جهت مثبت محور x از میان دو میدان الکتریکی $\vec{E}$ و میدان مغناطیسی $\vec{B}$ فرستاده می‌شود که $\vec{E}$ موازی محور y است. شکل ۲۴-۳۶ مؤلفهٔ y نیروی خالص وارد بر الکترون، $F_{net,y}$، را از طرف دو میدان برحسب تابعی از تندی v الکترون در لحظهٔ t_1 نشان می‌دهد. مقیاس محور سرعت با $v_s = ۱۰۰/۰\,m/s$ مشخص شده است. مؤلفه‌های x و z نیروی خالص در لحظهٔ t_1 برابر صفرند. با فرض $B_x = ۰$، (الف) بزرگی E و (ب) $\vec{B}$ را برحسب بردار یکه پیدا کنید.



شکل ۲۴-۳۶ مسئلهٔ ۱۲

حل: (الف) نیروی الکتریکی $\vec{F}=q\vec{E}$ و نیروی مغناطیسی $\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}$ است. در $v=۰$ نیروی مغناطیسی صفر است. از منحنی دیده می‌شود که $v=۰$ مؤلفهٔ y نیروی برابر با $-۲\times۱۰^{-۱۹}\,N$ است. لذا بزرگی میدان الکتریکی

$$E=\frac{F}{e}=\frac{۲\times۱۰^{-۱۹}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}=۱/۲۵\quad N/C$$

(ب) طبق فرض مسئله نیروفقط در ابتداد محور x عمل می‌کند و الکترون در این راستا حرکت می‌کند و نیروهای الکتریکی و مغناطیسی همدیگر را خنثی می‌کنند. از روی نمودار در چنین حالتی که نیروی خالص صفر است، $v=۵۰\,m/s$ است. در نتیجه داریم

$$B=\frac{E}{v}=\frac{۱/۲۵}{۵۰}=۲/۵\times۱۰^{-۲}\,T$$

برای اینکه F_E و F_B یکدیگر را خنثی کنند باید $\vec{v}\times\vec{B}$ در خلاف جهت $\vec{E}$ که رو به سمت $+y$ است، باشد و چون v در جهت $+x$ است لذا طبق قاعدهٔ دست راست میدان مغناطیسی باید در جهت $+z$ باشد.

بخش ۲۴-۵ میدان‌های عمود بر هم: اثر هال

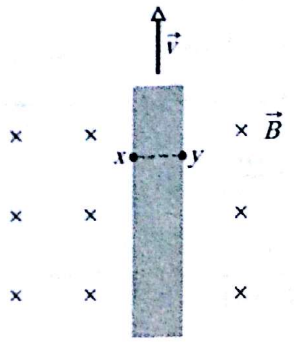
●۱۳- یک نوار مسی به ضخامت $۱۵۰\,\mu m$ و پهنای ۴/۵ mm در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ با بزرگی ۰/۶۵T و با $\vec{B}$ عمود بر نوار قرار دارد. سپس جریان $i=۲۳A$ در نوار فرستاده می‌شود به طوری که اختلاف پتانسیل هال V در دو سر پهنای نوار برقرار می‌شود. V را محاسبه کنید. (تعداد حاملهای بار یکای حجم مس $۸/۴۷\times۱۰^{۲۸}$ الکترون بر متر مکعب است.)

حل: از معادله (۲۴-۱۲) داریم

$$n=\frac{Bi}{Vle}\Rightarrow ۸/۴۷\times۱۰^{۲۸}=\frac{(۰/۶۵)(۲۳)}{V(۴/۵\times۱۰^{-۳})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}$$

$$\Rightarrow V=۲/۴۵\times۱۰^{-۷}\,V$$

●۱۴- همان‌طور که در شکل ۲۴-۳۷ نشان داده شده است، یک نوار فلزی به درازای ۶/۵۰cm، به پهنای ۰/۸۵۰cm و ضخامت ۰/۷۶۰ mm با سرعت ثابت $\vec{v}$ در میدان مغناطیسی یکنواخت $B=۱/۲۰\,mT$ که عمود بر نوار است حرکت می‌کند. اختلاف پتانسیل $۳/۹۰\,\mu V$ بین نقطه‌های x و y در دو طرف نوار برقرار است. تندی v را محاسبه کنید.

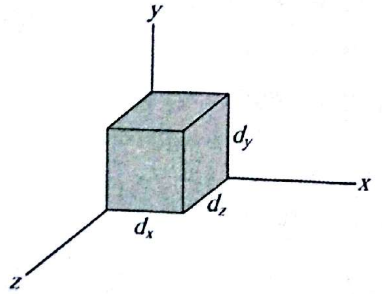


شکل ۲۴-۳۷ مسئلهٔ ۱۴

حل: شرط آنکه حامل بار منحرف نشود این است که نیروهای الکتریکی و مغناطیسی یکدیگر را خنثی کنند. یعنی $\vec{E}=v\vec{B}$ باشد، لذا می‌توان نوشت

$$\frac{\Delta V}{L}=vB\Rightarrow\frac{۳/۹\times۱۰^{-۶}}{۰/۸۵\times۱۰^{-۲}}=v(۱/۲\times۱۰^{-۳})\Rightarrow v=۰/۳۸\,m/s$$

●●۱۵- در شکل ۲۴-۳۸، مکعب رسانای توپری با ابعاد $d_x=۵/۰۰m$، $d_y=۳/۰۰m$ و $d_z=۲/۰۰m$ با سرعت ثابت $\vec{v}=(۲۰/۰\,m/s)\hat{i}$ در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}=(۳۰/۰\,mT)\hat{j}$ حرکت می‌کند. (الف) میدان الکتریکی داخل مکعب بر حسب بردار یکه و (ب) اختلاف پتانسیل دو سر مکعب چقدر است؟



شکل ۲۴-۳۸ مسئله‌های ۱۵ و ۱۶

حل: (الف) چون سرعت ثابت است لذا $\vec{F}=۰$ است و داریم

$$\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}=۰\Rightarrow\vec{E}=-\vec{v}\times\vec{B}$$

$$\vec{E}=-(۲۰\hat{i})\times(۳۰\times۱۰^{-۳}\hat{j})=-۰/۶\hat{k}\quad V/m$$

$$V=Ed=(۰/۶)(۲)=۱/۲\,V$$

(ب)

Scanned by CamScanner

●●●۱۶- شکل ۲۴-۳۸ قطعه فلزی را نشان می‌دهد که وجه‌های آن با محورهای مختصات موازی‌اند. این قطعه در میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی ۰/۰۲۰T قرار دارد. طول یک ضلع این قطعه ۲۵cm است که با مقیاس نشان داده نشده است. این قطعه با تندی ۳/۰m/s به نوبت موازی با هر محور حرکت می‌کند و اختلاف پتانسیل V ظاهر شده در دو طرف قطعه اندازه‌گیری می‌شود. در حرکت موازی با محور y، $V=$۱۲mV، موازی با محور z، $V=$۱۸mV و موازی با محور x، $V=$۰ است. ابعاد قطعه (الف) d_x، (ب) d_y و (پ) d_z چقدرند؟

حل: (الف)، (ب) و (پ): ΔV را اختلاف پتانسیل دو سر هر ضلع و d طول آن ضلع در نظر می‌گیریم، داریم:

$$E=\frac{\Delta V}{d} \Rightarrow vB=\frac{\Delta V}{d}$$
$$E=vB$$

$$d_y=\frac{\Delta V}{vB}=\frac{12\times10^{-3}}{(3)(0/02)}=0/2\,\text{m}=20\,\text{cm}$$

$$d_z=\frac{18\times10^{-3}}{(3)(0/02)}=0/3\,\text{m}=30\,\text{cm}$$

به این ترتیب طول ضلع داده شده در مسئله (۲۵cm) مربوط به d_x است. یعنی $d_x=$۲۵cm.

بخش ۲۴-۶ ذرهٔ باردار در حرکت دایره‌ای

●۱۷- الکترونی با انرژی جنبشی ۱/۲۰keV دایره‌ای را در صفحهٔ عمود بر میدان مغناطیسی یکنواختی می‌پیماید. شعاع مدار ۲۵/۰cm است. (الف) تندی الکترون، (ب) بزرگی میدان مغناطیسی، (پ) بسامد چرخش و (ت) دورهٔ تناوب حرکت را پیدا کنید. SSM

حل: (الف)
$$K=\frac{1}{2}m_ev^2 \Rightarrow v=\sqrt{\frac{2K}{m_e}}$$
$$v=\sqrt{\frac{2(1/2\times10^{3})(1/6\times10^{-19})}{(9/11\times10^{-31})}}=2/05\times10^{7}\ \text{m/s}$$

(ب)
$$m_e\frac{v^2}{r}=evB \Rightarrow B=\frac{m_ev}{er}$$
$$B=\frac{(9/11\times10^{-31})(2/05\times10^{7})}{(1/6\times10^{-19})(25\times10^{-2})}=4/67\times10^{-4}\ \text{T}$$

(پ)
$$v=rw=r2\pi f \Rightarrow f=\frac{v}{2\pi r}=\frac{2/05\times10^{7}}{2(3/14)(25\times10^{-2})}$$
$$=1/31\times10^{-4}\ T$$

(ت)
$$T=\frac{1}{f}=\frac{1}{1/31\times10^{-4}}=7/63\times10^{-8}\ \text{s}$$

●۱۸- الکترونی از حالت سکون توسط اختلاف پتانسیل ۳۵۰V شتاب می‌گیرد. الکترون سپس با سرعتی عمود بر میدان وارد میدان مغناطیسی یکنواختی (بابزرگی ۲۰۰mT) می‌شود. (الف) تندی الکترون و (ب) شعاع مسیر آن در میدان مغناطیسی را محاسبه کنید.

حل: (الف)
$$eV=\frac{1}{2}m_ev^2 \Rightarrow v=\sqrt{\frac{2eV}{m_e}}$$
$$v=\sqrt{\frac{2(1/6\times10^{-19})(350)}{(9/11\times10^{-31})}}=1/11\times10^{7}\ \text{m/s}$$

(ب)
$$m\frac{v^2}{r}=qvB \Rightarrow r=\frac{m_ev}{eB}=\frac{(9/11\times10^{-31})(1/11\times10^{7})}{(1/6\times10^{-19})(200\times10^{-3})}$$
$$=3/16\times10^{-4}\ \text{m}$$

●۱۹- چه میدان مغناطیسی یکنواختی باید عمود بر باریکه‌ای از الکترونهای متحرک با تندی ۱/۳۰×۱۰^۶ m/s اعمال شود تا الکترونها در دایره‌ای به شعاع ۰/۳۵۰m حرکت کنند؟

حل:
$$B=\frac{m_ev}{er}=\frac{(9/11\times10^{-31})(1/3\times10^{6})}{(1/6\times10^{-19})(0/35)}=2/11\times10^{-5}\ \text{T}$$

●۲۰- در یک آزمایش هسته‌ای پروتونی با انرژی جنبشی ۱/۰MeV در مسیری دایره‌ای در میدان مغناطیسی یکنواختی حرکت می‌کند. انرژی (الف) یک ذرهٔ آلفا $(q=+2e\,,\,m=4/0\text{u})$ و (ب) یک دوترون $(q=+e\,,\,m=2/0\text{u})$ چقدر باید باشد تا در همان مسیر دایره‌ای حرکت کنند؟

حل: (الف)
$$K=\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v=\sqrt{\frac{2k}{m}}$$
$$m\frac{v^2}{r}=qvB \Rightarrow v=\frac{qBr}{m} \Rightarrow \sqrt{\frac{2K}{m}}=\frac{qBr}{m} \Rightarrow r=\frac{\sqrt{2mK}}{qB}$$

می‌خواهیم شعاع دوران دو ذره با هم برابر باشد، لذا می‌توان نوشت:

$$r_\alpha=r_p \Rightarrow \frac{m_\alpha K_\alpha}{q_\alpha^2}=\frac{m_pK_p}{q_p^2} \Rightarrow$$

$$K_\alpha=\left(\frac{mp}{m_\alpha}\right)\left(\frac{q_\alpha}{q_p}\right)^2K_p=\left(\frac{1}{4}\right)(2)^2K_p=K_p=1\ \text{MeV}$$

(ب)
$$K_d=\left(\frac{mp}{m_d}\right)\left(\frac{q_d^{2}}{q_p}\right)^2K_p=\left(\frac{1}{2}\right)(1)^2=\frac{K_p}{2}=0/5\,\text{MeV}$$

●۲۱- (الف) بسامد چرخش الکترونی با انرژی ۱۰۰eV را در میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی ۳۵/۰μT پیدا کنید. (ب) اگر سرعت الکترون بر میدان مغناطیسی عمود باشد، شعاع مسیر آن را محاسبه کنید.

حل: (الف) از معادلهٔ (۲۴-۱۸) داریم

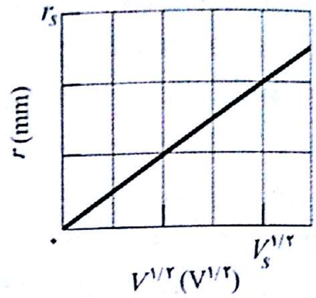
$$f=\frac{eB}{2\pi m_e}=\frac{(1/6\times10^{-19})(35\times10^{-6})}{2(3/14)(9/11\times10^{-31})}=9/78\times10^{5}\ \text{Hz}$$

(ب) از معادله (۲۴-۱۶) داریم:

$$r=\frac{m_ev}{eB}=\frac{\sqrt{2m_eK}}{eB}$$
$$=\frac{\sqrt{2\times(9/11\times10^{-31})(100)(1/6\times10^{-19})}}{(1/6\times10^{-19})(35\times10^{-6})}=0/964\ \text{m}$$

Scanned by CamScanner

۲۲●- الکترونی از حالت سکون با اختلاف پتانسیل V شتاب می‌گیرد و سپس وارد ناحیه‌ای با میدان مغناطیسی یکنواخت می‌شود که در آن حرکت دایره‌ای یکنواختی انجام می‌گیرد. شکل ۲۴-۳۹ شعاع r این حرکت را برحسب $V^{1/2}$ به دست می‌دهد. مقیاس محور عمودی $r_s = 3.0\ \text{mm}$، و مقیاس محور افقی با $V_s^{1/2} = 40.0\ V^{1/2}$ مشخص شده است. بزرگی میدان مغناطیسی چقدر است؟



شکل ۲۴-۳۹ مسئلهٔ ۲۲

حل: با توجه به نمودار دیده می‌شود که در $r = 2\text{mm}$ و $\sqrt{V} = 40$ است.

$$K = eV \Rightarrow \frac{1}{2}m_e v^2 = eV \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eV}{m_e}}$$

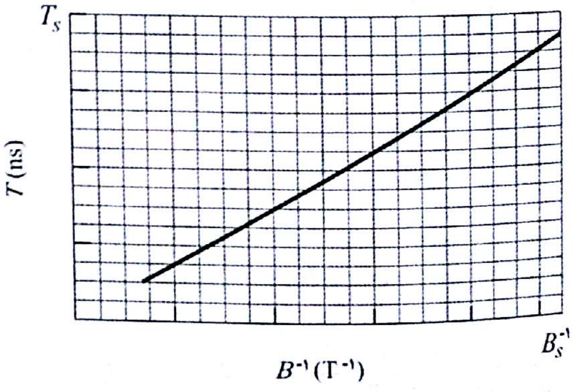
از طرف دیگر داریم:

$$m_e\frac{v^2}{r} = evB \Rightarrow B = \frac{m_e v}{er} = \frac{m_e}{er}\sqrt{\frac{2eV}{m_e}} = \sqrt{\frac{2m_e V}{er^2}}$$

با قرار دادن مقادیر مورد نظر خواهیم داشت

$$B = 6.75\times10^{-2}\ \text{T}$$

۲۳●- ذره معینی با بردار سرعت عمود بر جهت یک میدان مغناطیسی یکنواخت به داخل آن فرستاده می‌شود. شکل ۲۴-۴۰ دورهٔ تناوب T حرکت ذره را برحسب معکوس میدان مغناطیسی B نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $T_s = 40.0\ \text{ns}$ و مقیاس محور افقی با $B_s^{-1} = 5.0\ \text{T}^{-1}$ مشخص شده است. نسبت m/q جرم ذره به بزرگی بار آن چقدر است؟



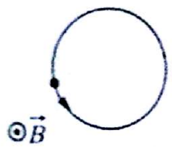
شکل ۲۴-۴۰ مسئلهٔ ۲۳

حل: از نمودار مشاهده می‌شود که در $B^{-1} = 2$ $(B = 0.5)$ داریم $T = 15\ \text{ns}$

$$T = \frac{2\pi m}{qB} \Rightarrow \frac{m}{q} = \frac{BT}{2\pi} = \frac{(0.5)(15\times10^{-9})}{2(3.14)}$$

$$= 1.19\times10^{-9}\ \text{kg/c}$$

۲۴●- در شکل ۲۴-۴۱ ذره‌ای روی یک دایره در ناحیه‌ای که در آن میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $B = 4.00\ \text{mT}$ وجود دارد حرکت می‌کند. ذره می‌تواند پروتون یا الکترون باشد (شما باید انتخاب کنید). به این ذره نیروی مغناطیسی با بزرگی $3.20\times10^{-15}\ \text{N}$ وارد می‌شود. (الف) تندی ذره، (ب) شعاع دایره و (پ) دورهٔ تناوب حرکت چقدر است؟



شکل ۲۴-۴۱ مسئلهٔ ۲۴

حل: (الف) با توجه به جهت B و جهت حرکت ذره می‌توان نتیجه گرفت که ذره الکترون است.

$$F = qvB \Rightarrow 3.2\times10^{-15} = (1.6\times10^{-19})v(4\times10^{-3})$$

$$\Rightarrow v = 5\times10^{6}\ \text{m/s}$$

(ب)
$$F = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow 3.2\times10^{-15} = (9.11\times10^{-31})\frac{(5\times10^{6})^2}{r}$$

$$\Rightarrow r = 7.11\times10^{-3}\ \text{m}$$

(پ)
$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2(3.14)(7.11\times10^{-3})}{5\times10^{6}} = 8.93\times10^{-9}\ \text{s}$$

$$= 8.93\ \text{ns}$$

۲۵●- یک ذرهٔ آلفا $(q = +2e,\ m = 4.00\text{u})$ در مسیری دایره‌ای به شعاع $4.50\ \text{cm}$ در میدان مغناطیسی یکنواختی با $B = 1.20\ \text{T}$ حرکت می‌کند. (الف) تندی ذره، (ب) دورهٔ تناوب چرخش آن، (پ) انرژی جنبشی آن و (ت) اختلاف پتانسیلی را که برای رسیدن به این انرژی توسط آن شتابدار شده است، محاسبه کنید.

حل: (الف) از معادله (۲۴-۱۶) داریم:

$$v = \frac{qrB}{m_\alpha} = \frac{2erB}{m_\alpha} = \frac{2(1.6\times10^{-19})(4.5\times10^{-2})(1.2)}{(4)(1.66\times10^{-27})}$$

$$= 2.6\times10^{6}\ \text{m/s}$$

(ب)
$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2(3.14)(4.5\times10^{-2})}{2.6\times10^{6}} = 1.09\times10^{-7}\ \text{s}$$

(پ)
$$K_\alpha = \frac{1}{2}m_\alpha v^2 = \left(\frac{1}{2}\right)(4)(1.66\times10^{-27})(2.6\times10^{6})^2$$

$$= 2.24\times10^{-14}\ \text{J}$$

(ت)
$$K = U = qV \Rightarrow 2.24\times10^{-14} = 2(1.6\times10^{-19})V$$

$$\Rightarrow V = 7\times10^{4}\ \text{V}$$

Scanned by CamScanner

●●۲۶- ذره‌ای با حرکت دایره‌ای یکنواخت به شعاع $26/1\mu m$ در میدان مغناطیسی یکنواختی قرار دارد. نیروی مغناطیسی وارد بر ذره دارای بزرگی $1/60\times10^{-17}$ N است. انرژی جنبشی ذره چقدر است؟

حل:

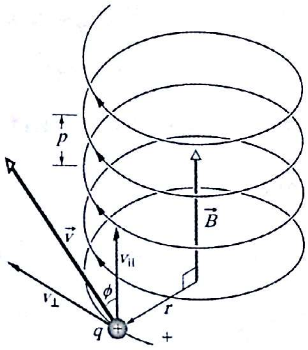
$$F = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow mv^2 = rF$$

$$F = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}rf = \left(\frac{1}{2}\right)(26/1\times10^{-6})(1/6\times10^{-17})$$

$$= 2/1\times10^{-22}\ \text{J}$$

●●۲۷- الکترونی در یک مسیر مارپیچی در میدان مغناطیسی یکنواختی به‌بزرگی $0/300$ T حرکت می‌کند. گام مسیر $6/00\mu m$ و بزرگی نیروی مغناطیسی واردبر الکترون برابر با $2/00\times10^{-15}$ N است. تندی الکترون چقدر است؟

حل:



مسافت پیموده شده در جهت $\vec{B}$ (در یک گام P) $P = v_{\parallel}T$ است که با استفاده از معادله ۲۴-۱۷، $(T = 2\pi m/(qB))$ خواهیم داشت

$$v_{\parallel} = \frac{PeB}{2\pi m_e} = \frac{(6\times10^{-6})(1/6\times10^{-19})(0/3)}{2(3/14)(9/11\times10^{-31})}$$

$$= 5/03\times10^{4}\ \text{m/s}$$

برای $v_{\perp}$ می‌توان از رابطه نیرو استفاده کرد

$$F = ev_{\perp}B \Rightarrow 2\times10^{-15} = (1/6\times10^{-19})v_{\perp}(0/3)$$

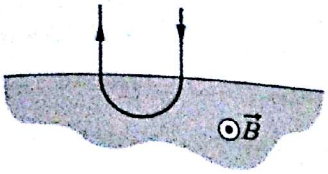
$$\Rightarrow v_{\perp} = 4/17\times10^{4}\ \text{m/s}$$

در نتیجه تندی برابر است با

$$v = \sqrt{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2} = \sqrt{(4/17\times10^4)^2 + (5/03\times10^4)^2}$$

$$= 6/53\ \text{m/s}$$

●●۲۸- در شکل ۲۴-۴۲، ذرهٔ بارداری وارد ناحیه‌ای از یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ می‌شود، نصف دایره‌ای را طی می‌کند و سپس از آن ناحیه خارج می‌شود. ذره می‌تواند پروتون یا الکترون باشد (شما باید تصمیم بگیرید). این ذره ۱۳۰ ns را در این ناحیه سپری می‌کند. (الف) بزرگی $\vec{B}$ چقدر است؟ (ب) اگر ذره با دو برابر انرژی جنبشی اولیه (در راستای همان مسیر) دوباره به میدان مغناطیسی برگردد، در این حرکت چه مدت زمان در میدان خواهد بود؟



شکل ۲۴-۴۲ مسئلهٔ ۲۸

حل: با توجه به جهت $\vec{B}$ و جهت حرکت ذره می‌توان نتیجه گرفت که ذره پروتون است.

(الف) مسیر پیموده شده در میدان مغناطیسی نیم‌دایره است در نتیجه زمان طی شده برابر نصف زمان تناوب بوده است پس $T = 260\ \text{ns} = 260\times10^{-9}$ s است. با استفاده از معادلهٔ (۲۴-۱۷) می‌توان نوشت:

$$B = \frac{2\pi m_p}{qT} = \frac{2(3/14)(1/67\times10^{-27})}{(1/6\times10^{-19})(260\times10^{-9})} = 0/252\text{T}$$

(ب) در معادلهٔ (۲۴-۱۷)، m، q و B ثابت می‌مانند در نتیجه T نیز ثابت می‌ماند که ثابت بودن T بیانگر این است که زمان عبور نیز ثابت است.

●●۲۹- پوزیترونی با انرژی جنبشی $2/00$keV به داخل میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $0/100$T پرتاب می‌شود، به طوری که بردار سرعت آن با $\vec{B}$ زاویهٔ $89/0°$ می‌سازد. (الف) دورهٔ تناوب، (ب) گام p و (پ) شعاع r مسیر مارپیچی آن را پیدا کنید. SSM WWW

حل: (الف) شکل ۲۴-۱۱ کتاب را ببینید. اگر v تندی پوزیترون باشد آنگاه $v_{\perp} = v\sin\phi$ مؤلفه عمود بر میدان مغناطیسی است. چنانچه شعاع مسیر را r بنامیم از قانون دون نیوتون داریم

$$eBv = m_e\frac{v_{\perp}^2}{r} \Rightarrow r = \frac{m_e v_{\perp}}{eB}$$

برای زمان تناوب داریم

$$T = \frac{2\pi r}{v_{\perp}} = \frac{2\pi}{v_{\perp}}\left(\frac{m_e v_{\perp}}{eB}\right) = \frac{2\pi m_e}{eB}$$

که در واقع همان معادله (۲۴-۱۷) است.

$$T = \frac{2(3/14)(9/11\times10^{-31})}{(1/6\times10^{-19})(0/1)} = 3/58\times10^{-10}\ \text{s}$$

(ب) گام مسافتی است که ذره در طی زمان یک دوره تناوب در امتداد میدان مغناطیسی طی می‌کند. پس $P = v_{\parallel}T$ است که $v_{\parallel} = v\cos\phi$ و تندی v را نیز می‌توانیم از انرژی جنبشی به دست آوریم

$$K = \frac{1}{2}m_e v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2k}{m_e}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2(2\times10^3)(1/6\times10^{-19})}{(9/11\times10^{-31})}} = 2/65\times10^{7}\ \text{m/s}$$

لذا خواهیم داشت:

$$P = v_{\parallel}T = vT\cos\phi = (2/65\times10^7)(3/58\times10^{-10})\cos 89°$$

$$= 1/66\times10^{-3}\ \text{m}$$

Scanned by CamScanner

(پ)

$$v=r\omega=r\frac{2\pi}{T}\Rightarrow r=\frac{vT}{2\pi}=\frac{(۲/۶۵\times ۱۰^{۷})(۳/۵۸\times ۱۰^{-۱۰})}{۲(۳/۱۴)}$$

$$=۱/۵۱\times ۱۰^{-۳}\ \text{m}$$

●●۳۰- الکترونی روی مسیری مارپیچی در میدان مغناطیسی یکنواختی که با رابطهٔ $\vec{B}=(۲۰\hat{i}-۵۰\hat{j}-۳۰\hat{k})\text{mT}$ داده می‌شود حرکت می‌کند. در زمان $t=۰$ سرعت الکترون با رابطهٔ $\vec{v}=(۲۰\hat{i}-۳۰\hat{j}+۵۰\hat{k})\text{m/s}$ داده می‌شود. (الف) زاویهٔ ϕ میان $\vec{v}$ و $\vec{B}$ چقدر است؟ سرعت الکترون نسبت به زمان تغییر می‌کند. آیا (ب) تندی آن و (پ) زاویهٔ ϕ نسبت به زمان تغییر می‌کند؟ (ت) شعاع مسیر مارپیچی چقدر است؟

حل: (الف) از رابطهٔ زیر می توان زاویهٔ بین $\vec{v}$ و $\vec{B}$ را به دست آورد. $\cos\phi=\frac{\vec{v}\cdot\vec{B}}{vB}$

$$\vec{v}\cdot\vec{B}=(۲۰\hat{i}-۳۰\hat{j}+۵۰\hat{k})\cdot(۲۰\hat{i}-۵۰\hat{j}-۳۰\hat{k})=۴۰۰$$

$$v=\sqrt{(۲۰)^{۲}+(-۳۰)^{۲}+(۵۰)^{۲}}=۶۱/۶۵\text{m/s}$$

$$B=\sqrt{(۲۰)^{۲}+(-۵۰)^{۲}+(-۳۰)^{۲}}=۶۱/۶۵\,\text{mT}$$

در نتیجه داریم:

$$\phi=\cos^{-۱}\frac{۴۰۰}{(۶۱/۶۵)^{۲}}=۸۳/۹۶^{\circ}$$

ب) خیر. نیروی مغناطیسی ثابت فقط جهت حرکت ذره را تغییر می‌دهد و مقدار تندی و انرژی جنبشی را تغییر نمی‌دهد.

پ) مؤلفه‌های سرعت $v_{\parallel}$ و $v_{\perp}$ هر دو ثابت هستند لذا ϕ ثابت می‌ماند.

ت) داریم $r=mv_{\perp}/eB$ که $v_{\perp}$ از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$v_{\perp}=v\sin\phi=(۶۱/۶۵)\sin(۸۳/۹۶^{\circ})=۶۱/۳\ \text{m/s}$$

$$r=\frac{m_e v_{\perp}}{eB}=\frac{(۹/۱۱\times ۱۰^{-۳۱})(۶۱/۳)}{(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})(۶۱/۶۵\times ۱۰^{-۳})}$$

$$=۵/۶۶\times ۱۰^{-۹}\ \text{m}=۵/۶۶\text{nm}$$

●●۳۱- یک طیف‌سنج جرم تجارتی (به مسئلهٔ نمونهٔ ۲۴-۳ نگاه کنید) برای جداکردن یون‌های اورانیوم با جرم $۳/۹۲\times ۱۰^{-۲۵}$kg و بار الکتریکی $۳/۲۰\times ۱۰^{-۱۹}$ C از نمونه‌های مربوط به کار می‌رود. یونها توسط اختلاف پتانسیل ۱۰۰ kV شتاب می‌گیرند و سپس وارد میدان مغناطیسی یکنواختی می‌شوند و در مسیری به شعاع ۱/۰۰m خم می‌شوند. یونها پس از انحراف به اندازهٔ ۱۸۰° و عبور از شکافی به پهنای ۱/۰۰mm و ارتفاع ۱/۰۰cm در ظرفی جمع‌آوری می‌شوند. (الف) بزرگی میدان مغناطیسی (عمودی) جداکننده چقدر است؟ اگر این دستگاه برای جداکردن ۱۰۰mg ماده در ساعت به کار رود، (ب) جریان یونهای موردنظر در دستگاه و (پ) انرژی گرمایی تلف شده را در مدت ۱/۰۰h محاسبه کنید.

حل: (الف) از مسئله نمونه ۲۴-۳ داریم

$$m=\frac{B^{۲}qx^{۲}}{۸V}\Rightarrow B=\sqrt{\frac{۸Vm}{qx^{۲}}}$$

که در آن $x=۲r=۲m$ است و با قرار دادن سایر مقادیر داریم $B=۰/۴۹۵T$.

ب) چنانچه تعداد یونهایی که در واحد زمان جدا می‌شدند را N در نظر بگیریم جریان برابر $i=qN$ می‌شود و از طرف دیگر اگر مقدار جرمی که در واحد زمان جدا می‌شود را نیز $M=mN$ در نظر بگیریم که m جرم یک یون است، در نتیجه خواهیم داشت

$$M=\frac{۱۰۰\times ۱۰^{-۶}}{۳۶۰۰}=۲/۷۸\times ۱۰^{-۸}\ \text{kg/s}$$

و $N=\frac{M}{m}$ را در رابطه $i=qN$ قرار می‌دهیم، داریم

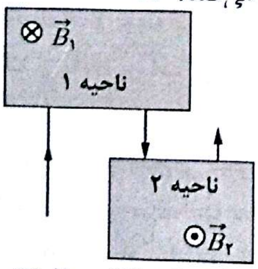
$$i=q\frac{M}{m}=(۳/۲\times ۱۰^{-۱۹})\frac{۲/۷۸\times ۱۰^{-۸}}{۳/۹۲\times ۱۰^{-۲۵}}=۲/۲۷\times ۱۰^{-۲}\ \text{A}$$

پ) انرژی qV توسط هر یون در محفظه ایجاد می‌شود بنابراین انرژی‌ای که در بازه زمانی Δt ایجاد می‌شود برابر است با

$$U=NqV\Delta t=\frac{i}{q}qV\Delta t=iV\Delta t$$

$$=(۲/۲۷\times ۱۰^{-۲})(۱۰۰\times ۱۰^{۳})(۳۶۰۰)=۸/۱۷\times ۱۰^{۶}\ \text{J}$$

●●۳۲- در شکل ۲۴-۴۳، الکترونی با انرژی جنبشی اولیهٔ ۴/۰ keV در لحظهٔ $t=۰$ وارد ناحیهٔ ۱ می‌شود. در آن ناحیه میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی ۰/۰۱۰ T و به طرف داخل صفحه برقرار است. الکترون یک نیمدایره را طی می‌کند و سپس از ناحیهٔ ۱ خارج و به طرف ناحیهٔ ۲ که ۲۵/۰cm با آن فاصله دارد حرکت می‌کند. یک اختلاف پتانسیل الکتریکی $\Delta V=۲۰۰۰$ V در دو سر این فاصله برقرار است با قطبیتی که تندی الکترونها را به طور یکنواخت با عبور از این فاصله افزایش می‌دهد. در ناحیهٔ ۲ میدان مغناطیسی یکنواختی به طرف خارج از صفحه با بزرگی ۰/۰۲۰ T وجود دارد. الکترون یک نیمدایره را می‌پیماید و سپس ناحیهٔ ۲ را ترک می‌کند. در چه زمان t آنجا را ترک می‌کند؟



شکل ۲۴-۴۳ مسئلهٔ ۳۲

حل: از معادله ۲۴-۱۷ می‌توان استفاده کرد که زمان تناوب $T=\frac{۲\pi m_e}{eB}$ را به دست می‌دهد. بنابراین زمان کلی برابر است با

$$\left(\frac{T}{۲}\right)_۱+t_{\text{گاف}}+\left(\frac{T}{۲}\right)_۲=\frac{\pi m_e}{e}\left(\frac{۱}{B_۱}+\frac{۱}{B_۲}\right)+t_{\text{گاف}}$$

Scanned by CamScanner

و زمان سپری شده در گاف را نیز می‌توان از معادله $x=1/2at^2+v_0t$ به دست آورد.

$$d=\frac{1}{2}\frac{e\Delta V}{m_e d}t^2+\sqrt{\frac{2k_0}{me}}t$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده به یک معادله درجه دوم برای t می رسیم که با حل آن خواهیم داشت $t_{گاف}=5/96\times10^{-9}s$.

در نتیجه زمان کل برابر است با

$$\frac{\pi(9/11\times10^{-31})}{(1/6\times10^{-19})}\left(\frac{1}{0/01}+\frac{1}{0/02}\right)+5/96\times10^{-9}$$

$$=8/7\times10^{-9}\text{ s}=8/7\text{ ns}$$

●●۳۳- نوع خاصی از ذرهٔ بنیادی با تبدیل به یک الکترون e^- و یک پروتون e^+ واپاشیده می‌شود. فرض کنید ذره‌ای که واپاشیده می‌شود در حالت سکون در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ با بزرگی $3/53\text{mT}$ قرار داشته و e^- و e^+ از نقطهٔ واپاشی در مسیرهایی که در صفحهٔ عمود بر $\vec{B}$ قرار دارند از هم دور شوند. چه مدت پس از واپاشی e^- و e^+ برخورد می‌کنند؟

حل: هر کدام از ذرات مسیر دایره‌ای یکسان ولی در جهت مخالف را پیموده و سپس با هم برخورد می‌کنند پس زمان برخورد آنها نصف زمان تناوب است و با استفاده از معادله (۲۴-۱۷) داریم

$$T=\frac{2\pi m}{qB}=\frac{2\pi(9/11\times10^{-31})}{(1/6\times10^{-19})(3/53\times10^{-3})}=1/014\times10^{-8}\text{ s}$$

و زمان برخورد آنها برابر است با

$$t=\frac{T}{2}=0/507\times10^{-8}\ s=5/07\text{ns}$$

●●۳۴- چشمه‌ای الکترونی را با تندی $v=1/5\times10^7\text{ m/s}$ به میدان مغناطیسی یکنواختی با بزرگی $B=1/0\times10^{-3}\text{ T}$ پرتاب می‌کند. سرعت الکترون با جهت میدان مغناطیسی زاویهٔ $\theta=10°$ می‌سازد. فاصلهٔ d از نقطهٔ پرتاب که در آن الکترون بعداً خط میدانی را که از نقطهٔ پرتاب می‌گذرد قطع می‌کند پیدا کنید.

حل: شکل ۲۴-۱۱ کتاب را در نظر می‌گیریم. بسامد الکترون برابر است با $f=eB/2\pi m_e$ و مولفه سرعت الکترون در جهت میدان برابر است با $v_{\parallel}=v\cos\theta$. بنابراین مسافت طی شده را که با توجه به مسئله می‌توان همان گام در نظر گرفت از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$d=v_{\parallel}T=\frac{v_{\parallel}}{f}=\frac{(v\cos\theta)(2\pi m_e)}{eB}$$

که با قرار دادن مقادیر داده شد خواهیم داشت $d=0/53\text{ m}$.

●●۳۵- طول کل مسیر پیموده شده توسط یک دوترون در سیکلوترون مسئلهٔ نمونهٔ ۲۴-۵ را در ضمن (کل) فرایند شتاب‌گیری محاسبه کنید. فرض کنید که پتانسیل شتاب دهنده میان دی‌ها 80kV باشد

حل: با توجه به مسئله نمونهٔ ۲۴-۵ انرژی جنبشی الکترون در موقع خروج برابر $K=2/7\times10^{-12}\text{ J}$ است و انرژی که در هر دور شتاب گرفتن qV است که چون در هر دور دوبار شتاب می‌گیرد، انرژی کسب شده در هر دور برابر است با

$$U=2qV=2(1/6\times10^{-19})(80\times10^3)=2/56\times10^{-14}\text{ J}$$

در نتیجه می‌توان تعداد دوری را که دوترون برای رسیدن به این انرژی طی می‌کند را به دست آورد.

$$N=\frac{K}{U}=\frac{2/7\times10^{-12}}{2/56\times10^{-14}}=105/5 \quad \text{دور}$$

با استفاده از انرژی میانگین می‌توان شعاع میانگین دوران را به دست آورد.

$$\bar{K}=\frac{0+2/7\times10^{-12}}{2}=1/35\times10^{-12}\text{ J}$$

$$\bar{K}=\frac{1}{2}m\bar{v}^2\Rightarrow\bar{v}=\sqrt{\frac{2\bar{K}}{m}}=\sqrt{\frac{2(1/35\times10^{-12})}{3/34\times10^{-27}}}$$

$$=2/84\times10^7\text{ m/s}$$

$$m\frac{\bar{v}}{\bar{r}}=q\bar{v}B\Rightarrow\bar{r}=\frac{m\bar{v}}{qB}=\frac{(3/34\times10^{-27})(2/84\times10^7)}{(1/6\times10^{-19})(1/57)}$$

$$=0/37\text{ m}$$

بنابراین کل مسافت تقریبی پیموده شده برابر است با

$$S=N(2\pi\bar{r})=(105/5)(2)(3/14)(0/37)=2/45\times10^2\text{ m}$$

●●۳۶- در یک سیکلوترون مشخص پروتون در دایره‌ای به شعاع $0/500\text{m}$ حرکت می‌کند. بزرگی میدان مغناطیسی $1/20\text{ T}$ است. (الف) بسامد نوسانگر چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی پروتون برحسب الکترون ولت چقدر است؟

حل: (الف) از معادله (۲۴-۲۴) داریم

$$f_{osc}=\frac{|q|B}{2\pi m}=\frac{(1/6\times10^{-19})(1/2)}{2\pi(1/67\times10^{-27})}=1/83\times10^7\text{ Hz}$$

ب)

$$m\frac{v^2}{r}=quB\Rightarrow v=\frac{qrB}{m}$$

$$v=\frac{(1/6\times10^{-19})(0/5)(1/2)}{1/67\times10^{-27}}=5/75\times10^7\text{ m/s}$$

$$K=\frac{1}{2}mv^2=\left(\frac{1}{2}\right)(1/67\times10^{-27})(5/75\times10^7)^2$$

$$=2/76\times10^{-12}\ J=17/3\text{MeV}$$

Scanned by CamScanner

۳۷●●- پروتونی در یک سیکلوترون با شروع از حالت تقریباً سکون در مرکز، در مسیری دایره‌ای حرکت می‌کند. وقتی که از شکاف بین دی‌ها می‌گذرد، اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دی‌ها ۲۰۰V است. (الف) با هر بار عبور از شکاف انرژی جنبشی آن چقدر افزایش می‌یابد؟ (ب) وقتی که ۱۰۰ بار از شکاف بگذرد انرژی جنبشی آن چقدر است؟ فرض کنید r_{100} شعاع مسیر دایره‌ای پروتون در هنگام کامل‌شدن دور صدم و موقع ورود به یک دی، و r_{101} شعاع بعدی موقع ورود به دی در زمان بعدی باشد، (پ) وقتی شعاع از r_{100} به r_{101} تغییر کند درصد افزایش شعاع چقدر است؟ یعنی

$$\text{درصد افزایش} = \frac{r_{101}-r_{100}}{r_{100}}\times 100 \ (\text{درصد})$$

چقدر است؟

حل: (الف) از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم. انرژی جنبشی در هر عبور برابر خواهد بود با:

ب) $\Delta K = \Delta U = q\Delta V = 200eV = 3.2\times10^{-17}\ \text{J}$

پ) $\Delta K = n\Delta K = (100)(200) = 20\ \text{keV}$

از دو رابطه $n(200)=\frac{1}{2}mv^2$ و $r=mv/qB$ ، داریم:

$$r=\frac{m_p}{eB}\sqrt{\frac{2n(200)}{m_p}}$$

مشاهده می‌شود که r متناسب با $\sqrt{n}$ است. بنابراین می‌توان درصد افزایش شعاع را وقتی از $n=100$ به $n=101$ می‌رود از رابطه زیر به دست آورد

$$\frac{\sqrt{101}-\sqrt{100}}{\sqrt{100}} = 0.00499$$ یا ٪ ۰/۴۹۹

۳۸●●- سیکلوترونی با دی به شعاع $53.0\ \text{cm}$ در بسامد نوسانگر برابر با $12.0\ \text{MHz}$ برای شتاب دادن به پروتونها کار می‌کند. (الف) بزرگی B میدان مغناطیسی موردنیاز برای رسیدن به تشدید چقدر است؟ (ب) در این بزرگی، انرژی جنبشی پروتونی که از سیکلوترون خارج می‌شود چقدر است؟ اکنون فرض کنید که $B=1.57\ \text{T}$ باشد. (پ) حالا چه بسامد نوسانگری برای رسیدن به تشدید لازم است؟ (ت) در این بسامد، انرژی جنبشی پروتون خارج شده چقدر است؟

حل: (الف)

$$m\frac{v^2}{r} = quB \Rightarrow mv = qrB$$

اما $v=r\omega=r(2\pi f)$، لذا داریم:

$$mr(2\pi f) = qrB \Rightarrow B=\frac{2\pi mf}{q}$$

$$B=\frac{(2\pi)(1.67\times10^{-27})(12\times10^{6})}{1.6\times10^{-19}} = 0.787\ \text{T}$$

ب) $v=r(2\pi f) = (2\pi)(0.53)(12\times10^{6}) = 3.99\times10^{7}\ \text{m/s}$

$$K=\frac{1}{2}mv^2=\left(\frac{1}{2}\right)(1.67\times10^{-27})(3.99\times10^{7})^2 = 1.33\times10^{-12}\ \text{J}$$

پ) $B=\frac{2\pi mf}{q} \Rightarrow 1.57 = \frac{(2\pi)(1.67\times10^{-27})}{1.6\times10^{-19}}$

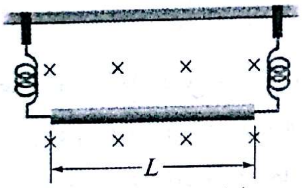
$\Rightarrow f = 2.4\times10^{7}\ \text{Hz}$

ت) $v=r(2\pi f) = (0.53)(2\pi)(2.4\times10^{7}) = 7.99\times10^{7}\ \text{m/s}$

$$K=1/2mv^2=(1/2)(1.67\times10^{-27})(7.99\times10^{7})^2$$
$$=5.33\times10^{-12}\ \text{J}$$

بخش ۲۴-۸ نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان

۳۹●- یک سیم ۱۳/۰ گرمی به طول $L=62.0\ \text{cm}$ توسط دو رابط قابل انعطاف در میدان مغناطیسی یکنواختی آویزان است (شکل ۲۴-۴۴). (الف) بزرگی و (ب) جهت (چپ یا راست) جریان مورد نیاز برای حذف نیروی کشش در رابطهای نگهدارنده چیست؟



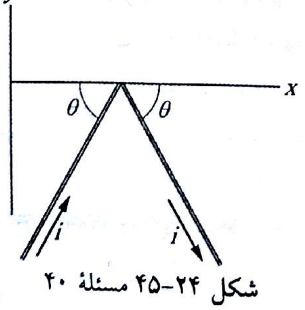
شکل ۲۴-۴۴ مسئلهٔ ۳۹

حل: (الف) نیروی مغناطیسی باید با نیروی گرانشی برابر باشد تا اثر وزن خنثی شود. یعنی

$$iLB = mg \Rightarrow i=\frac{mg}{LB}$$

$$i=\frac{(13\times10^{-3})(9.8)}{(0.62)(0.44)} = 0.467\text{A}$$

۴۰●- سیم خمیدهٔ نشان داده شده در شکل ۲۴-۴۵ در میدان مغناطیسی یکنواختی قرار دارد. طول هر قسمت مستقیم $2.0\ \text{m}$ و با محور x زاویهٔ $\theta=60^\circ$ می‌سازد و حامل جریان 2.0A است. اگر میدان مغناطیسی با (الف) $4.0\hat{k}\text{T}$ و (ب) $4.0\hat{i}\text{T}$ داده شود، نیروی مغناطیسی خالص وارد بر سیم برحسب بردار یکه چگونه است؟



شکل ۲۴-۴۵ مسئلهٔ ۴۰

حل: (الف) از تقارن در می‌یابیم که مولفهٔ x نیروی کل است. چون میدان در جهت $\hat{k}$ است از قاعده دست راست مشاهده می‌کنیم که نیرو در هر دو بخش در جهت $-\hat{j}$ است. پس نیروی کل حاصل برروی دو بخش برابر است با

Scanned by CamScanner

$$F_y = 2(iLB)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = 2(2)(2)(4)\sin 30^\circ$$

$$= 16N \text{ یا } \vec{F}_{\text{کل}} = -16\hat{j}\text{ N}$$

ب) $B = 4\hat{i}T$، در این حالت از قاعده دست راست مشاهده می‌کنیم که نیروی وارد برسیم سمت چپ در جهت $-\hat{k}$ و برای سیم سمت راست در جهت $+\hat{k}$ است و چون بزرگی آنها است لذا نیروی کل برابر صفر خواهد شد.

●۴۱- یک خط قدرت افقی از جنوب به شمال حامل جریان ۵۰۰۰A است. میدان مغناطیسی زمین ($60/0\,\mu T$) به طرف شمال است و نسبت به افق به اندازهٔ $70/0^\circ$ به پایین تمایل دارد. (الف) بزرگی و (ب) جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ۱۰۰m از سیم ناشی از میدان زمین را پیدا کنید. SSM

حل: (الف) $F = iLB\sin\theta = (500)(100)(60\times10^{-6})\sin 70^\circ$

$$= 28/2\text{N}$$

ب) جهت نیرو نیز از قاعده دست راست به سوی غرب است.

●۴۲- سیمی به طول ۱/۸۰ m حامل جریان ۱۳/۰ A است و با میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $B = 1/50$ T زاویه $35/0^\circ$ می‌سازد. نیروی مغناطیسی وارد بر سیم را محاسبه کنید.

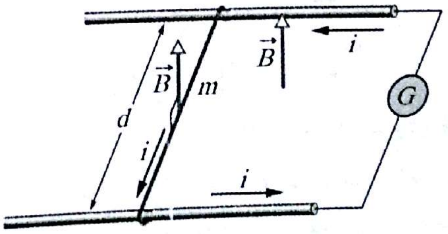
حل: $F = iLB\sin\theta = (13)(1/8)(1/5)\sin 35^\circ = 20/13$ N

●۴۳- سیمی به طول ۵۰/۰ cm حامل جریان ۰/۵۰۰ A در جهت مثبت محور x در میدان مغناطیسی $\vec{B} = (3/00\text{mT})\hat{j} + (10/0\text{ mT})\hat{k}$ است. برحسب بردار یکه، نیروی مغناطیسی وارد بر سیم چیست؟

حل: $\vec{F} = i\vec{L}\times\vec{B} = (0/5)(0/5\hat{i})\times(3\times10^{-3}\hat{j} + 10\times10^{-3}\hat{k})$

$$= (-2/5\times10^{-3}\hat{j} + 0/75\times10^{-3}\hat{k})\text{N}$$

●●۴۴- در شکل ۲۴-۴۶، یک سیم فلزی به جرم $m = 24/1$ mg می‌تواند روی دو ریل موازی افقی به فاصلهٔ $d = 2/56$cm از یکدیگر و با اصطکاک ناچیز بلغزد. این دستگاه در میدان مغناطیسی قائم یکنواختی با بزرگی ۵۶/۳ mT واقع است. در لحظهٔ $t = 0$، وسیلهٔ G به ریلها وصل می‌شود که در سیم و ریلها جریان ثابت $i = 9/13$mA را ایجاد می‌کند (حتی در وقتی که سیم در حرکت است). در $t = 61/1$ms (الف) تندی و (ب) جهت حرکت (چپ یا راست) سیم را پیدا کنید.



شکل ۲۴-۴۶ مسئلهٔ ۴۴

حل: (الف)

$$F = iLB = (9/13\times10^{-3})(2/56\times10^{-2})(56/3\times10^{-3})$$

$$= 1/32\times10^{-5}\text{ N}$$

$$F = ma \Rightarrow 1/32\times10^{-5} = (24/1\times10^{-6})a \Rightarrow a = 0/548\text{m/s}^2$$

$$v = at + v_0 = (0/548)(61/1\times10^{-3}) + 0 = 0/0334\text{ m/s}$$

ب) جهت نیرو و در نتیجه حرکت سیم به سمت چپ است.

●●●۴۵- یک میلهٔ مسی به جرم ۱/۰ kg روی دو ریل افقی به فاصلهٔ ۱/۰ m از یکدیگر قرار دارد و حامل جریان ۵۰A از یک ریل به ریل دیگر است. ضریب اصطکاک استاتیک میان میله و ریلها ۰/۶۰ است. (الف) بزرگی و (ب) زاویهٔ (نسبت به قائم) کمترین میدان مغناطیسی که میله را در آستانهٔ لغزش قرار می‌دهد چقدر است؟ GO

حل: (الف) و (ب) برای اینکه میله به حرکت درآید باید مؤلفهٔ افقی میدان مغناطیسی بر نیروی اصطکاک غلبه کند. نیروهای وارد بر میله عبارتند از نیروی مغناطیسی F، نیروی وزن، نیروی عمودی سطح رو به بالای N و نیروی اصطکاک f. در آستانهٔ حرکت $f = \mu_s N$ است

$$\sum F_x = 0 \quad F\cos\theta - f = 0 \Rightarrow F\cos\theta - \mu_s N = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F\sin\theta + N - my = 0 \Rightarrow N = mg - F\sin\theta$$

لذا خواهیم داشت:

$$F\cos\theta - \mu_s(mg - F\sin) = 0 \Rightarrow F\frac{\mu_s mg}{\mu_s\sin\theta + \cos\theta}$$

از طرف دیگر $F = iLB$ است در نتیجه داریم:

$$B = \frac{\mu_s mg}{iL(\mu_s\sin\theta + \cos\theta)}$$

حال شرط کمینه بودن B نسبت به θ را می‌نویسیم

$$\frac{dB}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{-\mu_s mg(\mu\cos\theta - \sin\theta)}{iL(\mu_s\sin\theta + \cos\theta)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \mu_s = 0/6 \Rightarrow \theta = 31^\circ$$

$$B_{\min} = \frac{(0/6)(1)(9/8)}{(50)(1)(0/6\sin 31^\circ + \cos 31^\circ)} = 0/1\text{ T}$$

●●●۴۶- رسانای دراز صلبی که در امتداد محور x قرار دارد در جهت منفی x حامل جریان ۵/۰ A است. میدان مغناطیسی موجود $\vec{B}$ با رابطهٔ $\vec{B} = 3/0\hat{i} + 8/0x^2\hat{j}$ داده می‌شود که x برحسب متر و B برحسب میلی تسلاست. برحسب بردار یکه، نیروی وارد بر یک بخش ۲/۰ متری این رسانا را که میان $x = 1/0$ m و $x = 3/0$ m قرار دارد پیدا کنید.

حل:

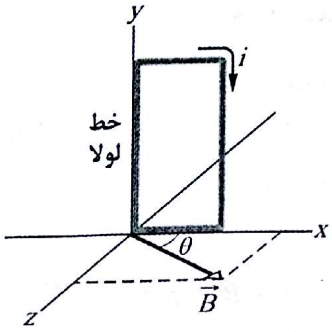
$$d\vec{F} = i\,\vec{dl}\times\vec{B} = i(-dx\hat{i})\times(3\hat{i} + 8x^2\hat{j})\times10^{-3} = -0/04x^2dx\hat{k}$$

$$F = -0/04\int_1^3 x^2dx\,\hat{k} = -0/035\hat{k}\text{ N}$$

Scanned by CamScanner

بخش ۲۴-۹ گشتاور نیروی وارد بر حلقهٔ جریان

●۴۷- شکل ۲۴-۴۷ یک پیچهٔ مستطیل شکل را با ۲۰ دور سیم به ابعاد $10\,cm$ در $5/0\,cm$ نشان می‌دهد. این پیچه حامل جریان $0/10\,A$ است و در یک طولش لولا شده است. پیچه در صفحهٔ xy قرار دارد و با جهت میدان مغناطیسی یکنواخت به بزرگی $0/50\,T$ زاویهٔ $\theta = 30^\circ$ می‌سازد. برحسب بردار یکه، گشتاور نیروی وارد بر پیچه نسبت به خط لولا چیست؟ SSM



شکل ۲۴-۴۷ مسئلهٔ ۴۷

حل: از معادله ۲۴-۳۷ داریم $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ که در آن

$$\vec{\mu} = -NiA\hat{k} = -(20)(0/1)(0/05)(0/01)\hat{k} = -1\times10^{-4}\,\hat{k}$$

و

$$\vec{B} = B\cos\theta\,\hat{i} + B\sin\theta\,\hat{k} = (0/5)\cos30^\circ\,\hat{i} + (0/5)\sin30^\circ\,\hat{k}$$

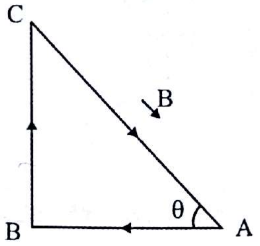
$$= 0/43\,\hat{i} + 0/25\,\hat{k}$$

در نتیجه داریم:

$$\vec{\tau} = (-1\times10^{-4}\,\hat{k})\times(0/43\,\hat{i} + 0/25\hat{k})$$

$$= -4/3\times10^{-3}\,\hat{j}\ N\cdot m$$

●۴۸- یک حلقهٔ جریان تک دور که از آن جریان $4/00A$ می‌گذرد به شکل یک مثلث قائم الزاویه به اضلاع ۵۰/۰، ۱۲۰ و ۱۳۰ سانتی‌متر است. این حلقه در میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $75/0\,mT$ که جهت آن موازی با جریان در ضلع ۱۳۰ سانتی‌متری حلقه است قرار دارد. بزرگی نیروی مغناطیسی وارد بر (الف) ضلع ۱۳۰ سانتی‌متری، (ب) ۵۰/۰ سانتی‌متری و (پ) ۱۲۰ سانتی‌متری چقدر است؟



حل:

الف) میدان موازی ضلع CA است لذا نیرویی بر این ضلع به طول $130\,cm$ وارد نمی‌شود.

ب) نیروی وارد بر ضلع BA برابر است با

$$\vec{F}_{AB} = i[AB(-\hat{i})\times(B\cos\theta\,\hat{i} - B\sin\theta\,\hat{j})]$$

$$= i(AB)B\sin\theta\,\hat{k} = (4)(0/5)(75\times10^{-3})\left(\frac{120}{130}\right)\hat{k}$$

$$= 0/138\hat{k}\ N$$

پ)

$$\vec{F}_{BC} = i[BC(\hat{j})\times(B\cos\theta\,\hat{i} - B\sin\theta\,\hat{j})]$$

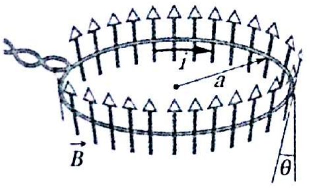
$$= -i(BC)B\cos\theta\,\hat{k} = -(4)(1/20)(75\times10^{-3})\left(\frac{50}{130}\right)\hat{k}$$

$$= 0/138\hat{k}\ N$$

ت) نیروی خالص وارد بر حلقه برابر صفر است

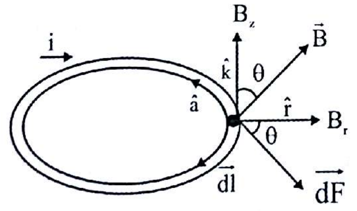
$$\vec{F} = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BC} + \vec{F}_{CA} = 0$$

●●۴۹- شکل ۲۴-۴۸ یک حلقه سیم به شعاع $a = 1/8\,m$ را نشان می‌دهد که بر جهت کلی یک میدان مغناطیسی واگرا و با تقارن شعاعی عمود است. بزرگی میدان مغناطیسی در همه جای حلقه یکسان و مساوی $B = 3/4\,mT$ است و جهت ان در همه جای حلقه با خط عمود بر صفحهٔ حلقه زاویهٔ $\theta = 20^\circ$ می‌سازد. سیمهای رابط پیچیده شده اثری در مسئله ندارند. اگر از حلقه جریان $i = 4/6\,mA$ عبور کند، بزرگی و جهت نیرویی را که میدان بر حلقه وارد می‌کند پیدا کنید.



شکل ۲۴-۴۸ مسئلهٔ ۴۹

حل:



عنصر $d\vec{l}$ از حلقه را در نظر می‌گیریم. نیروی $d\vec{F}$ را به دو مؤلفه افقی $dF\cos\theta$ و قائم $dF\sin\theta$ تجزیه می‌کنیم. بنا به تقارن برآیند نیروی افقی وارد بر میله صفر است و فقط نیروی برآیند قائم بر حلقه اثر می‌کند

$$dF = id\,lB\sin90^\circ = idlB$$

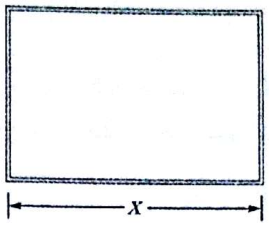
$$F_y = dF\sin\theta = iB\sin\theta\int_0^{2\pi a} dl = iB\sin\theta(2\pi a)$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت $F_y = 6\times10^{-7}\,N$ که عمود بر سطح حلقه و روبه پایین است.

●●۵۰- در شکل ۲۴-۴۹ حلقهٔ مستطیل شکلی که حامل جریان است در صفحهٔ میدان مغناطیسی یکنواختی با بزرگی $0/040\,T$ قرار دارد. این حلقه شامل یک دور سیم رسانای قابل انعطاف است که دور پایه‌ای قابل انعطاف پیچیده شده است به

Scanned by CamScanner

طوری که ابعاد مستطیل می‌تواند تغییر کند. (طول کل سیم تغییر نمی‌کند).وقتی طول لبهٔ x تقریباً از صفر تا بیشینهٔ مقدار آن برابر $۴/۰\,cm$ تغییر کند، بزرگی گشتاور نیروی τ وارد بر حلقه تغییر می‌کند. بیشینهٔ مقدار τ برابر با $۴/۸۰\times۱۰^{-۸}\,N$ است. جریان در حلقه چقدر است؟



شکل ۲۴-۴۹ مسئلهٔ ۵۰

حل: با توجه به صورت مسئله که $x_{max}=۴cm$ نتیجه می‌گیریم ضلع دیگر تقریباً به صفر نزدیک است و در واقع طول سیم l برابر $۲x_{max}$ یعنی برابر $۸cm$ است. از طرف دیگر می‌دانیم مساحت زمانی بیشینه است که مستطیل به مربع تبدیل شود. پس در حالتی که مساحت بیشینه باشد مربعی داریم به اضلاع $۲cm$ و بیشینه گشتاور نیز داده شده لذا می‌توان جریان را از رابطه زیر به دست آورد:

$$\tau=\mu B=iAB$$

$$i=\frac{\tau}{AB}=\frac{۴/۸\times۱۰^{-۸}}{(۰/۰۲)^{۲}(۰/۰۴)}=۰/۰۰۳\ A$$

۵۱●●- مقاومت پیچهٔ گالوانومتری (به مسئله نمونهٔ ۲۴-۷ نگاه کنید) $۷۵/۳\Omega$ است؛ وقتی جریان $۱/۶۲\,mA$ از پیچه می‌گذرد عقربهٔ آن به طور کامل منحرف می‌شود. (الف) مقدار مقاومت کمکی مورد نیاز جهت تبدیل گالوانومتر به یک ولت‌سنج که در انحراف کامل مقدار $۱/۰۰V$ را نشان دهد چقدر است؟ (ب) این مقاومت باید با گالوانومتر به طور متوالی وصل شود یا موازی؟ (پ) مقدار مقاومت کمکی مورد نیاز جهت تبدیل گالوانومتر به یک آمپرسنج که در انحراف کامل مقدار $۵۰/۰\,mA$ را نشان دهد چقدر است؟ (ت) این مقاومت باید به طور متوالی وصل شود یا موازی؟

حل: هنگامی که عقربه انحراف کامل دارد اختلاف پتانسیل دو سر گالوانومتر برابر است با

$$V_G=R_Gi=(۷۵/۳)(۱/۶۲\times۱۰^{-۳})=۰/۱۲۲\ V$$

که مشاهده می‌شود کمتر از $۱\ V$ است پس باید یک مقاومت کمکی به طور متوالی به گالوانومتر بسته شود.

$$V=i(R_G+R)\Rightarrow ۱=(۱/۶۲\times۱۰^{-۳})(۷۵/۳+R)\Rightarrow R=۵۴۲\Omega$$

(ب) و (پ) وقتی جریان کل $۰/۵A$ است و جریان در گالوانومتر $۱/۶۲\times۱۰^{-۳}\ A$ است نتیجه می‌گیریم مقاومت کمکی باید به طور موازی بسته شود. در چنین حالتی جریان در دو شاخه تقسیم می‌شود و در رابطه $R_Gi_۱=Ri_۲$ و $i_{کل}=i_۱+i_۲$ را داریم که با ترکیب دو معادله و حل آن برای R خواهیم داشت

$$R=۲/۵۲\Omega$$

۵۲●●- الکترونی با تندی $۲/۱۹\times۱۰^{۶}\,m/s$ روی دایره‌ای به شعاع $r=۵/۲۹\times۱۰^{-۱۱}m$ حرکت می‌کند. این مسیر دایره‌ای را به صورت یک حلقهٔ جریان با جریان ثابت برابر با نسبت بزرگی بار الکترون به دورهٔ تناوب حرکت در نظر بگیرید. اگر دایره در میدان مغناطیسی یکنواختی با بزرگی $B=۷/۱۰\,mT$ قرار گیرد، بیشینهٔ بزرگی ممکن گشتاور نیروی ایجاد شده توسط میدان روی حلقه چقدر است؟

حل: داریم $T=\frac{۲\pi r}{v}$ و

$$i=\frac{q}{t}=\frac{q}{T}=\frac{q}{۲\pi r}$$

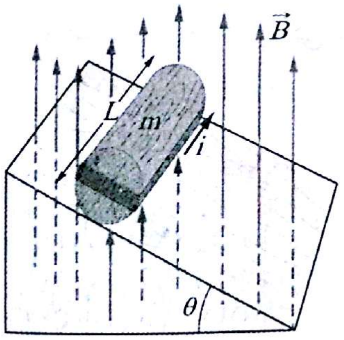
$$\tau_{max}=\left|\vec{\mu}\times\vec{B}\right|_{max}=\mu B=i\pi r^{۲}B=\frac{qv}{۲\pi r}\pi r^{۲}B$$

$$\tau_{max}=\frac{۱}{۲}qvrB$$

$$=\frac{۱}{۲}(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۲/۱۹\times۱۰^{۶})(۵/۲۹\times۱۰^{-۱۱})(۷/۱\times۱۰^{-۳})$$

$$=۶/۵۸\times۱۰^{-۲۶}\ N\cdot m$$

۵۳●●- شکل ۲۴-۵۰ یک استوانهٔ چوبی به جرم $m=۰/۲۵۰\,kg$ و طول $L=۰/۱۰۰\,m$ را نشان می‌دهد که $N=۱۰/۰$ دور سیم در امتداد طول به دور آن پیچیده شده است، به طوری که صفحهٔ پیچهٔ سیم محور استوانه را شامل می‌شود. این استوانه روی سطح شیبداری با زاویهٔ θ نسبت به راستای افقی، با صفحهٔ پیچه موازی با سطح شیبدار رها می‌شود. اگر بزرگی میدان مغناطیسی یکنواخت $۰/۵۰۰T$ باشد، کمترین جریان در پیچه باید چقدر باشد تا مانع از غلتیدن استوانه به طرف پایین شود؟



شکل ۲۴-۵۰ مسئلهٔ ۵۳

حل: از مکانیک و مبحث غلتش می‌دانیم که برای غلتش وجود اصطکاک ایستایی لازم است که در اینجا نیروی اصطکاک گشتاور نیروی $\vec{r}\times\vec{f}_s$ را ایجاد می‌کند. از طرف دیگر یک تاب حامل جریان داریم که حول محور در یک میدان مغناطیسی یکنواخت می‌چرخد و گشتاور نیروی $\vec{\mu}\times\vec{B}$ را داریم که این دو گشتاور نیرو باید یکدیگر را خنثی کنند، یعنی:

Scanned by CamScanner

$$\vec{\mu}\times\vec{B}=\vec{r}\times\vec{f}_s \Rightarrow Ni\vec{A}\times\vec{B}=\vec{r}\times\vec{f}_s$$

و از

$$Ni(2rL)B\sin\theta = rf_s = r(mg\sin\theta)$$

$$\Rightarrow i=\frac{mg}{2NLB}=\frac{(0/25)(9/8)}{2(10)(0/1)(0/5)}=2/45\,\text{A}$$

بخش ۲۴-۱۰ گشتاور دو قطبی مغناطیسی

●۵۴- یک حلقهٔ سیمی دایره‌ای به شعاع ۱۵/۰cm حامل جریان ۲/۶۰A است. این حلقه طوری قرار گرفته است که بردار عمود بر صفحهٔ آن با میدان مغناطیسی یکنواخت با بزرگی ۱۲/۰T زاویهٔ °۴۱/۰ می‌سازد. (الف) بزرگی گشتاور دو قطبی مغناطیسی حلقه را محاسبه کنید. (ب) بزرگی گشتاور نیروی وارد بر حلقه چقدر است؟

حل:

الف) $\mu=iA=i\pi r^2=(2/6)(3/14)(0/15)^2=0/184\,\text{A}\cdot\text{m}^2$

ب) $\tau=\mu B\sin\theta=(0/184)(12)\,\text{lim}\,41^\circ=1/45\,\text{N}\cdot\text{m}$

●۵۵- شعاع یک پیچهٔ دایره‌ای با ۱۶۰ دور برابر با ۱/۹۰cm است. (الف) جریانی را که باعث ایجاد گشتاور دو قطبی مغناطیسی با بزرگی ۲/۳۰A.m² می‌شود محاسبه کنید. (ب) بیشینهٔ بزرگی گشتاوری را که به پیچهٔ حامل این جریان در میدان مغناطیسی یکنواخت ۳۵/۰mT وارد می‌شود پیدا کنید.
SSM

حل:

الف) $\mu=NiA=Ni\pi r^2$

$$2/3=(160)i(3/14)(0/09)^2 \Rightarrow i=12/7\text{A}$$

ب) $\tau=\mu B=(2/3)(35\times10^{-3})=8/05\times10^{-2}\,\text{N}\cdot\text{m}$

●۵۶- بزرگی گشتاور دوقطبی مغناطیسی زمین ۸/۰۰×۱۰²² J/T است. فرض کنید که این گشتاور بر اثر بارهایی که در قسمت بیرونی هستهٔ مذاب زمین حرکت می‌کنند ایجاد می‌شود. اگر شعاع مسیر دایره‌ای این بارها ۳۵۰۰km باشد، جریانی را که ایجاد می‌کنند محاسبه کنید.

حل: $\mu=iA=i\pi r^2 \Rightarrow 8\times10^{22}=i(3/14)(3500\times10^3)$

$$\Rightarrow i=2/08\times10^9\,\text{A}$$

●۵۷- ضلعهای یک حلقهٔ حامل جریان ۵/۰A به شکل مثلث قائم الزاویه برابر ۳۰، ۴۰ و ۵۰ سانتی‌متر است. این حلقه در میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی ۸۰mT واقع است که جهت آن با جریان در ضلع ۵۰ سانتی‌متر حلقه موازی است. بزرگی (الف) گشتاور دو قطبی مغناطیسی حلقه و (ب) گشتاور نیروی وارد بر حلقه را پیدا کنید.

حل: (الف) $A=\frac{1}{2}(0/3)(0/4)=0/06\,\text{m}^2$

$$\mu=iA=(5)(0/06)=0/3\,\text{A}\cdot\text{m}^2$$

ب) $\tau=\mu B\sin\theta=(0/3)(80\times10^{-3})\sin90^\circ=0/024\,\text{N}\cdot\text{m}$

●۵۸- یک دو قطبی مغناطیسی با گشتاور دو قطبی با بزرگی ۰/۰۲J/T در میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی ۵۲mT از حالت سکون رها می‌شود. از چرخش دو قطبی به واسطهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر آن نمی‌توان جلوگیری کرد. وقتی که این دو قطبی به اندازه‌ای که گشتاور دو قطبی آن در جهت میدان مغناطیسی است می‌چرخد، انرژی جنبشی آن برابر ۰/۸۰mJ است. (الف) زاویهٔ اولیهٔ میان گشتاور دو قطبی و میدان مغناطیسی چقدر است؟ (ب) وقتی دو قطبی (به طور لحظه‌ای) بعداً به سکون می‌رسد این زاویه چقدر است؟

حل: از پایستگی انرژی داریم

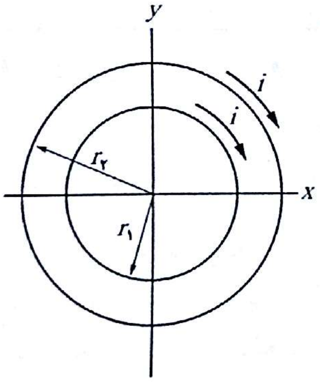
$$k_i+U_i=k_f+U_f$$

$$0-\mu B\cos\theta=0/8\times10^{-3}-\mu B\cos90^\circ$$

$$-(0/02)(0/052)\cos\theta=0/8\times10^{-3}-(0/02)(0/052)$$

$$\cos\theta=0/231 \Rightarrow \theta=76/6^\circ$$

●۵۹- دو حلقه سیم دایره‌ای شکل هم مرکز به شعاعهای $r_1=20/0$cm و $r_2=30/0$cm واقع در صفحهٔ xy، هر یک حامل جریان ساعتگرد ۷/۰۰A هستند (شکل ۲۴-۵۱). (الف) بزرگی گشتاور دو قطبی مغناطیسی خالص را پیدا کنید. (ب) اگر در حلقهٔ داخلی جریان معکوس شود محاسبه را تکرار کنید.
SSM



شکل ۲۴-۵۱ مسئله ۵۹

حل: (الف) جریانها هم جهت‌اند، گشتاورهای دو قطبی مغناطیسی با هم جمع می‌شوند.

$$\mu=\mu_1+\mu_2=iA_1+iA_2=i\pi(r_1^2+r_2^2)$$

$$=(7)(3/14)[(0/2)^2+(0/3)^2]=2/86\,\text{A}\cdot\text{m}^2$$

و جهت به سوی داخل صفحه است

ب) در این حالت داریم:

$$\mu=\mu_2-\mu_1=i\pi(r_2^2-r_1^2)$$

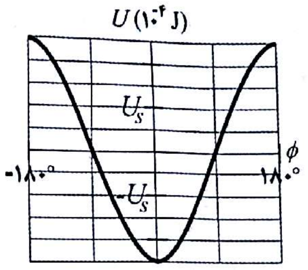
$$\mu=(7)(3/14)[(0/3)^2-(0/2)^2]=1/1\,\text{A}\cdot\text{m}$$

و جهت در کل باز هم به سوی داخل صفحه است.

Scanned by CamScanner

●●۶۰- شکل ۲۴-۵۲ انرژی پتانسیل U یک دو قطبی مغناطیسی واقع در میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}$ را بر حسب زاویهٔ ϕ میان جهتهای $\vec{B}$ و گشتاور دو قطبی نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $U_s = 2.0\times10^{-4}\ \text{J}$ مشخص شده است. این دو قطبی می‌تواند برای تغییر ϕ، حول محوری با اصطکاک ناچیز بچرخد. چرخش پاد ساعتگرد از $\phi=0$ مقدارهای مثبت ϕ و چرخش ساعتگرد مقدارهای منفی به دست می‌دهد. دو قطبی در زاویهٔ $\phi=0$ با انرژی جنبشی چرخشی $6.7\times10^{-4}\ \text{J}$ در جهت چرخش پاد ساعتگرد رها می‌شود. دو قطبی تا چه مقدار بیشینهٔ ϕ خواهد چرخید؟ (به بیان بخش ۸-۶، نقطهٔ برگشت در چاه پتانسیل شکل ۲۴-۵۲ در چه مقدار ϕ است؟)

GO



شکل ۲۴-۵۲ مسئلهٔ ۶۰

حل: داریم $U=-\vec{\mu}\cdot\vec{B}=-\mu B\cos\phi$. با توجه به نمودار انرژی مکانیکی در $\phi=0$ برابر است با

$$K+U=K_0-\mu B=6.7\times10^{-4}-5\times10^{-4}=1.7\times10^{-4}\ \text{J}$$

در نقطه برگشت $K=0$ است لذا در نقطه برگشت $U=1.7\times10^{-4}\ \text{J}$ است و از آنجا می‌توان ϕ را بدست آورد.

$$U=-\mu B\cos\phi$$

$$1.7\times10^{-4}=-(5\times10^{-4})\cos\phi \Rightarrow \phi=99.9^\circ$$

●●۶۱- یک حلقه سیم دایره‌ای شکل به شعاع ۸/۰cm حامل جریان ۰/۲۰A است. بردار یکهٔ موازی با گشتاور دو قطبی $\vec{\mu}$ با $0.60\hat{i}-0.80\hat{j}$ داده شده است. اگر حلقه در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}=(0.25\text{T})\hat{i}+(0.30\text{T})\hat{k}$ قرار گیرد، (الف) گشتاور نیروی وارد بر حلقه (برحسب بردار یکه) و (ب) انرژی پتانسیل مغناطیسی حلقه را پیدا کنید.

حل: (الف) ابتدا $\vec{\mu}$ را بدست می‌آوریم

$$\mu=iA=i\pi r^2=(0.2)(3.14)(0.08)^2=4.02\times10^{-4}\ \text{A}\cdot\text{m}^2$$

$$\vec{\mu}=\mu(0.6\hat{i}-0.8\hat{j})=4.02\times10^{-4}\,(0.6\hat{i}-0.8\hat{j})$$

در نتیجه داریم:

$$\vec{\tau}=\vec{\mu}\times\vec{B}=(4.02\times10^{-4})\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0.6 & -0.8 & 0\\ 0.25 & 0 & 0.3\end{vmatrix}$$

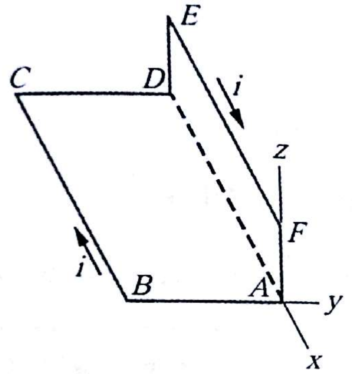
$$=(-9.7\times10^{-4}\,\hat{i}-7.2\times10^{-4}\,\hat{j}+8.0\times10^{-4}\,\hat{k})\text{N}\cdot\text{m}$$

ب)

$$U=-\vec{\mu}\cdot\vec{B}=-(4.02\times10^{-4})(0.6\hat{i}-0.8\hat{j})\cdot(0.25\hat{i}+0.3\hat{k})$$

$$=-6.0\times10^{-4}\ \text{J}$$

●●۶۲- شکل ۲۴-۵۳ حلقهٔ جریان $ABCDEFA$ را نشان می‌دهد که حامل جریان $i=5.00\text{A}$ است. ضلعهای حلقه با محورهای نشان داده شده موازی‌اند و $AB=20.0\ \text{cm}$، $BC=30.0\ \text{cm}$ و $FA=10.0\ \text{cm}$. گشتاور دو قطبی مغناطیسی این حلقه برحسب بردار یکه چیست؟ (*راهنمایی:* دو جریان یکسان و مخالف i را در قسمت AD در نظر بگیرید، سپس مسئله را برای دو حلقهٔ مستطیلی $ABCDA$ و $ADEFA$ حل کنید.)



شکل ۲۴-۵۳ مسئلهٔ ۶۲

حل: با توجه به راهنمایی مسئله می‌توان مدار را شامل دو حلقه در نظر گرفت چون از AD دو جریان می‌گذرد که یکدیگر را خنثی می‌کنند. دو حلقه $ABCDA$ و $ADEFA$ را در نظر می‌گیریم که بنا بر قاعده پیچه دست گشتاور دو قطبی آنها به ترتیب در جهت $-\hat{k}$ و $+\hat{j}$ است. در نتیجه می‌توان نوشت

$$\vec{\mu}=\vec{\mu}_1+\vec{\mu}_2=(5)(0.2\times0.3)(-\hat{k})+(0.5)(0.1\times0.3)(\hat{j})$$

$$=(0.15\hat{j}-0.30\hat{k})\text{A}\cdot\text{m}^2$$

و بزرگی آن برابر است با:

$$\mu=\sqrt{(0.15)^2+(-0.30)^2}=0.335\ \text{A}\cdot\text{m}^2$$

●●۶۳- سیمی به طول ۲۵/۰ cm که حامل جریان ۴/۵۱mA است باید به شکل یک پیچهٔ دایره‌ای شکل درآمده و در میدان مغناطیسی یکنواخت B با بزرگی ۵/۷۱mT قرار داده شود. اگر گشتاور نیروی وارد بر پیچه از میدان بیشینه شود، (الف) زاویهٔ میان $\vec{B}$ و گشتاور دو قطبی مغناطیسی پیچه و (ب) تعداد دورهای پیچه چقدر است؟ (پ) بزرگی این بیشینهٔ گشتاور نیرو چقدر است؟ **SSM ILW**

حل: هرگاه از سیمی به طول L، N دور حلقه درست کنیم، شعاع هر حلقه برابر است با:

$$L=N2\pi R\Rightarrow R=\frac{L}{2\pi N}$$

Scanned by CamScanner

و مساحت هر حلقه نیز برابر است با:

$$A=\pi R^۲=\frac{L^۲}{۴\pi N^۲}$$

الف) شرط بیشینه بودن گشتاور نیرو این است که زاویه بین $\vec{B}$ و $\vec{\mu}$ ، ۹۰° باشد.

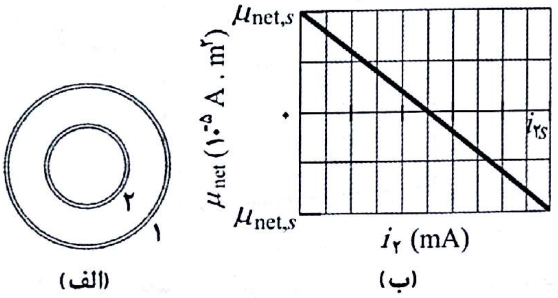
ب) $$\mu=NiAB=\frac{iL^۲B}{۴\pi N}$$

وقتی $N=۱$ باشد μ بیشینه است.

پ) $$\mu=\frac{iL^۲B}{۴\pi}=\frac{(۴/۵\times۱۰^{-۳})(۰/۲۵)^۲(۵/۷۱\times۱۰^{-۳})}{۴(۳/۱۴)}$$

$$=۱/۲۸\times۱۰^{-۷}\ N\cdot m$$

۶۴●●- در شکل ۲۴-۵۴ الف، دو پیچهٔ هم مرکز که در یک صفحه واقع‌اند حامل جریانهایی در جهت مخالف یکدیگرند. جریان در پیچهٔ بزرگتر ۱ ثابت است. جریان $i_۲$ در پیچهٔ ۲ می‌تواند تغییر کند. شکل ۲۴-۵۴ ب گشتاور مغناطیسی خالص دو پیچه را بر حسب تابعی از $i_۲$ به دست می‌دهد. مقیاس محور عمودی با $\mu_{net,s}=۲/۰\times۱۰^{-۵}\ A.m^۲$ ، و مقیاس محور افقی با $i_{۲s}=۱۰/۰mA$ مشخص شده‌اند. اگر جریان در پیچهٔ ۲ معکوس شود، بزرگی گشتاور مغناطیسی دو پیچه وقتی $i_۲=۷/۰\ mA$ باشد چقدر است؟



شکل ۲۴-۵۴ مسئله ۶۴

حل: با توجه به نمودار به ازای $i_۲=۵mA$ ، $\mu_t=۰$ در نتیجه

$$|\mu_۱|=|\mu_۲|\Rightarrow i_۱N_۱A_۱=i_۲N_۲A_۲$$

$$\Rightarrow i_۱N_۱A_۱=(۵\times۱۰^{-۳})N_۲A_۲$$

به ازای $t_۲=۷\times۱۰^{-۳}\ A$ ، $\mu_t=-۰/۸\times۱۰^{-۵}\ A\cdot m^۲$ در نتیجه

$$-۰/۸\times۱۰^{-۵}=i_۱N_۱A_۱-۷\times۱۰^{-۳}\ N_۲A_۲$$

$$=(۵\times۱۰^{-۳})N_۲A_۲-۷\times۱۰^{-۳}\ N_۲A_۲$$

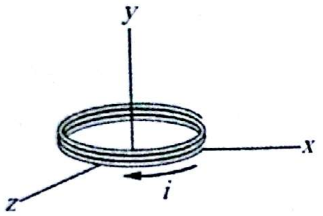
$$\Rightarrow N_۲A_۲=۴\times۱۰^{-۳}$$

$$\mu_۲=i_۲N_۲A_۲=(۵\times۱۰^{-۳})(۴\times۱۰^{-۳})=۲/۸\times۱۰^{-۵}\ A\cdot m^۲$$

مجدداً با توجه به نمودار مشاهده می‌کنیم که به ازای $i_۲=۰$ ، $\mu_۲=۰$ و در نتیجه $\mu_۱=۲/۰\times۱۰^{-۵}\ A\cdot m^۲$ است لذا خواهیم داشت:

$$\mu=\mu_۱+\mu_۲=۲/۰\times۱۰^{-۵}+۲/۸\times۱۰^{-۵}=۴/۵\times۱۰^{-۵}\ A\cdot m^۲$$

۶۵●●- پیچهٔ شکل ۲۴-۵۵ حامل جریان $i=۲/۰۰A$ است و در جهت نشان داده شده موازی با صفحهٔ xy دارای ۳/۰۰ دور و مساحت $۴/۰۰\times۱۰^{-۳}\ m^۲$ است و در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}=(۲/۰۰\hat{i}-۳/۰۰\hat{j}-۴/۰\hat{k})mT$ قرار دارد. (الف) انرژی پتانسیل مغناطیسی پیچه–میدان مغناطیسی و (ب) گشتاور نیروی مغناطیسی وارد بر پیچه (برحسب بردار یکه) را پیدا کنید.



شکل ۲۴-۵۵ مسئلهٔ ۶۵

حل: (الف) ابتدا $\vec{\mu}$ را حساب می‌کنیم

$$\vec{\mu}=Ni\,A(-\hat{j})=-(۳)(۲)(۴\times۱۰^{-۳})\hat{j}=-۰/۰۲۴\hat{j}\ A\cdot m^۲$$

حال از رابطه زیر انرژی پتانسیل مغناطیسی به دست می‌آید:

$$U=-\vec{\mu}\cdot\vec{B}=-(-۰/۰۲۴\hat{j})\cdot(۲\times۱۰^{-۳}\ \hat{i}-۳\times۱۰^{-۳}\ \hat{j}-۴\times۱۰^{-۳}\ \hat{k})$$

$$=-۷/۲\times۱۰^{-۵}\ J$$

ب)

$$\vec{\tau}=\vec{\mu}\times\vec{B}=(-۰/۰۲۴\hat{j})\times(۲\times۱۰^{-۳}\ \hat{i}-۳\times۱۰^{-۳}\ \hat{j}+۴\times۱۰^{-۳}\ \hat{k})$$

$$=(۹/۶\times۱۰^{-۵}+۴/۸\times۱۰^{-۵}\ \hat{k})\ N\cdot m$$

مسئله‌های اضافی

۶۶- سیمی که در امتداد محور y از $y=۰$ تا $y=۰/۲۵۰m$ قرار دارد حامل جریان ۲/۰۰mA در جهت منفی محور است. این سیم به طور کامل در میدان مغناطیسی غیر یکنواختی قرار دارد که با $\vec{B}=(۰/۳۰۰T/m)y\hat{i}+(۰/۴۰۰T/m)y\hat{j}$ داده شده است. نیروی مغناطیسی وارد بر سیم را برحسب بردار یکه را پیدا کنید.

حل:

$$d\vec{F}=id\vec{l}\times\vec{B}$$

$$d\vec{l}=dy(-\hat{j})\qquad\qquad \vec{B}=۰/۳y\hat{i}+۰/۴y\hat{j}$$

$$d\vec{F}=idy(-\hat{j})\times(۰/۳y\hat{i}+۰/۴y\hat{j})=۶\times۱۰^{-۴}\ ydy\ \hat{k}$$

$$F=\hat{k}(۶\times۱۰^{-۴})\int_۰^{۰/۲۵}ydy=۱/۸۷\times۱۰^{-۵}\ \hat{k}\quad N$$

۶۷- فیزیکدانی به نام گوداشمیت[۱] روشی برای اندازه‌گیری دقیق جرم یونهای سنگین با سنجش دورهٔ چرخش آنها در یک میدان مغناطیسی معلوم ابداع کرده است. یون یک بار یونیدهٔ ید در مدت زمان ۱/۲۹ms در میدان مغناطیسی ۴۵/۰ mT به اندازهٔ ۷/۰۰ دور می‌چرخد. جرم آن را برحسب یکای جرم اتمی حساب کنید.

Scanned by CamScanner

$$T = \frac{۱/۲۹\times ۱۰^{-۳}}{۷} = ۱/۸۴\times ۱۰^{-۴}\ \text{s}$$

حل:

$$m\frac{v^۲}{r} = qvB \Rightarrow mw = qB \Rightarrow m\frac{۲\pi}{T} = qB$$

$$m = \frac{TqB}{۲\pi} = \frac{(۱/۸۴\times ۱۰^{-۴})(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})(۴۵\times ۱۰^{-۳})}{۲(۳/۱۴)}$$

$$= ۲/۱۱\times ۱۰^{-۲۵}\ \text{kg} = \frac{۲/۱۱\times ۱۰^{-۲۵}}{۱/۶۶\times ۱۰^{-۲۷}} = ۱۲۷u$$

۶۸- الکترونی در لامپ تصویر یک تلویزیون قدیمی در میدان مغناطیسی باشدت ۸۳/۰ mT با سرعت $۷/۲۰\times ۱۰^۶$ m/s حرکت می‌کند. (الف) بیشینه و (ب) کمینهٔ بزرگی نیروی وارد بر الکترون از طرف میدان چقدر است؟ (پ) در نقطه‌ای شتاب الکترون $۴/۹۰\times ۱۰^{۱۴}$ $\text{m/s}^۲$ است. زاویهٔ میان سرعت الکترون و میدان مغناطیسی چقدر است؟

حل: (الف) داریم $F = qvB\sin\theta$ و بیشینه نیرو وقتی حاصل می‌شود که $\sin\theta = ۱$ باشد

$$F_{\max} = qvB = (۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})(۷/۲\times ۱۰^{۶})(۸۳\times ۱۰^{-۱۹})$$

$$= ۹/۵۶\times ۱۰^{-۱۴}\ \text{N}$$

ب) کمینه نیرو وقتی حاصل می‌شود که حرکت در راستای میدان باشد یعنی $\sin\theta = ۰$ و در نتیجه $F_{\min} = ۰$ است.

پ) $F = ma = (۹/۱۱\times ۱۰^{-۳۱})(۴/۹\times ۱۰^{۱۴}) = ۴/۴۶\times ۱۰^{-۱۶}\ \text{N}$

$$F = qvB\sin\theta \Rightarrow ۴/۴۶\times ۱۰^{-۱۶} = ۹/۵۶\times ۱۰^{-۱۴}\sin\theta$$

$$\Rightarrow \theta = ۰/۲۶۷^\circ$$

۶۹- یک ساعت دیواری دایره‌ای ساکن دارای صفحه‌ای به شعاع ۱۵cm است. شش دور سیم روی پیرامون آن پیچیده شده است؛ این سیم حامل جریان ۲/۰A در جهت ساعتگرد است. ساعت در جایی قرار دارد که میدان مغناطیسی خارجی یکنواختی با بزرگی ۷۰mT وجود دارد (اما ساعت هنوز دقیق کار می‌کند). عقربهٔ ساعت شمار در ساعت ۱/۰۰ بعد از ظهر دقیقاً در جهت میدان مغناطیسی خارجی قرار دارد. (الف) عقربهٔ دقیقه شمار پس از چند دقیقه در جهت گشتاور نیروی وارد بر سیم‌پیچ بر اثر میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد؟ (ب) بزرگی گشتاور نیرو را پیدا کنید.

حل: (الف) با توجه به رابطه $\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}$، چون جریان ساعتگرد است لذا روی $\vec{\mu}$ به سمت داخل یعنی به سمت دیوار است.

چون جهت میدان مغناطیسی به سوی ساعت ۱ است و $\vec{\tau}$ طبق قاعده ضرب برداری باید بر آن عمود باشد لذا $\vec{\tau}$ باید به سوی ساعت ۴ باشد و در نتیجه بازهٔ زمانی ۲۰ دقیقه خواهد بود.

ب) $\tau = \mu B\sin ۹۰^\circ = NiAB = Ni\pi r^۲ B$

که با قرار دادن مقادیر داده شد داریم $\tau = ۵/۹۴\times ۱۰^{-۲}\ N\cdot m$.

۷۰- در آزمایش اثر هال، جریان ۳/۰A از رسانایی به پهنای ۱/۰cm و طول ۴/۰cm و ضخامت ۱۰μm عبور می‌کند و وقتی میدان مغناطیسی ۱/۵T به طور عمود از ضخامت رسانا می‌گذرد یک اختلاف پتانسیل عرضی هال (در پهنا) برابر با ۱۰μV ایجاد می‌کند. از این داده‌ها، (الف) سرعت رانشی حاملهای بار و (ب) چگالی عددی حاملهای بار را پیدا کنید (پ) روی نمودار قطبیت اختلاف پتانسیل هال را با جهتهای جریان و میدان مغناطیسی فرض شده و نیز با فرض اینکه حاملهای بار الکترون هستند نشان دهید.

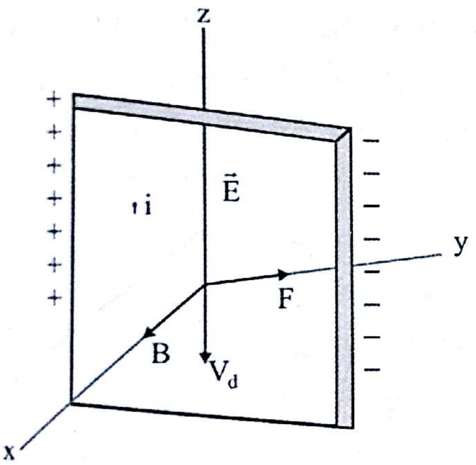
حل:

الف) $v_d = \frac{E_H}{B} = \frac{V_H}{Bd} = \frac{۱۰\times ۱۰^{-۶}}{(۱/۵)(۱\times ۱۰^{-۲})} = ۶/۷\times ۱۰^{-۴}\ \text{m/s}$

ب) $J = nev_d \Rightarrow \frac{i}{A} = nev_d \Rightarrow n = \frac{i}{Aev_d} = ۳$

$$n = \frac{۳}{(۱\times ۱۰^{-۷})(۱/۶۱۰^{-۱۹})(۶/۷\times ۱۰^{-۴})} = ۲/۸\times ۱۰^{۲۹}\ \text{m}^۳$$

پ)



۷۱- اتم ۱ به جرم ۳۵u و اتم ۲ به جرم ۳۷u هر دو با بار +e یک بار یونیده‌اند. پس از ورود آنها به یک طیف‌سنج جرم (شکل ۲۴-۱۴) و شتاب گرفتن آنها با اختلاف پتانسیل V = ۷/۳kV از حالت سکون، هر یون در مسیری دایره‌ای در میدان مغناطیسی یکنواخت $B = ۰/۵۰$ T حرکت می‌کند. فاصله Δx میان نقطه‌هایی که یونها با آشکارساز برخورد می‌کنند چقدر است؟

حل: $K = U \Rightarrow \frac{۱}{۲}mv^۲ = eV \Rightarrow v = \sqrt{\frac{۲eV}{m}}$

$$m\frac{v^۲}{r} = qvB \Rightarrow r = \sqrt{\frac{۲mV}{eB^۲}}$$

$$r_۱ = \sqrt{\frac{۲(۳۵\times ۱/۶۶\times ۱۰^{-۲۷})(۷/۳\times ۱۰^۳)}{(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})(۰/۵)^۲}} = ۱/۴۵۶\times ۱۰^{-۲}\ \text{m}$$

$$r_۲ = \sqrt{\frac{۲(۳۷\times ۱/۶۶\times ۱۰^{-۲۷})(۷/۳\times ۱۰^۳)}{(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})(۰/۵)^۲}} = ۱/۴۹۷\times ۱۰^{-۲}\ \text{m}$$

$$\Delta x = ۲(r_۲ - r_۱) = ۸/۲\times ۱۰^{-۴}\ \text{m}$$

Scanned by CamScanner

۷۲- الکترونی که با انرژی جنبشی ۲/۵ keV در امتداد جهت مثبت محور x حرکت می‌کند وارد ناحیه‌ای می‌شود که در آن میدان الکتریکی یکنواختی با بزرگی ۱۰ kV/m در جهت منفی محور y برقرار است. یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ برای حفظ حرکت الکترون در امتداد محور x برقرار و جهت $\vec{B}$ طوری انتخاب می‌شود که بزرگی مورد نیاز $\vec{B}$ را کمینه کند. برحسب بردار یکه $\vec{B}$ چگونه است؟

حل:
$$K=\frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow ۴\times۱۰^{-۱۶}=\left(\frac{۱}{۲}\right)(۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱})v^۲$$

$$۴\times۱۰^{-۱۶}=\left(\frac{۱}{۲}\right)(۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱})v^۲ \Rightarrow v=۲/۹۶\times۱۰^۷\ \text{m/s}$$

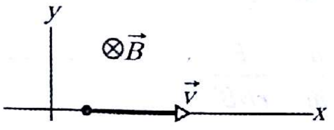
در اینجا باید نیروهای الکتریکی و مغناطیسی باید برابر هم و در جهت مخالف هم باشند

$$qE=qvB\sin۹۰^\circ \Rightarrow B=\frac{E}{v}$$

$$B=\frac{۱۰\times۱۰^۳}{۲/۹۶\times۱۰^۷}=۳/۳۷\times۱۰^{-۴}\ T$$

و جهت آن با توجه به جهت $\vec{v}$ و $\vec{E}$ باید به سوی $-\hat{k}$ باشد.

۷۳- در شکل ۲۴-۵۶، الکترونی با تندی $v=۱۰۰$ m/s در امتداد محور x در میدانهای الکتریکی و مغناطیسی یکنواخت حرکت می‌کند. جهت میدان مغناطیسی $\vec{B}$ به طرف داخل صفحه و بزرگی آن ۵/۰۰T است. میدان الکتریکی برحسب بردار یکه را پیدا کنید.



شکل ۲۴-۵۶ مسئلهٔ ۷۳

حل: چون میدانها یکنواخت و الکترون بر روی خط مستقیم حرکت می‌کند می‌توان نتیجه گرفت که تندی آن ثابت است یا در واقع برآیند نیروهای وارد بر آن صفر است

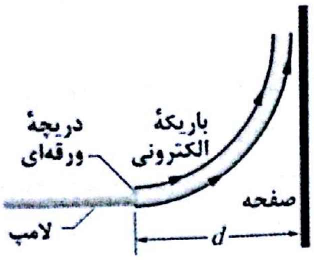
$$\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}=۰ \Rightarrow \vec{E}=-\vec{v}\times\vec{B}$$

$$\vec{E}=-(۱۰۰\hat{i})\times(-۵\hat{k})=-۵۰۰\hat{j}\ \text{V/m}$$

۷۴- باریکه‌ای از الکترونها با انرژی جنبشی K از یک «دریچهٔ» نازک ورقه‌ای در انتهای یک لولهٔ شتابدهنده خارج می‌شود. یک صفحهٔ فلزی در فاصلهٔ d از این دریچه به طور عمود بر جهت باریکهٔ خروجی قرار دارد. (شکل ۲۴-۵۷). (الف) نشان دهید که اگر میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ را طوری برقرار کنیم که مقدار آن برابر با

$$B=\sqrt{\frac{۲mK}{e^۲d^۲}}$$

باشد، از برخورد باریکه با صفحه می‌توان جلوگیری کرد. در این رابطه m و e جرم و بار الکترون هستند. (ب) $\vec{B}$ باید در چه جهتی باشد؟



شکل ۲۴-۵۷ مسئلهٔ ۷۴

حل: (الف) و (ب)

$$m\frac{v^۲}{r}=evB \Rightarrow r=\frac{mv}{eB}$$

اما می‌توان v را از $K=\frac{۱}{۲}mv^۲$ استخراج و جایگزین کرد که خواهیم داشت:

$$r=\frac{m}{eB}\sqrt{\frac{۲K}{m}}=\sqrt{\frac{۲mK}{e^۲B^۲}}$$

این شعاع باید کمتر از d باشد یعنی $\sqrt{\frac{۲mk}{e^۲B^۲}}\le d$ و در نتیجه باید $B\ge\sqrt{\frac{۲mk}{e^۲d^۲}}$ بوده و جهت آن باید به طرف خارج صفحه باشد.

۷۵- یک پروتون، یک دوترون $(q=+e\ ,\ m=۲/۰\text{u})$ و یک ذرهٔ آلفا $(q=+۲e\ ,\ m=۴/۰\text{u})$ با اختلاف پتانسیل یکسانی شتاب می‌گیرند و سپس وارد ناحیه‌ای از میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ می‌شوند و عمود بر $\vec{B}$ حرکت می‌کنند. نسبت (الف) انرژی جنبشی پروتون K_p به انرژی جنبشی ذرهٔ آلفا K_α و (ب) انرژی جنبشی دوترون K_d به K_α چقدر است؟ اگر شعاع مسیر دایره‌ای پروتون ۱۰cm باشد، شعاع (پ) مسیر دوترون و (ت) مسیر ذرهٔ آلفا چقدر است؟ SSM

حل: (الف) چون $K=qV$ است لذا می‌توان دید که

$$\frac{K_p}{K_\alpha}=\frac{q_p}{q_\alpha}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow K_p=\frac{۱}{۲}K_\alpha=۰/۵K_\alpha$$

ب) با بحث مشابه $K_d=۰/۵K_\alpha$

پ) $m\frac{v^۲}{r}=qvB\Rightarrow r=\frac{mv}{qB}$ یا $r=\frac{\sqrt{۲mK}}{qB}$

لذا می‌توان نوشت:

$$\frac{r_d}{r_p}=\frac{q_p}{q_d}\sqrt{\frac{m_dK_d}{m_pK_p}}\Rightarrow r_d=r_\alpha\sqrt{۲}=۱۰\sqrt{۲}=۱۴\text{cm}$$

ت) با روش مشابه داریم:

$$\frac{r_\alpha}{r_p}=\frac{q_p}{q_\alpha}\sqrt{\frac{m_\alpha K_\alpha}{m_pK_۲}}\Rightarrow r_\alpha=۱۴\text{cm}$$

Scanned by CamScanner

۷۶- پروتونی با بار $+e$ و جرم m با سرعت اولیهٔ $\vec{v} = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$ وارد میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B} = B\hat{i}$ می‌شود. عبارتی را برای سرعت $\vec{v}$ برحسب بردار یکه در هر لحظهٔ t پیدا کنید.

حل: با توجه به یکنواختی میدان، پروتون با سرعت v_{0x} در جهت میدان حرکت می‌کند و در ضمن با تندی ثابت v_{0y} شروع به دوران می‌کند، یعنی این‌که حرکت کلی پروتون مارپیچی است. می‌توان با کمک معادله نیرو رابطهٔ لازم برای سرعت را بدست آورد

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} \Rightarrow m\vec{a} = q\vec{v}\times\vec{B}$$

$$= m\left(\frac{dvx}{dt}\right)\hat{i} + m\left(\frac{dvy}{dt}\right)\hat{j} + m\left(\frac{dvz}{dt}\right)\hat{k}$$

$$= q(v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k})\times(B\hat{i})$$

$$= qB(v_z\hat{j} - v_y\hat{k})$$

با توجه به رابطه $\omega = \frac{eB}{m}$ و برابر قرار دادن مؤلفه‌ها داریم

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \qquad \frac{dv_y}{dt} = \omega v_z \qquad \frac{dv_z}{dt} = -\omega v_y$$

از حل معادلهٔ اول $v_x = v_{0x}$ که بیانگر حرکت در راستای میدان است. برای حل دو معادله دیگر ابتدا از معادله دوم $v_z = \frac{1}{\omega}\frac{dv_y}{dt}$ را در معادله سوم قرار داده و سپس با حل آن داریم

$$\frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}\left(\frac{dv_y}{dt}\right) = -\omega v_y \Rightarrow \frac{d^2 v_y}{dt} + \omega v_y = 0$$

که این معادله حرکت یک نوسانگر ساده است و پاسخ آن $v_y = v_{0y}\cos\omega t$ (یا $v_y = v_{0y}\sin\omega t$) است و با قرار دادن مشتق آن در معادله دوم رابطه لازم برای v_z یعنی $v_z = -v_{0y}\sin wt$ به دست می‌آید. در نتیجه رابطه $\vec{v}$ بر حسب بردارها، چنین است.

$$\vec{v} = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\cos\omega t\,\hat{j} - v_{0y}\sin\omega t\,\hat{k}$$

۷۷- ذره‌ای به جرم $6.0\,g$ با تندی $4.0\,km/s$ در صفحهٔ xy در ناحیه‌ای با میدان مغناطیسی یکنواخت داده شده با $5.0\hat{i}\,mT$ حرکت می‌کند. در یک لحظه، وقتی سرعت ذره در جهت $37°$ نسبت به جهت مثبت محور x به طور پاد ساعتگرد قرار گرفته است، نیروی مغناطیسی وارد بر ذره $0.48\hat{k}N$ است. بار ذره چقدر است؟ SSM

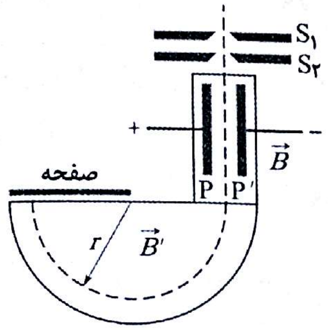
حل:

$$\vec{v} = (4\times10^3)(\cos 37°)\hat{i} + (4\times10^3)(\sin 37°)\hat{j}$$

$$= (4\times10^3)(0.8\hat{i} + 0.6\hat{j})$$

$$0.48\,\hat{k} = q(12)(-\hat{k}) \Rightarrow q = -0.04C$$

۷۸- طیف سنجی که در شکل ۲۴-۵۸ نشان داده شده است، یونهایی را که دارای سرعت یکسانی هستند از هم جدا می‌کنند. یونها پس از عبور از دو شکاف S_1 و S_2 از یک جداکننده سرعت عبور می‌کنند که مرکب از یک میدان الکتریکی است که به وسیلهٔ صفحه‌های باردار P و P' ایجاد می‌شود و یک میدان مغناطیسی $\vec{B}$ که عمود بر میدان الکتریکی و مسیر یون است. یونهایی که بدون انحراف از میدانهای عمود برهم $\vec{E}$ و $\vec{B}$ عبور می‌کنند وارد ناحیه‌ای می‌شوند که میدان مغناطیسی دوم $\vec{B}'$ وجود دارد و وادار می‌شوند که مسیرهایی دایره‌ای را طی کنند. یک صفحهٔ عکاسی ورود آنها را ثبت می‌کند. نشان دهید برای یونها $q/m = E/rBB'$ که در آن r شعاع مدار دایره‌ای است.



شکل ۲۴-۵۸ مسئلهٔ ۷۸

حل: در عبور از میان دو صفحه P و P' داریم:

$$qE = qvB \Rightarrow v = \frac{E}{B}$$

در دوران در میدان B' داریم:

$$m\frac{v^2}{r} = qB'v \Rightarrow mv = qB'r$$

$$m\frac{E}{B} = qB'r \Rightarrow \frac{q}{m} = \frac{E}{rBB'}$$

۷۹- در یک لحظه، $\vec{v} = (-2.00\hat{i} + 4.00\hat{j} - 6.00\hat{k})m/s$ سرعت پروتون در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B} = (2.00\hat{i} - 4.00\hat{j} + 8.00\hat{k})mT$ است. در این لحظه (الف) نیروی مغناطیسی $\vec{F}$ وارد بر پروتون برحسب بردار یکه، (ب) زاویهٔ میان $\vec{v}$ و $\vec{F}$ و (پ) زاویهٔ میان $\vec{v}$ و $\vec{B}$ را پیدا کنید.

حل: (الف) با استفاده از تعریف ضرب برداری خواهیم داشت

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} = (1.6\times10^{-19})\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 4 & -6 \\ 2\times10^{-3} & -4\times10^{-3} & 8\times10^{-3} \end{vmatrix}$$

$$= (1.6\times10^{-22})(8\hat{i} + 4\hat{j})$$

۸۰- (الف) در شکل ۲۴-۸ نشان دهید که نسبت بزرگی میدان الکتریکی هال E به بزرگی E_C میدان الکتریکی مسبب حرکت بار (جریان) در طول نوار عبارت است از:

$$\frac{E}{E_C} = \frac{B}{ne\rho}$$

Scanned by CamScanner

که در آن ρ مقاومت ویژهٔ ماده و n چگالی عددی حاملهای بار است. (ب) مقدار عددی این نسبت را برای مسئلهٔ ۱۳ محاسبه کنید. (به جدول ۲۲-۱ نگاه کنید.)

حل: داریم:

$$E_H=\frac{J}{ne}B \quad , \quad E_c=\rho J$$

در نتیجه چنین خواهیم داشت:

$$\frac{E_H}{E_C}=\frac{\frac{JB}{ne}}{\rho J}=\frac{B}{ne\rho}$$

$$=\frac{0/65}{(8/49\times10^{27})(1/6\times10^{-19})(1/69\times10^{-8})}$$

$$=2/83\times10^{-3}$$

۸۱- در لحظهٔ $t=0$ الکترونی با انرژی جنبشی 12keV از $x=0$ در جهت مثبت محور x که موازی با مؤلفهٔ افقی میدان مغناطیسی $\vec{B}$ زمین است حرکت می‌کند. بزرگی مؤلفهٔ قائم رو به پایین میدان برابر با $55/0\,\mu T$ است. (الف) بزرگی شتاب الکترون ناشی از $\vec{B}$ چقدر است؟ (ب) وقتی که الکترون به نقطهٔ $x=20$cm می‌رسد، فاصلهٔ الکترون از محور x چقدر است؟ SSM

حل: از قانون دوم نیوتون $F=ma$ و از طرفی $F=evB\sin\phi$ که در آن $B_\perp=B\sin\phi$ مؤلفهٔ روبه پایین میدان مغناطیسی زمین در مسئله داده شده است لذا خواهیم داشت: $a=\frac{evB_\perp}{m}$

برای محاسبه شتاب لازم است که ابتدا v بدست آوریم که برای آن داریم

$$v=\sqrt{\frac{2K}{m}}=\sqrt{\frac{2(12\times10^{3})(1/6\times10^{-19})}{(9/11\times10^{-31})}}=6/49\times10^{7}\ m/s$$

$$a=\frac{(1/6\times10^{-19})(6/49\times10^{7})(55\times10^{-6})}{(9/11\times10^{-31})}=6/27\times10^{14}\ m/s^2$$

۸۲- سرعت الکترون وقتی وارد میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}=60\hat{i}\mu T$ می‌شود برابر $\vec{v}=(32\hat{i}+40\hat{j})$km/s است. (الف) شعاع مسیر مارپیچی الکترون و (ب) گام مسیر چقدر است؟ (پ) از نظر ناظری که به ناحیهٔ میدان مغناطیسی از نقطهٔ ورود الکترون نگاه می‌کند، آیا حرکت مارپیچی الکترون ساعتگرد است یا پاد ساعتگرد؟

حل: (الف) میدان مغناطیسی B در جهت $\hat{i}$ است و با توجه به جهت بردار $\vec{v}$ مشاهده می‌کنیم $\vec{v}\times\vec{B}=-v_yB_x\hat{k}$ می‌شود پس نیروی مغناطیسی وارد بر الکترون در میدان برابر $(-e)(-v_yB_x\hat{k})$ است که جهت $+\hat{k}$ است. این نیرو موجب حرکت دورانی است و می‌توان نوشت

$$m\frac{v_y^2}{r}=ev_yB_x\Rightarrow r=\frac{mv_y}{eB_x}$$

$$r=\frac{(9/11\times10^{-31})(40\times10^{3})}{(1/6\times10^{-19})(60\times10^{-6})}=0/0038m=3/8\,mm$$

ب)
$$T=\frac{2\pi r}{v_y}=\frac{2\pi(0/0038)}{4\times10^{4}\ m/s}=5/96\times10^{-7}\ s$$

در این مدت زمان الکترون مسافت Δx را که در واقع همان گام مارپیچ است را طی می‌کند که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Delta x=v_xT=(32\times10^{3})(5/96\times10^{-6})=0/019m$$

پ) ساعتگر است.

۸۳- یک پروتون، یک دوترون $(q=+e\ ,\ m=2/0u)$ و یک ذرهٔ آلفا $(q=+2e\ ,\ m=4/0u)$ همگی با انرژی جنبشی یکسان و در ناحیه‌ای با میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ می‌شوند و عمود بر $\vec{B}$ حرکت می‌کنند. نسبت (الف) شعاع r_d مسیر دوترون به شعاع r_p مسیر پروتون و (ب) شعاع r_a مسیر ذرهٔ آلفا به r_p چقدر است؟

حل:

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow v=\sqrt{\frac{2K}{m}}$$

$$qvB=m\frac{v^2}{r}\Rightarrow r=\frac{\sqrt{2Km}}{qB}$$

الف)
$$\frac{r_d}{r_p}=\sqrt{\frac{m_d}{m_p}}\cdot\frac{q_p}{q_d}=\sqrt{\frac{2u}{u}}\cdot\frac{e}{e}=\sqrt{2}$$

ب)
$$\frac{r_\alpha}{r_p}=\sqrt{\frac{m_\alpha}{m_p}}\cdot\frac{q_p}{q_\alpha}=\sqrt{\frac{4u}{u}}\cdot\frac{e}{2e}=1$$

۸۴- ذره‌ای با بار 2/0C در میدان مغناطیسی یکنواختی حرکت می‌کند. در یک لحظه سرعت ذره $(2/0\hat{i}+4/0\hat{j}+6/0\hat{k})$m/s و نیروی مغناطیسی وارد بر ذره $(4/0\hat{i}-20\hat{j}+12\hat{k})$N است. مؤلفه‌های x و y میدان مغناطیسی برابرند. $\vec{B}$ به چه صورت است؟

حل:

$$\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}=2\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 4 & 6\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

$$4\hat{i}-20\hat{j}+12\hat{k}=2[\hat{i}(4B_z-6B_x)-\hat{j}(2B_z-6B_x)+\hat{k}(2B_x-4B_x)]$$

حال از برابر قرار دادن مؤلفه‌های متناظر و حل آنها خواهیم داشت $B_x=B_y=-3T$ و $B_z=-4T$ در نتیجه داریم

$$\vec{B}=-3\hat{i}-3\hat{j}-4\hat{k}$$

۸۵- ذره‌ای با بار $5/0\mu C$ در ناحیه‌ای با میدان مغناطیسی $-20\hat{i}$mT و میدان الکتریکی $300\hat{j}$ V/m حرکت می‌کند. در یک لحظه سرعت ذره $(17\hat{i}-11\hat{j}+7/0\hat{k})$km/s است. در این لحظه نیروی الکترومغناطیسی خالص (مجموع نیروهای الکتریکی و مغناطیسی) وارد بر ذره برحسب بردار یکه چیست؟

Scanned by CamScanner

حل:

$$\vec{F}_e = q\vec{E} = (۵\times۱۰^{-۶})(۳۰۰\hat{j}) = ۱/۵\times۱۰^{-۳}\ \hat{j}\ \mathrm{N}$$

$$\vec{F}_B = q\vec{v}\times\vec{B}$$

$$= (۵\times۱۰^{-۶})[(۱۷۰۰\hat{i} - ۱۱۰۰\hat{j} + ۷۰۰\hat{k})\times(-۲۰\times۱۰^{-۳}\ \hat{i})]$$

$$= (-۷\times۱۰^{-۴}\ \hat{j} - ۱/۱\times۱۰^{-۳}\ \hat{k})\mathrm{N}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_B = ۸\times۱۰^{-۴}\ \hat{j} - ۱۱\times۱۰^{-۴}\ \hat{k}$$

۸۶- سیمی که در امتداد محور x از $x=۰$ تا $x=۱/۰۰\mathrm{m}$ قرار دارد حامل جریان $۳/۰۰\mathrm{A}$ در جهت مثبت x است. این سیم در میدان مغناطیسی غیر یکنواخت $\vec{B} = (۴/۰۰\mathrm{T/m^۲})x^۲\hat{i} - (۰/۶۰۰\ \mathrm{T/m^۲})x^۲\hat{j}$ قرار دارد. نیروی مغناطیسی وارد بر سیم را برحسب بردار یکه پیدا کنید.

حل: یک عنصر طول dx از سیم را در نظر می‌گیریم. نیروی وارد بر آن از رابطه زیر بدست می‌آید.

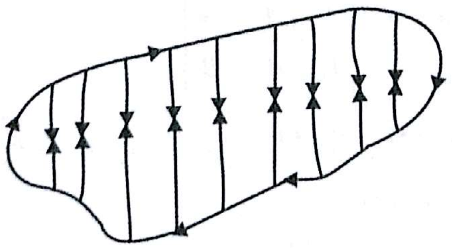
$$d\vec{F} = i\vec{dl}\times\vec{B} = i(dx\,\hat{i})\times(۴x^۲\hat{i} - ۰/۶x^۲\hat{j})$$

$$= -۱/۸x^۲dx\,\hat{k}$$

$$\vec{F} = -\hat{k}(۱/۸)\int_۰^۱ x^۲dx = -۰/۶\hat{k}\ \mathrm{N}$$

۸۷- ثابت کنید که رابطهٔ $\tau = NiAB\sin\theta$ نه تنها در مورد حلقهٔ مستطیلی شکل ۲۴-۲۲ بلکه در مورد هر حلقهٔ بسته با هر شکلی درست است. (*راهنمایی:* تا جایی که به توزیع جریان مربوط است، به جای یک حلقه با شکل دلخواه، مجموعه‌ای از حلقه‌های دراز و نازک پهلوی هم و تقریباً مستطیلی شکل را در نظر بگیرید که تقریباً معادل با حلقه با شکل دلخواه است.)

حل: با توجه بع راهنمایی مسئله هر حلقه را می‌توان مجموعه‌ای از حلقه‌های مستطیلی کوچک در نظر گرفت. از هر حلقه مستطیلی جریان i می‌گذرد که در جریان عبور از اضلاع مشترک جریان صفر است.



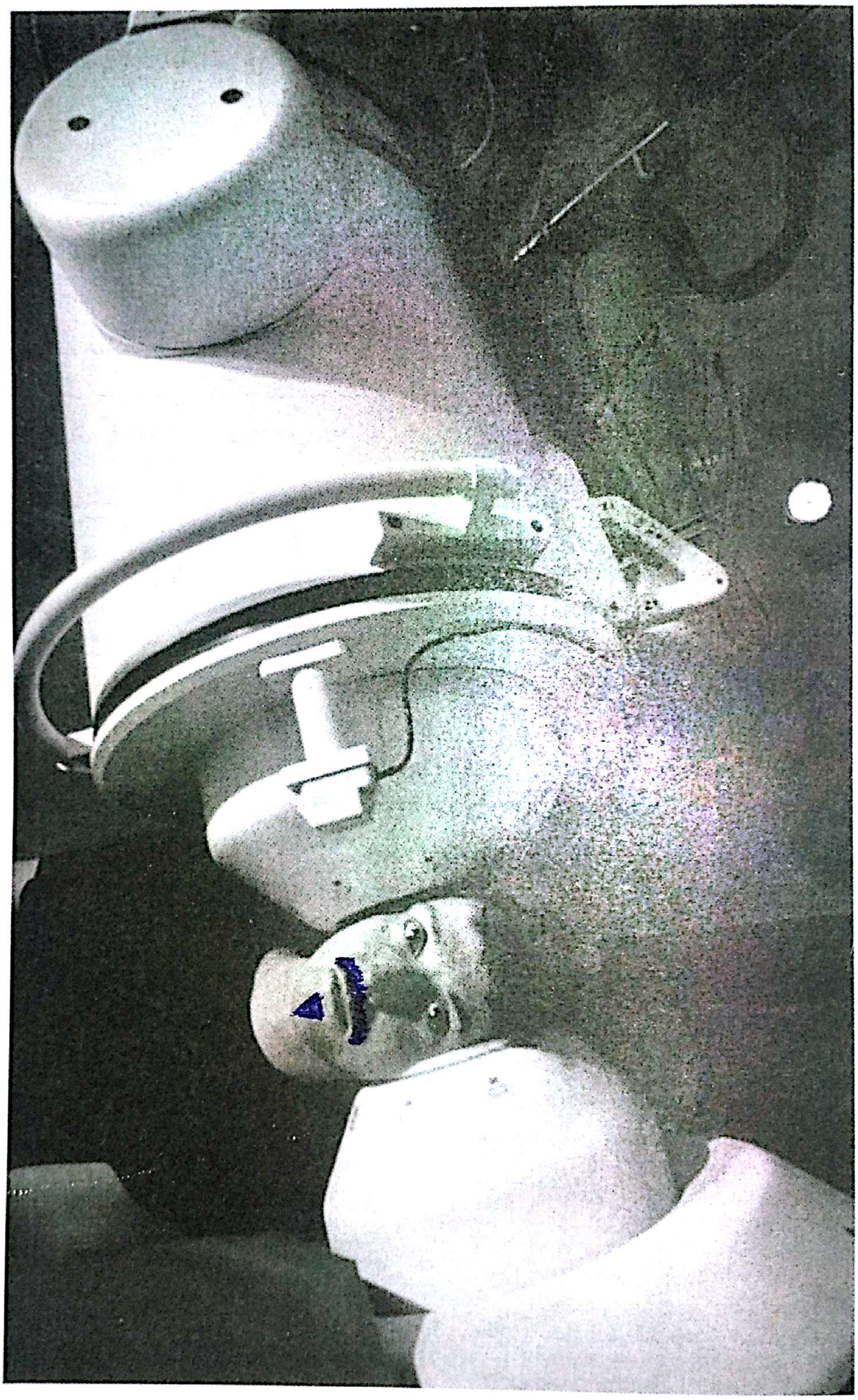
$$d\tau = (NiB\sin\theta)dA$$

این گشتاور نیرو بر سطح عمود است. برای کل حلقه داریم:

$$\tau = \int NiB\sin\theta\,dA = NiB\sin\theta\int dA = NiAB\sin\theta$$

Scanned by CamScanner

۲۵ میدانهای مغناطیسی ناشی از جریانها



Scanned by CamScanner

بخش ۲۵-۲ محاسبهٔ میدان مغناطیسی ناشی از جریان الکتریکی

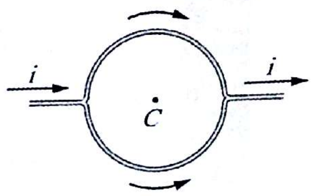
●۱- در نقطهٔ خاصی از کشور فیلیپین میدان مغناطیسی زمین با بزرگی $۳۹\mu T$ افقی و به طرف شمال است. فرض کنید دقیقاً ۸/۰cm بالای یک سیم مستقیم دراز افقی که حامل جریان ثابتی است میدان خالص صفر است. (الف) بزرگی و (ب) جهت جریان چیست؟ SSM

حل: (الف)

$$B=\frac{\mu_\circ i}{۲\pi r}\Rightarrow ۳۹\times۱۰^{-۶}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})i}{(۲\pi)(۰/۰۸)}\Rightarrow i=۱۵/۶A$$

(ب) جهت جریان باید از غرب به شرق باشد تا میدانی در جهت جنوب در نقاط پایین آن ایجاد شود.

●۲- یک رسانای مستقیم که حامل جریان $i=۵/۰A$ است مانند شکل ۲۵-۳۵ به دو کمان نیمدایره‌ای یکسان تقسیم شده است. میدان مغناطیسی در مرکز C حلقهٔ دایره‌ای حاصل چقدر است؟



شکل ۲۵-۳۵ مسئلهٔ ۲

حل: میدان ناشی از هر نیمه در مرکز برابر $B=\frac{\mu_\circ i}{۴r}$ است و چون جهت جریان در آنها در خلاف یکدیگر است اثر هم را خنثی می‌کنند لذا میدان مغناطیسی در مرکز حلقه صفر است.

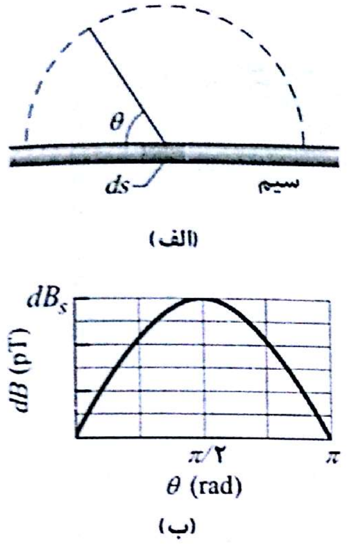
●۳- نقشه برداری در فاصلهٔ ۶/۱m زیر خط فشار قوی که در آن جریان ۱۰۰A برقرار است یک قطب نمای مغناطیسی را به کار می‌برد. (الف) میدان مغناطیسی ناشی از خط فشار قوی در محل قطب‌نما چقدر است؟ (ب) آیا این میدان به طور جدی روی جهتگیری قطب‌نما اثر می‌گذارد؟ مؤلفهٔ افقی میدان مغناطیسی زمین در این محل $۲۰\mu T$ است.

حل: (الف)

$$B=\frac{\mu_\circ i}{۲\pi r}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۱۰۰)}{(۲\pi)(۶/۱)}=۳/۳\times۱۰^{-۶}\ T=۳/۳\mu T$$

(ب) این حدود یک ششم بزرگی میدان مغناطیسی زمین است لذا می‌تواند بر آن اثرگذار باشد.

۴- شکل ۲۵-۳۶ الف عنصری به طول $d_s=۱/۰۰\mu m$ را در یک سیم مستقیم خیلی دراز و حامل جریان نشان می‌دهد. جریان در این عنصر میدان مغناطیسی دیفرانسیلی $d\vec{B}$ را در نقطه‌های فضای اطراف برقرار می‌کند. شکل ۲۵-۳۶ ب بزرگی dB میدان را در نقطه‌هایی به فاصلهٔ ۲/۵cm از این عنصر، برحسب تابعی از زاویهٔ میان سیم و خط مستقیم متصل به آن نقطه نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $dB_s=۶۰/۰pT$ مشخص شده است. بزرگی میدان مغناطیسی برقرار شده توسط کل سیم در فاصلهٔ عمودی ۲/۵cm از سیم چقدر است؟



شکل ۲۵-۳۶ مسئلهٔ ۴

حل: با توجه به نمودار dB بیشینه به ازای $\theta=\frac{\pi}{۲}$ حاصل می‌شود و مقدار آن برابر ۶×۱۰^{-۱۲} T است لذا از رابطه زیر جریان را به دست می‌آوریم.

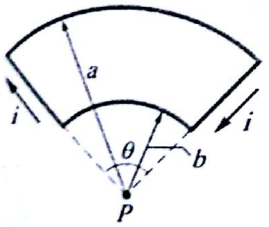
$$dB_{max}=\frac{\mu_\circ i ds\sin ۹۰}{۴\pi R^۲}\Rightarrow i=\frac{(۴\pi R^۲)(dB_{max})}{\mu_\circ ds}$$

که با قرار دادن $ds=۱\times۱۰^{-۶}$ m و $R=۰/۰۲۵$ m جریان به دست می‌آید $i=۰/۳۷۵A$.

حال می‌توان میدان مغناطیسی ایجاد شده توسط کل سیم در نقطه‌ای به فاصله ۲/۵cm را به دست آورد.

$$B=\frac{\mu_\circ i}{۲\pi r}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۰/۳۷۵)}{(۲\pi)(۰/۰۲۵)}=۳\times۱۰^{-۶}\ T=۳\mu T$$

●۵- در شکل ۲۵-۳۷ شعاعهای دو کمان دایره‌ای عبارت‌اند از $a=۱۳/۵cm$ و $b=۱۰/۷cm$. زاویهٔ تحت پوشش دو کمان °۷۴/۰ است و آنها حامل جریان $i=۰/۴۱۱A$ هستند. مرکز مشترک آنها نقطهٔ P است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (به داخل یا خارج) میدان مغناطیسی خالص در نقطهٔ P را پیدا کنید. GO



شکل ۲۵-۳۷ مسئلهٔ ۵

حل: (الف) طبق قانون بیو- ساوار میدان مغناطیسی ناشی از بخش‌های مستقیم در نقطهٔ P برابر صفر است چون زاویه بین $\vec{ds}$ و $\vec{r}$ صفر است. برای بخش‌ها خمیده از قانون بیو- ساوار داریم:

$$dB=\frac{\mu_\circ i}{۴\pi}\frac{ds\sin ۹۰}{r^۲}\Rightarrow B=\frac{\mu_\circ i}{۴\pi r^۲}\int_\circ^\theta r d\theta=\frac{\mu_\circ i\theta}{۴\pi r}$$

Scanned by CamScanner

از قاعده دست راست برای کمان با شعاع a میدان در جهت $-\hat{k}$ (به سمت داخل) و برای کمان با شعاع a در جهت $\hat{k}$ (به سمت خارج) است لذا میدان در نقطه P چنین است.

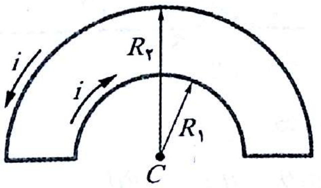
$$\vec{B}_P=\frac{\mu_۰ i\theta}{۴\pi}\left(\frac{۱}{b}-\frac{۱}{a}\right)\hat{k}$$

که با قرار دادن مقادیر عددی خواهیم داشت:

$$\vec{B}_P=۱/۰۲\times۱۰^{-۷}\,\hat{k}\ \mathrm{T}$$

(ب) به سمت خارج صفحه است.

●۶- در شکل ۲۵-۳۸ شعاع دو کمان نیمدایره‌ای عبارت‌اند از $R_۱=۳/۱۵\mathrm{cm}$ و $R_۲=۷/۸۰\mathrm{cm}$. این دو نیمدایره در نقطهٔ C هم مرکزند و در آنها جریان $i=۰/۲۸۱\mathrm{A}$ برقرار است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (به داخل یا خارج صفحه) میدان مغناطیسی خالص در نقطهٔ C را پیدا کنید.



شکل ۲۵-۳۸ مسئلهٔ ۶

حل: (الف) طبق قانون بیو-ساوار میدان حاصل از بخش‌های مستقیم در نقطهٔ C صفر است چون زاویهٔ میان $d\vec{S}$ و $\vec{r}$ صفر است یا امتداد این دو قسمت از نقطه C می‌گذرد. برای بخش‌های خمیده از قانون بیو- ساوار داریم:

$$dB=\frac{\mu_۰ i}{۴\pi}\frac{ds\sin۹۰}{r^۲}\Rightarrow B=\frac{\mu_۰ i}{۴\pi r^۲}\int_۰^{\pi} r\,d\theta$$

$$B=\frac{\mu_۰ i}{۴\pi r}(\pi)=\frac{\mu_۰ i}{۴r}$$

طبق قاعده دست راست برای کمان با شعاع $R_۲$ میدان در جهت $+\hat{k}$ (به سمت خارج صفحه) و میدان حاصل از کمان با شعاع $R_۱$ در جهت $-\hat{k}$ (به سمت داخل صفحه) است لذا داریم

$$\vec{B}_C=\frac{\mu_۰ i}{۴}\left(\frac{۱}{R_۲}-\frac{۱}{R_۱}\right)\hat{k}$$

$$=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۰/۲۸۱)}{۴}\left(\frac{۱}{۰/۰۷۸}-\frac{۱}{۰/۰۳۱۵}\right)\hat{k}$$

$$=-۱/۶۷\times۱۰^{-۶}\,\hat{k}\,\mathrm{T}$$

(ب) به سمت داخل صفحه است.

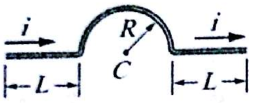
●۷- دو سیم مستقیم دراز به فاصلهٔ ۸/۰cm از یکدیگر به طور موازی قرار دارند. این دو سیم جریانهای مساوی را به گونه‌ای حمل می‌کنند که میدان مغناطیسی در نقطهٔ وسط فاصلهٔ آنها $۳۰۰\mu\mathrm{T}$ است. (الف) آیا جریانها در یک جهت‌اند یا مخالف یکدیگرند؟ (ب) جریان مورد نیاز چقدر است؟ **SSM**

حل: (الف) جهت جریان در سیم‌ها باید در خلاف جهت هم باشد تا میدان آنها در A همسو شده و با هم جمع می‌شوند.

(ب)
$$B=\frac{\mu_۰ i}{۲\pi(d/۲)}+\frac{\mu_۰ i}{۲\pi(d/۲)}$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده داریم $i=۳۰\,\mathrm{A}$.

●۸- در شکل ۲۵-۳۹ سیمی نیمدایره‌ای به شعاع $R=۹/۲۵\mathrm{cm}$ و دو قسمت راست (شعاعی) هر یک به طول $L=۱۳/۱\mathrm{cm}$ نشان داده است. این سیم حامل جریان $i=۳۴/۸\mathrm{mA}$ است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (به داخل یا خارج از صفحه) میدان مغناطیسی خالص را در مرکز نیمدایره به مرکز C پیدا کنید.



شکل ۲۵-۳۹ مسئلهٔ ۸

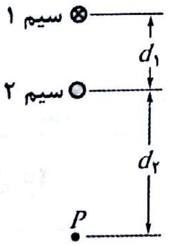
حل: (الف) سیم از سه تکه تشکیل شده است، دو تکه سیم راست و یک تکه سیم خمیده. دو تکه سیم راست در نقطه C میدانی ایجاد نمی‌کنند چون امتداد آنها از این نقطه می‌گذرد. و میدان حاصل از سیم خمیده نیز از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$B=\frac{\mu_۰ i\theta}{۴\pi r}=\frac{\mu_۰ i}{۴\pi R}(\pi)=\frac{\mu_۰ i}{۴R}$$

$$B=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۰/۰۳۴۸)}{۴(۰/۰۹۲۶)}=۱/۱۸\times۱۰^{-۷}\ \mathrm{T}$$

(ب) از قاعدهٔ دست راست و با توجه به جهت جریان میدان به سمت داخل صفحه است.

●۹- در شکل ۲۵-۴۰، دو سیم مستقیم دراز بر صفحهٔ کاغذ عمودند و فاصلهٔ آنها $d_۱=۰/۷۵\mathrm{cm}$ است. سیم ۱ حامل جریان ۶/۵ A به داخل صفحه است. اگر میدان مغناطیسی خالص ناشی از دو جریان در نقطهٔ P واقع در فاصلهٔ $d_۲=۱/۵۰\mathrm{cm}$ از سیم ۲ صفر باشد (الف) بزرگی و (ب) جهت (به طرف داخل یا به طرف خارج صفحه) جریان در سیم ۲ را پیدا کنید.



شکل ۲۵-۴۰ مسئلهٔ ۹

حل: (الف) با توجه به مسئله باید اندازه دو میدان یکسان و در جهت مخالف باشند تا اثر یکدیگر را خنثی کنند، لذا خواهیم داشت

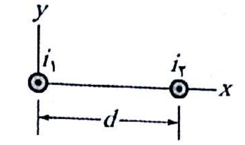
$$B_۱=B_۲\Rightarrow\frac{\mu_۰ i_۱}{۲\pi(d_۱+d_۲)}=\frac{\mu_۰ i_۲}{۲\pi d_۲}$$

$$\frac{i_۱}{d_۱+d_۲}=\frac{i_۲}{d_۲}\Rightarrow\frac{۶/۵}{۰/۷۵+۱/۵}=\frac{i_۲}{۱/۵}\Rightarrow i_۲=۴/۳\mathrm{A}$$

(ب) جهت جریان باید در خلاف جهت جریان $i_۱$ باشد تا اثر میدان سیم ۱ را خنثی کنند.

Scanned by CamScanner

●۱۰- در شکل ۲۵-۴۱، دو سیم مستقیم دراز به فاصلهٔ $d=16.0$ cm از یکدیگر حامل جریانهای $i_1=3.61$ mA و $i_2=3.00i_1$ به طرف خارج صفحه‌اند. (الف) در چه نقطه‌ای روی محور x میدان مغناطیسی خالص ناشی از جریانها صفر است؟ (ب) اگر دو جریان دو برابر شوند، آیا نقطهٔ صفر میدان مغناطیسی به طرف سیم ۱ جابه‌جا می‌شود یا به طرف سیم ۲، یا بدون تغییر می‌ماند؟



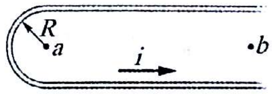
شکل ۲۵-۴۱ مسئلهٔ ۱۰

حل: (الف) چون جهت جریان در سیم‌ها همسو است لذا از قاعده دست راست درمی‌یابیم که در ناحیه بین دو سیم امکان خنثی شدن میدان‌ها وجود دارد. اگر نقطه موردنظر را به فاصله r از سیم حامل جریان i_1 در نظر بگیریم فاصلهٔ آن از سیم حامل جریان i_2 برابر $d-r$ بوده و خواهیم داشت

$$\frac{\mu_0 i}{2\pi r}=\frac{\mu_0(3i)}{2\pi(d-r)}\Rightarrow r=\frac{d}{4}=\frac{16}{4}=4\,\text{cm}$$

(ب) اگر جریان‌ها دو برابر شوند این نقطه تغییر نمی‌کند.

۱۱- در شکل ۲۵-۴۲، جریان $i=10$ A در رسانای دراز سنجاق موی سر که با خم کردن آن به صورت نیمدایره‌ای به شعاع $R=5.0$ mm درآمده‌برقرار است. نقطهٔ b در میان بخشهای مستقیم قرار دارد و از نیمدایره چنان دور است که هر بخش مستقیم را می‌توان تقریباً یک سیم به طول بینهایت در نظر گرفت. (الف) بزرگی و (ب) جهت (به طرف داخل یا به طرف خارج صفحه) $\vec B$ در a و (پ) بزرگی و (ت) جهت $\vec B$ در b را پیدا کنید.



شکل ۲۵-۴۲ مسئلهٔ ۱۱

حل: (الف) و (ب) میدان در نقطه a برآیند سه میدان است. دو سیم نیم نامتناهی $\left(B=\frac{\mu_0 i}{4\pi r}\right)$ موازی و یک سیم نیم دایره $\left(B=\frac{\mu_0 i}{4r}\right)$ و با توجه به جهت جریان خواهیم داشت

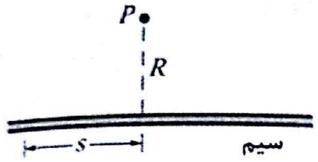
$$\vec B=\left[2\left(\frac{\mu_0 i}{4\pi R}\right)+\frac{\mu_0 i}{4R}\right]\hat k=\frac{\mu_0 i}{2R}\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\hat k$$

$$=\frac{(4\pi\times10^{-7})(10)}{2(0.005)}\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\hat k=1.03\times10^{-3}\,\hat k\,\text{T}$$

(پ) و (ت) چون فاصله بین a و b نسبت به R زیاد است لذا اثر سیم نیم دایره در نقطه b ناچیز بوده و فقط اثر دو سیم نامتناهی $\left(B=\frac{\mu i}{2\pi r}\right)$ را داریم:

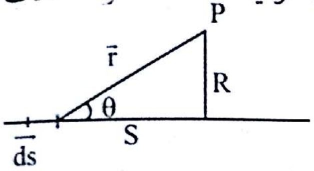
$$\vec B=2\left(\frac{\pi_0 i}{2\pi R}\right)\hat k=\frac{(4\pi\times10^{-7})(10)}{\pi(0.005)}\hat k=8\times10^{-4}\,\hat k\,\text{T}$$

●۱۲- در شکل ۲۵-۴۳، نقطهٔ P در فاصلهٔ عمودی $R=2.00$ cm از یک سیم مستقیم دراز و حامل جریان قرار دارد. میدان مغناطیسی $\vec B$ برقرار شده در نقطهٔ P ناشی از همهٔ عنصرهای جریان- طول یکسان $i\,d\vec s$ در طول سیم است. فاصلهٔ عنصری که (الف) بیشترین سهم را در میدان $\vec B$ و (ب) ۱۰/۰ درصد از بیشترین سهم را دارد چقدر است؟



شکل ۲۵-۴۳ مسئلهٔ ۱۲

حل: عنصر $\vec{ds}$ را در یک نقطه دلخواه انتخاب می‌کنیم



$$dB=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{\vec{ds}\times\vec r}{r^3}\Rightarrow$$

$$dB=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{ds\,r\sin\theta}{r^3}=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{R\,ds}{(S^2+R^2)^{3/2}}$$

(الف) عبارت بالا به ازای $S=0$ بیشترین مقدار را دارد.

$$dB_{max}=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{ds}{R^2}$$

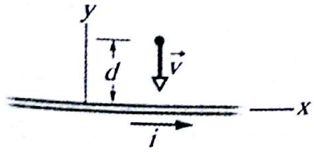
(ب) می‌خواهیم مقداری از S را به دست آوریم که در آن $dB=\frac{1}{10}dB_{\max}$ باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{R}{(S^2+R^2)^{3/2}}=\frac{1}{10}\frac{1}{R^2}\Rightarrow 10R^3=(s^2+R^2)^{3/2}$$

$$10^{2/3}R^2=S^2+R^2\Rightarrow S=\sqrt{10^{2/3}-1}\,R$$

$$=\left(\sqrt{10^{2/3}-1}\right)(2)=3.82\,\text{cm}$$

●●۱۳- شکل ۲۵-۴۴ پروتون متحرکی را با سرعت $\vec v=(-200\,\text{m/s})\hat j$ نشان می‌دهد که به طرف سیم مستقیم دراز که حامل جریان $i=350$ mA است حرکت می‌کند. در لحظهٔ نشان داده شده، فاصلهٔ پروتون از سیم $d=2.89$ cm است. نیروی مغناطیسی وارد بر پروتون ناشی از جریان را بر حسب بردار یکه پیدا کنید. ILW



شکل ۲۵-۴۴ مسئلهٔ ۱۳

حل: میدان مغناطیسی در محل پروتون برابر $\vec B=\frac{\mu_0 i}{2\pi d}\hat k$ و در نتیجه داریم

$$\vec F=q\vec v\times\vec B=\frac{\mu_0 iq}{4\pi d}(\vec v\times\hat k)=\frac{\mu_0 iq}{4\pi d}\left[v(-\hat j)\times\hat k\right]$$

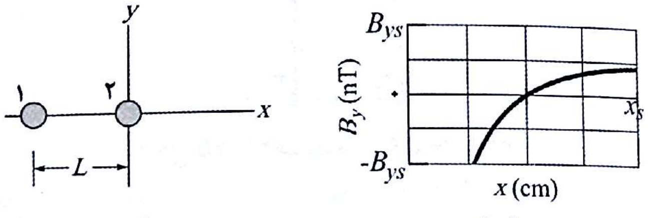
Scanned by CamScanner

$$\vec F = -\frac{\mu_0 i q v}{4\pi d}\hat{i}$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت:

$$\vec F = -7/75\times10^{-23}\,\hat{i}\,N$$

••۱۴- شکل ۲۵-۴۵ الف مقطع دو سیم موازی مستقیم به فاصلهٔ L را که حامل جریان است نشان می‌دهد. نسبت i_1/i_2 جریانها برابر با ۴/۰۰ است؛ جهت جریانها نشان داده نشده است. شکل ۲۵-۴۲ ب مؤلفهٔ B_y میدان مغناطیسی خالص آنها را در امتداد محور x به طرف راست سیم ۲ نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $B_{ys} = 4/0\,nT$ و مقیاس محور افقی با $x_s = 20/0\,cm$ مشخص شده است. (الف) در چه مقدار $x > 0$ مؤلفهٔ B_y بیشینه است؟ (ب) اگر i_2=۳mA باشد، مقدار این بیشینه چقدر است؟ جهت (به طرف داخل یا به طرف خارج صفحه) (پ) i_1 و (ت) i_2 چگونه است؟



(الف) (ب)

شکل ۲۵-۴۵ مسئلهٔ ۱۴

حل: با توجه به شکل ب مشاهده می‌کنیم که در $x = +10\,cm$، $B_y = 0$ است پس جهت جریان در دو سیم مخالف یکدیگر است. وقتی دور می‌شویم میدان مثبت روبه بالا نتیجه می‌گیریم جریان در سیم (۲) رو به بیرون و جریان در سیم (۱) به سوی داخل صفحه است.

$$B_y = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi x} - \frac{\mu_0 i_1}{2\pi(L+x)} = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi}\left(\frac{1}{x} - \frac{4}{L+x}\right) = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi}\,\frac{L-3x}{x(x+1)}$$

که با در نظر گرفتن $x = 10\,cm$، $B_y = 0$ و مقادیر داده شده $L = 30\,cm$ به دست می‌آید.

(الف)
$$\frac{dB_y}{dx} = \frac{\mu_0 i_2 - 3x(x+L) - (L-3x)(2x+L)}{x^2(x+L)^2}$$
$$\Rightarrow 3x^2 - 2Lx - L^2 = 0 \Rightarrow x = L = 30\,cm$$

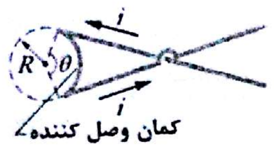
در $x = L$، B_y بیشینه است.

(ب) به ازای $i_2 = 0/003\,A$ و $L = 30\,cm$، بیشینهٔ B_y حاصل شود

$$B_{y,\max} = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi L} = \frac{(4\pi\times10^{-7})(0/003)}{2\pi(0/3)} = 2\times10^{-9}\,T$$

(پ) و (ت) در بحث بالا پاسخ داده شده است.

••۱۵- سیمی با جریان $i = 3/00\,A$ در شکل ۲۵-۴۶ نشان داده شده است. دو بخش مستقیم نیم بینهایت، هر دو مماس بر یک دایره، با یک کمان دایره‌ای که زاویهٔ مرکزی آن θ است به هم متصل‌اند. کمان وصل کننده و دو بخش مستقیم همگی در یک صفحه قرار دارند. اگر $B = 0$ باشد، θ چقدر است؟ SSM

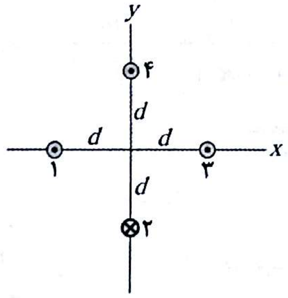


شکل ۲۵-۴۶ مسئلهٔ ۱۵

حل: سیم دارای سه بخش است. دو بخش سیم مستقیم نیم نامتناهی با میدان مغناطیسی به بزرگی $\mu_i 4\pi R$ جهت آنها با توجه به قاعده دست راست به سمت خارج صفحه است $(\hat{k})$ و بخش دیگر یک کمان دایره‌ای است که بزرگی میدان مغناطیسی برابر $\frac{\mu_0 i\theta}{4\pi R}$ و جهت آن در مرکز کمان به سمت داخل صفحه $(-\hat{k})$ است. حال می‌توان نوشت

$$\vec B = 2\left(\frac{\mu_0 i}{4\pi R}\right)\hat{k} - \frac{\mu_0 i\theta}{4\pi R}\hat{k} = 0 \Rightarrow \theta = 2\,rad$$

••۱۶- شکل ۲۵-۴۷ مقطع چهار سیم نازک موازی، مستقیم و خیلی دراز را نشان می‌دهد. این سیم‌ها حامل جریانهای یکسان در جهتهای نشان داده شده‌اند. در آغاز همهٔ چهار سیم در فاصلهٔ $d = 15/0\,cm$ از مبداء مختصات قرار دارند که در آنجا میدان مغناطیسی خالص $\vec B$ را ایجاد کرده‌اند. (الف) تا چه مقدار x سیم ۱ را باید حرکت داد تا $\vec B$ به اندازهٔ $30°$ پاد ساعتگرد بچرخد؟ (ب) وقتی سیم ۱ در وضعیت جدید قرار گرفت، تا چه مقدار x باید سیم ۳ را در امتداد محور x حرکت داد تا $\vec B$ به اندازهٔ $30°$ بچرخد و به وضعیت اولیه برگردد؟



شکل ۲۵-۴۷ مسئلهٔ ۱۶

حل: پیش از جابه‌جایی $B_y = 0$ و $B_x = B_2 + B_4 = 2(\mu_i 2\pi d)$ که در آن $d = 0/15\,m$ است. برای آنکه $\vec B$ به اندازه $30°$ پادساعتگرد بچرخد لازم است که داشته باشیم:

$$B_y = B_x \tan 30°$$

$$B_1' - B_3 = 2\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi d}\right)\tan 30°$$

$$\frac{\mu i}{2\pi d'} - \frac{\mu_0 i}{2\pi d} = 2\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi d}\right)\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow d' = \frac{\sqrt{3}\,d}{\sqrt{3}+2}$$

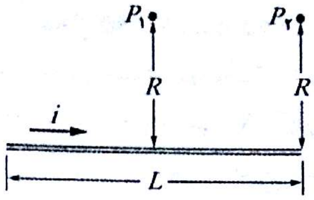
(الف) به ازای $d = 15\,cm$ در رابطه بالا داریم $d' = 7\,cm$، یعنی اینکه باید سیم ۱ را به $x = -7\,cm$ حرکت داد.

(ب) برای برگشت به وضعیت اولیه باید سیم ۳ را به $x = +7\,cm$ حرکت داد تا تقارن اولیه دوباره برقرار شود.

••۱۷- در شکل ۲۵-۴۸، نقطهٔ P_1 در فاصلهٔ $R = 13/1\,cm$ روی عمود منصف سیم مستقیمی به طول $L = 18/0\,cm$ که

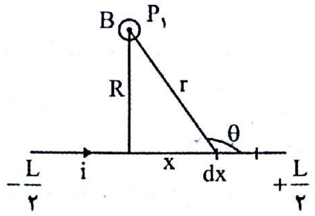
Scanned by CamScanner

حامل جریان $i = ۵۸/۲ \, mA$ است قرار دارد. (توجه کنید که سیم دراز نیست.) بزرگی میدان مغناطیسی ناشی از i در $P_۱$ چقدر است؟ WWW SSM



شکل ۲۵-۴۸ مسئله‌های ۱۷ و ۲۱

حل: حلی که برای سیم دراز نامتناهی انجام شد را درنظر بگیرید در اینجا همان روش اعمال می‌شود ولی فقط کران آن از $-\frac{L}{۲}$ تا $+\frac{L}{۲}$ خواهد بود.



یک عنصر dx از سیم را انتخاب می‌کنیم میدان حاصل از آن در $P_۱$ به سمت خارج صفحه است. برای تمام عنصرهای dx جهت dB به سمت خارج صفحه است. بزرگی dB برابر است:

$$dB = \frac{\mu_۰ i}{۴\pi}\frac{r dx \sin\theta}{r^۳} = \frac{\mu_۰ i}{۴\pi}\frac{R dx}{(x^۲+R^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$B = \frac{\mu_۰ i R}{۴\pi}\int_{-\frac{L}{۲}}^{\frac{L}{۲}}\frac{dx}{(x^۲+R^۲)^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{\mu_۰ i R}{۴\pi}\frac{۱}{R^۲}\frac{x}{\sqrt{x^۲+R^۲}}\Bigg|_{-\frac{L}{۲}}^{\frac{L}{۲}}$$

$$B = \frac{\mu_۰ i L}{۲\pi R\sqrt{L^۲+۴R^۲}}$$

با قرار دادن مقادیر عددی خواهیم داشت $B = ۵/۰۳ \times ۱۰^{-۸} \, T$.

●●۱۸- معادلهٔ ۲۵-۴ بزرگی B میدان مغناطیسی برقرار شده توسط جریانی در یک سیم مستقیم بینهایت دراز را در نقطهٔ P در فاصلهٔ عمودی R از سیم به دست می‌دهد. فرض کنید که نقطهٔ P در واقع در فاصلهٔ عمودی R از نقطهٔ وسط سیمی به طول L متناهی قرار دارد. با استفاده از معادلهٔ ۲۵-۴، B را محاسبه و سپس خطای آن را برحسب درصد بیان کنید. اگر خطای نسبی کمتر از ۱/۰۰ درصد باشد، نسبت L/R چقدر تغییر می‌کند؟ یعنی چه مقدار L/R جواب زیر را به دست می‌دهد

$$\frac{(B \text{ واقعی}) - (B \text{ از معادلهٔ ۲۵-۴})}{(B \text{ واقعی})}(\%۱۰۰) = \%۱/۰۰$$

حل: میدان مغناطیسی یک سیم دراز نامتناهی در فاصله R از آن برابر است با $B = \mu_۰ i/۲\pi R$ و برای یک سیم با طول L، همانطور که در مسئله ۱۷ دیدیم، برابر است با:

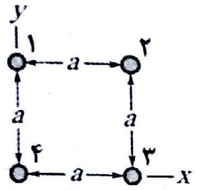
$$B = \frac{\mu_۰ i}{۲\pi R}\frac{L}{\sqrt{L^۲+۴R^۲}}$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{\frac{\mu_۰ i}{۲\pi R} - \frac{\mu_۰ i}{۲\pi R}\frac{L}{\sqrt{L^۲+۴R^۲}}}{\frac{\mu_۰ i}{۲\pi R}\frac{L}{\sqrt{L^۲+۴R^۲}}} = \frac{۱ - \frac{L}{\sqrt{L^۲+۴R^۲}}}{\frac{L}{\sqrt{L^۲+۴R^۲}}} = ۰/۰۱$$

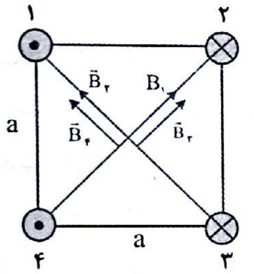
$$۱ - \frac{L}{\sqrt{L^۲+۴R^۲}} = (۰/۰۱)\frac{L}{\sqrt{L^۲+۴R^۲}} \Rightarrow \frac{L}{R} = ۱۴$$

●●۱۹- در شکل ۲۵-۴۹ چهار سیم مستقیم دراز بر صفحهٔ شکل عمودند و مقطع آنها مربعی به ضلع $a = ۲۰ cm$ می‌سازد. جریان در سیمهای ۱ و ۴ به طرف بیرون صفحه و در سیمهای ۲ و ۳ به طرف داخل صفحه‌اند و جریان در هر سیم ۲۰A است. میدان مغناطیسی خالص در مرکز مربع را برحسب بردار یکه پیدا کنید. SSM



شکل ۲۵-۴۹ مسئله‌های ۱۹، ۳۶ و ۳۹

حل:



بزرگی میدان مغناطیسی حاصل از هر سیم در مرکز برابر $\mu_۰ i/۲\pi r$ است که r برابر نصف قطر مربع یعنی $r = \frac{۱}{۲}(\sqrt{۲}a)$ است. با توجه به تقارن مسئله مؤلفه‌های x میدان‌ها یکدیگر را خنثی می‌کنند. و فقط مؤلفه y داریم

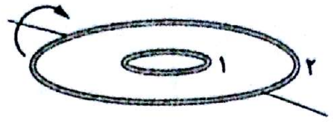
$$B_y = ۴B_۱\cos ۴۵° = ۴\frac{\mu_۰ i}{۲\pi\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}a\right)}\cdot\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲\mu_۰ i}{\pi a}$$

$$= \frac{۲(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۲۰)}{\pi(۰/۲)} = ۸\times۱۰^{-۵}$$

در نتیجه $\vec{B}_{\text{کل}} = (۸\times۱۰^{-۵}\,\hat{j})\,T$

●●۲۰- در شکل ۲۵-۵۰، دو حلقهٔ سیمی دایره‌ای هم مرکز حامل جریان در یک جهت‌اند و در یک صفحه قرار دارند. شعاع حلقهٔ ۱ برابر ۱/۵۰ cm و جریان آن ۴/۰۰mA است. شعاع حلقهٔ ۲ برابر ۲/۵۰cm و حامل جریان ۶/۰۰mA است. حلقهٔ ۲ را حول قطری می‌چرخانیم و در همان حال میدان مغناطیسی خالص $\vec{B}$ برقرار شده توسط دو حلقه را در مرکز مشترک آنها اندازه می‌گیریم. برای اینکه بزرگی میدان خالص ۱۰۰nT باشد، حلقهٔ ۲ چقدر باید بچرخد؟

Scanned by CamScanner



شکل ۲۵-۵۰ مسئلهٔ ۲۰

حل: میدان مغناطیسی یک حلقه حامل جریان به شعاع R در مرکز آن برابر است با $B=\mu_0 i/2R$. جهت میدان هر سطح حلقه عمود و از قاعده دست راست پیروی می‌کند.

$$B_1=\frac{\mu_0 i}{2R_1}=\frac{(4\pi\times10^{-7})(4\times10^{-3})}{2(1.5\times10^{-2})}=1.67\times10^{-7}\ \text{T}$$

$$B_2=\frac{\mu_0 i}{2R_2}=\frac{(4\pi\times10^{-7})(6\times10^{-3})}{2(2.5\times10^{-2})}=1.51\times10^{-7}\ \text{T}$$

اگر حلقه (۲) به اندازه θ بچرخد بنابر قانون کسینوس‌ها خواهیم داشت.

$$B^2=B_1^2+B_2^2+2B_1B_2\cos\theta$$

که با قرار دادن مقادیر معلوم زاویه θ برابر با 143.8° به دست می‌آید.

۲۱●● - در شکل ۲۵-۴۸، نقطهٔ P_2 در فاصلهٔ عمودی $R=25.1$ cm از یک انتهای سیم مستقیم به طول $L=13.6$ cm و حامل جریان $i=0.693$ A قرار دارد. (توجه کنید که سیم *دراز نیست*.) بزرگی میدان مغناطیسی در P_2 چقدر است؟ SSM

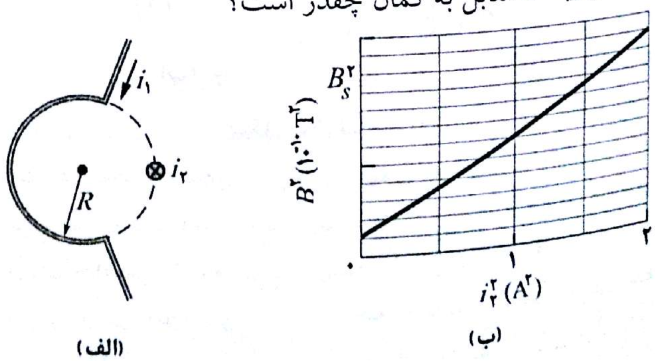
حل: با توجه به مسئله ۱۷ داریم

$$dB=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{R\,dx}{(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$B=\frac{\mu_0 iR}{4\pi}\int_{-L}^{0}\frac{dx}{(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\mu_0 i}{4\pi R}\frac{L}{\sqrt{L^2+R^2}}$$

که با قرار دادن مقادیر عددی داریم: $B=1.32\times10^{-7}$ T.

۲۲●● - در شکل ۲۵-۵۱ الف، سیم ۱ شامل یک کمان دایره‌ای و دو طول شعاعی است؛ این سیم حامل جریان $i_1=0.50$ A در جهت مشخص شده است. سیم ۲ که مقطع آن نشان داده شده سیم دراز مستقیمی عمود بر صفحهٔ شکل است. فاصلهٔ این سیم از مرکز کمان برابر با شعاع R کمان، و حامل جریان i_2 است که می‌تواند تغییر کند. این دو جریان یک میدان مغناطیسی خالص $\vec{B}$ در مرکز کمان ایجاد می‌کنند. شکل ۲۵-۷۰ ب مربع بزرگی میدان B^2 را بر حسب مربع جریان i_2^2 به دست می‌دهد. مقیاس محور قائم با $B_s^2=10.0\times10^{-10}\ \text{T}^2$ مشخص شده است. زاویهٔ θ مقابل به کمان چقدر است؟



(الف) (ب)

شکل ۲۵-۵۱ مسئلهٔ ۲۲

حل: میدان ناشی از دو سیم راست در نقطه O صفر است چون امتداد آنها از این نقطه می‌گذرد و میدان ناشی از کمان طبق قاعده دست راست به سمت خارج از صفحه بوده و بزرگی آن از رابطه زیر به دست می‌آید

$$B_1=\frac{\mu_0 i_1\phi}{4\pi R}$$

میدان ناشی از سیم ۲ به سمت بالا بوده و بزرگی آن نیز از رابطه زیر به دست می‌آید

$$B_2=\frac{\mu i_2}{2\pi R}$$

حال با استفاده از قضیه فیثاغورث داریم:

$$B^2=B_1^2+B_2^2$$

با توجه به نمودار مشاهده می‌کنیم که در $i_2=0$، لذا $B^2=1\times10^{-10}\ T^2$

$$1\times10^{-10}=\left(\frac{\mu_0 i_1\phi}{4\pi R}\right)^2 \qquad (1)$$

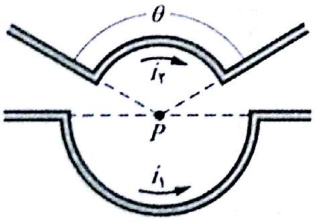
همچنین مشاهده می‌شود که در $i_2^2=2\text{A}^2$، $B^2=11\times10^{-10}\ \text{T}^2$ لذا

$$11\times10^{-10}=\frac{\mu_0^2 i_1^2\phi^2}{16\pi^2R^2}+\frac{\mu_0^2(2)}{16\pi^2R^2} \qquad (2)$$

از حل همزمان رابطه‌های (۱) و (۲) و حل آن برای ϕ، داریم

$\phi=1.79$ rad یا 102.5°

۲۳- شکل ۲۵-۵۲ دو قطعه جریان را نشان می‌دهد. قطعهٔ پایینی حامل جریان $i_1=0.40$ A و شامل کمان دایره‌ای با شعاع 5.0 cm و زاویهٔ 180° و نقطهٔ مرکزی P است. قطعه بالایی حامل جریان $i_2=2i_1$ و شامل کمان دایره‌ای به شعاع 4.0 cm، زاویه 120° و همان مرکز P است. (الف) بزرگی و (ب) جهت میدان مغناطیسی خالص $\vec{B}$ را برای جهتهای نشان داده شدهٔ جریان پیدا کنید. (پ) بزرگی و (ت) جهت $\vec{B}$ در صورت معکوس شدن جهت جریان را پیدا کنید.



شکل ۲۵-۵۲ مسئلهٔ ۲۳

حل: (الف) و (ب) می‌دانیم که بخش‌های مستقیم مدار سهمی در میدان مغناطیسی نقطهٔ P ندارند چون امتداد آنها از نقطه P می‌گذرد و $d\vec{s}\times\vec{r}$ برای آنها صفر است. میدان مغناطیسی در نقطه P فقط ناشی از دو کمان بالایی و پایینی است. بزرگی میدان حاصل از کمان در مرکز آن از رابطه $\mu_0 i\theta/4\pi R$ به دست می‌آید. طبق قاعدهٔ دست راست دیده می‌شود که جهت میدان حاصل از کمان پایینی به سمت خارج از صفحه، $+\hat{k}$، و

Scanned by CamScanner

کمان بالایی به سمت داخل صفحه، $-\hat{k}$ است. در نتیجه میدان مغناطیسی خالص $\vec{B}$ در نقطهٔ P برابر است با:

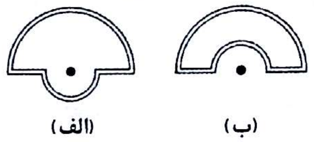
$$\vec{B} = B_1\hat{k} - B_2\hat{k} = \frac{\mu_0 i_1 \pi}{4\pi R_1}\hat{k} - \frac{\mu_0 i_2\left(2\frac{\pi}{2}\right)}{4\pi R_2} = 2.51^{-6}\hat{k}\,T - 4.21^{-6}\hat{k}\,T$$

$$\vec{B} = -1.7\times10^{-6}\,\hat{k}\,T$$

(پ) (ت) اگر جهت جریان i_1 عوض شود، در این صورت جهت میدان حاصل از آن به سمت داخل صفحه خواهد بود یعنی $\vec{B}_1 = -B\hat{k}$ در نتیجه داریم

$$\vec{B} = -2.5\times10^{-6}\,\hat{k}\,T - 4.2\times10^{-6}\,\hat{k}\,T = -6.71^{-6}\,\hat{k}\,T$$

●●۲۴- جریانی در یک حلقه سیم شامل نیمدایره‌ای به شعاع ۴۰/۰۰cm و نیمدایره‌ای کوچکتر و هم مرکز و دو سیم مستقیم شعاعی که همگی در یک صفحه قرار دارند برقرار است. شکل ۲۵-۵۳ الف این آرایش را نشان می‌دهد که در مقیاس نیست. بزرگی میدان مغناطیسی ایجاد شده در مرکز انحنا ۴۷/۲۵ μT است. سپس نیمدایرهٔ کوچک به طرف دیگر برگردانده (چرخانده) می‌شود تا دوباره مجموعه در یک صفحه قرار گیرد، (شکل ۲۵-۵۳ ب). میدان مغناطیسی ایجاد شده در (همان) مرکز انحنا اکنون دارای بزرگی ۱۵/۷۵ μT است ولی جهت آن معکوس شده است. شعاع دایرهٔ کوچکتر چقدر است؟



شکل ۲۵-۵۳ مسئلهٔ ۲۴

حل: بخش‌های مستقیم مدار سهمی در میدان مغناطیس در مرکز کمان‌ها ندارند چون امتداد آنها از مرکز می‌گذرد. برای شکل (الف) میدان مغناطیسی ناشی از کمان‌ها با هم جمع می‌شوند و با توجه به اینکه میدان حاصل از کمان در مرکز آن از رابطه $\mu_0 i\theta/4\pi R$ به دست می‌آید، خواهیم داشت:

$$B_1 = \frac{\mu_0 i\pi}{4\pi R_{\text{کوچک}}} + \frac{\mu_0 i\pi}{4\pi R_{\text{بزرگ}}}$$

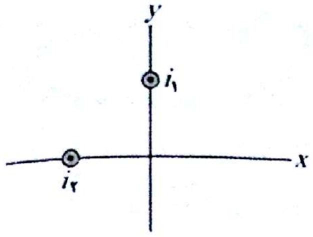
و برای شکل (ب) داریم:

$$B_2 = \frac{\mu_0 i\pi}{4\pi R_{\text{کوچک}}} + \frac{\mu_0 i\pi}{4\pi R_{\text{بزرگ}}}$$

با عددگذاری و تقسیم دو رابطه بر هم داریم:

$$\frac{47.25}{15.75} = \frac{\frac{2}{R_1}+50}{\frac{2}{R_1}-50} \Rightarrow R_1 = 0.02\,m$$

۲۵- در شکل ۲۵-۵۴، دو سیم مستقیم دراز (نشان داده شده با مقطع) حامل جریانهای i_1=۳۰/۰mA و i_2=۴۰/۰ mA به طرف بیرون صفحه هستند. فاصلهٔ آنها از مبدأ یکسان است و یک میدان مغناطیسی $\vec{B}$ برقرار کرده‌اند. جریان i_1 تا چه مقدار باید تغییر کند تا $\vec{B}$ را به اندازهٔ ۲۰/۰° ساعتگرد بچرخاند؟



شکل ۲۵-۵۴ مسئلهٔ ۲۵

حل: زاویه میدان مغناطیسی برآیند ناشی از سیم‌های بلند برابر است با

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{B_2}{B_1}\right) = \tan^{-1}\left[\left(\frac{\mu_0 i_2}{2\pi R}\right)/\left(\frac{\mu_0 i_1}{2\pi R}\right)\right]$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{i_2}{i_1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53.13°$$

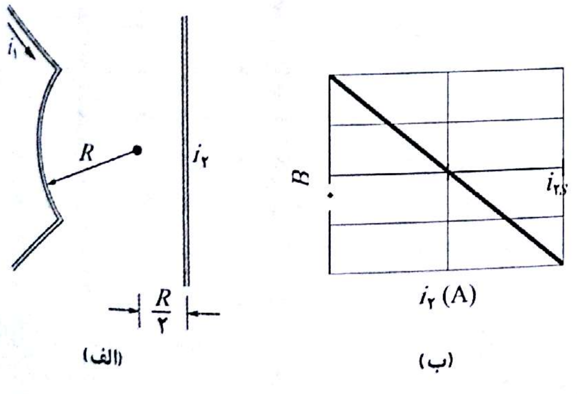
اگر بردار میدان مغناطیسی برایند به اندازهٔ ۲۰° بچرخد داریم

$$\varphi = 53.13 - 20 = 33.13°$$

در نتیجه جریان i_1 چنین می‌شود:

$$i_1 = \frac{i_2}{\tan\vartheta} = \frac{4}{\tan(33.13)} = 61.3\,mA$$

●●۲۶- شکل ۲۵-۵۵ الف دو سیم حامل جریان را نشان می‌دهد. سیم ۱ شامل یک کمان دایره‌ای به شعاع R و دو طول شعاعی است؛ سیم حامل جریان در جهت نشان داده شده و برابر با i_1=۲/۰ A است. سیم ۲ مستقیم و دراز است و جریان i_2 که می‌تواند تغییر کند در آن برقرار است و در فاصلهٔ $R/2$ از مرکز کمان قرار دارد. میدان مغناطیسی $\vec{B}$ خالص ناشی از این دو جریان در مرکز انحنای کمان اندازه‌گیری می‌شود. شکل ۲۵-۵۵ ب نمودار مؤلفهٔ $\vec{B}$ را در جهت عمود بر شکل برحسب تابعی از جریان i_2 نشان می‌دهد. مقیاس محور افقی با i_{2s} =۱/۰۰A مشخص شده است. زاویهٔ دربرگرفته شده توسط کمان چقدر است؟



شکل ۲۵-۵۵ مسئلهٔ ۲۶

حل: دو بخش مستقیم سیم ۱ سهمی در میدان مغناطیسی در مرکز کمان دایره‌ای ندارند، چون امتداد آنها از مرکز می‌گذرند. میدان حاصل از کمان از رابطهٔ $B_1 = \mu_0 i\theta/4\pi R$ به دست می‌آید و در اینجا جهت آن با توجه به قاعده دست راست به سمت خارج صفحه، $+\hat{k}$ است. میدان حاصل از سیم دراز ۲ از رابطه $B_2 = \mu_0 i/4\pi r$ به دست می‌آید که در اینجا $r = R/2$

است و جهت میدان حاصل از آن در محل مرکز کمان به سمت داخل صفحه، $-\hat{k}$ است. در نتیجه میدان برایند در مرکز کمان برابر است با

$$\vec{B}=B_۱\hat{k}-B_۲\hat{k}=\left(\frac{\mu_\circ i_۱\theta}{۴\pi R}-\frac{\mu_\circ i_۲}{۲\pi(R/۲)}\right)\hat{k}$$

از شکل ب دیده می‌شود که به ازای $i_۲=\circ/۵A$ ، $\vec{B}=\circ$ است. لذا داریم

$$\frac{\mu_\circ i_۱\theta}{۴\pi R}=\frac{\mu_\circ i_۲}{\pi R}\Rightarrow\theta=۴\left(\frac{i_۲}{i_۱}\right)$$

$$\theta=۴\left(\frac{\circ/۵}{۲}\right)=۱\ \text{rad}$$ یا $۵۷/۳^\circ$

۲۷- یک سیم دراز در امتداد محور x قرار دارد و حامل جریان $۳\circ A$ در جهت مثبت x است. سیم دراز دیگری که عمود بر صفحهٔ xy است از نقطهٔ $(\circ,۴/\circ m,\circ)$ عبور می‌کند و حامل جریان $۴\circ A$ در جهت مثبت z است. بزرگی میدان مغناطیسی حاصل در نقطهٔ $(\circ,۲/\circ m,\circ)$ چقدر است؟

حل: میدان حاصل از سیم اول برابر است با

$$B_۱=\frac{\mu_\circ i_۱}{۲\pi r_۱}\hat{k}=\frac{(۴\pi\times۱\circ^{-۷})(۳\circ)}{۲\pi(۴)}\hat{k}=۳\times۱\circ^{-۶}\hat{k}\,T$$

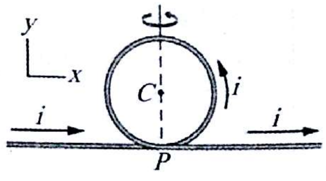
فاصله سیم دو برابر $r_۲=۴-۲=۲m$ است، لذا داریم

$$\vec{B}_۲=\frac{\mu_\circ i_۲}{۲\pi r_۲}\hat{i}=\frac{(۴\pi\times۱\circ^{-۷})(۴\circ)}{۲\pi(۲)}\hat{i}=۴\times۱\circ^{-۶}\hat{i}\,T$$

در نتیجه بزرگی میدان در نقطهٔ موردنظر برابر است با

$$B=\sqrt{B_۱^۲+B_۲^۲}=۵\times۱\circ^{-۶}\ T$$

●●۲۸- در شکل ۲۵-۵۶، بخشی از یک سیم عایقبندی شدهٔ دراز که حامل جریان $i=۵/۷۵\ mA$ است به صورت دایره‌ای به شعاع $R=۱/۸۹\ cm$ درآمده است. اگر بخش دایره‌ای (الف) در صفحهٔ کاغذ به صورت نشان داده شده قرار داشته باشد و (ب) پس از چرخش $۹\circ^\circ$ پاد ساعتگرد به صورت مشخص شده عمود بر صفحه کاغذ قرار گیرد، میدان مغناطیسی را در مرکز انحنای C بر حسب بردار یکه پیدا کنید؟



شکل ۲۵-۵۶ مسئلهٔ ۲۸

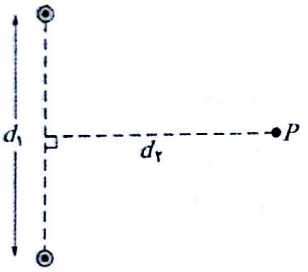
حل: (الف) میدان حاصل از سیم دراز و حلقهٔ دایره‌ای در مرکز حلقه با هم جمع شده و بنا به قاعده دست راست به سمت خارج صفحه هستند، $\hat{k}$، لذا داریم

$$\vec{B}_{\text{برایند}}=\vec{B}_{\text{سیم}}+\vec{B}_{\text{حلقه}}=\frac{\mu_\circ i}{۲\pi R}\hat{k}+\frac{\mu_\circ i}{۲R}\hat{k}=\frac{\mu_\circ i}{۲R}\left(\frac{۱}{\pi}+۱\right)$$
$$=\frac{(۴\pi\times۱\circ^{-۷})(۵/۷۵)}{۲(\circ/\circ۱۸۹)}\left(\frac{۱}{\pi}+۱\right)\hat{k}=۲/۵۳\times۱\circ^{-۷}\hat{k}\,T$$

(ب) در این حالت جهت میدان مغناطیسی حاصل از حلقه به سوی $\hat{i}$ است و داریم

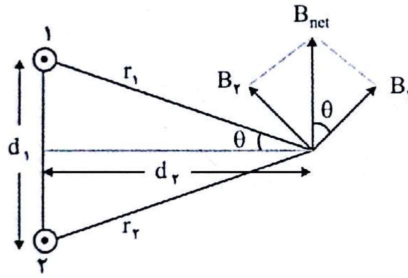
$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ i}{۲\pi R}\hat{k}+\frac{\mu_\circ i}{۲R}\hat{i}=\frac{\mu_\circ i}{۲R}\left(\frac{۱}{\pi}\hat{k}+\hat{i}\right)$$
$$=۱/۹۲\times۱\circ^{-۷}\,T\,\hat{i}+۶/۱۲\times۱\circ^{-۸}\,\hat{k}\,T$$

۲۹- شکل ۲۵-۵۷، دو سیم مستقیم خیلی دراز (نشان داده شده با مقطع) هر یک حامل جریان $۴/\circ\circ A$ به طرف بیرون را نشان می‌دهد. فاصلهٔ $d_۱=۶/\circ\circ\ m$ و $d_۲=۴/\circ\circ\ m$ است. بزرگی میدان مغناطیسی در نقطهٔ P، که روی عمود منصف سیمها قرار دارد، چقدر است؟



شکل ۲۵-۵۷ مسئلهٔ ۲۹

حل: با توجه به قاعده دست راست جهت میدان مغناطیسی به صورت زیر است:



داریم $r_۱=r_۲=r$ ، $i_۱=i_۲=i$ لذا $|B_۱|=|B_c|=B$ و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$B_{ne}=۲B\cos\theta=۲\frac{\mu_\circ i}{۲\pi r}\cos\theta$$

که در آن:

$$r=\sqrt{(d_۲)^۲+(d_۱)^۲}=\sqrt{(۴)^۲+(۶)^۲}=۵m$$

و

$$\theta=tg^{-۱}\left[\frac{(d_{۱/۲})}{d_۲}\right]=tg^{-۱}\left(\frac{۳}{۴}\right)=۳۶/۸۷^\circ$$

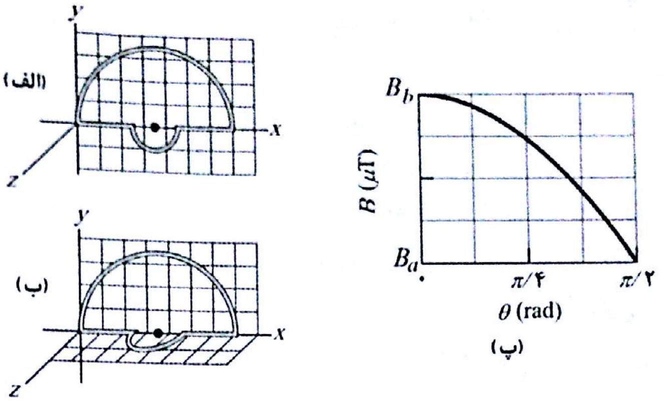
بنابراین داریم:

$$B_{\text{net}}=(۲)\frac{(۴\pi\times۱\circ^{-۷})(۴)}{۲\pi(۵)}\cos(۳۶/۸۷^\circ)=۲/۵۶\times۱\circ^{-۷}\ T$$

●●●۳۰- همهٔ حلقه سیم حامل جریان در شکل ۲۵-۵۸ الف در یک صفحه قرار دارد و از یک نیمدایره به شعاع $۱\circ/\circ cm$، یک نیمدایرهٔ کوچکتر به همان مرکز و دو طول شعاعی تشکیل شده است. نیمدایرهٔ کوچکتر به اندازهٔ زاویهٔ θ حول صفحه می‌چرخد تا بر آن عمود شود (شکل ۲۵-۵۸ ب). شکل ۲۵-۵۸ پ بزرگی میدان مغناطیسی خالص را در مرکز انحنا برحسب

Scanned by CamScanner

زاویهٔ θ به دست می‌دهد. مقیاس محور قائم با $B_a=۱۰/۰\,\mu T$ و $B_b=۱۲/۰\,\mu T$ مشخص شده است. شعاع دایرهٔ کوچکتر چقدر است؟



شکل ۲۵-۵۸ مسئلهٔ ۳۰

حل: بخش‌های مستقیم در مرکز میدانی ایجاد نمی‌کنند چون امتداد آنها از مرکز می‌گذرد. میدان مغناطیسی در مرکز ناشی از دو کمان بالایی و پایینی است که در این حالت با توجه به قاعده دست راست با هم جمع می‌شوند.

$$B_۱=\frac{\mu_۰ i\pi}{۴\pi R_۱}+\frac{\mu_۰ i\pi}{۴\pi R_۲}$$

و در وضعیت نهایی دو میدان مغناطیسی حاصل از کمان‌ها بر هم عمودند و داریم:

$$B_۲^۲=B_z^۲+B_y^۲=\left(\frac{\mu_۰ i\pi}{۴\pi R_۱}\right)^۲+\left(\frac{\mu_۰ i\pi}{۴\pi R_۲}\right)^۲$$

رابطه $B_۱$ را به توان دو رسانده و بر رابطه $B_۲^۲$ تقسیم کنیم، داریم:

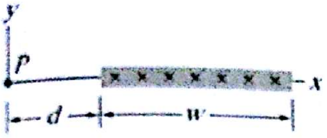
$$\left(\frac{B_۱}{B_۲}\right)^۲=\frac{\left(\frac{۱}{R_۱}+\frac{۱}{R_۲}\right)^۲}{\frac{۱}{R_۱^۲}+\frac{۱}{R_۲^۲}}$$

بیشترین میدان مغناطیسی مربوط به وضعیت اولیه و کمترین میدان مربوط به وضعیت نهایی است. با توجه به نمودار بیشینه B برابر ۱۲T و کمینه آن ۱۰T است. و با در نظر گرفتن $R_۱=۰/۱\ \text{m}$ خواهیم داشت:

$$\left(\frac{۱۲}{۱۰}\right)^۲=\frac{\left(\frac{۱}{۰/۱}+\frac{۱}{R_۲}\right)^۲}{\frac{۱}{(۰/۱)^۲}+\frac{۱}{R_۲^۲}}\Rightarrow R_۲=۰/۰۲۳\ \text{m}$$

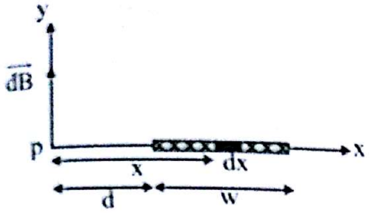
●●●۳۱- شکل ۲۵-۵۹ مقطع نوار باریک درازی به عرض $w=۴/۹۱\text{cm}$ را نشان می‌دهد که حامل توزیع جریان یکنواخت $i=۴/۶۱\,\mu A$ به طرف داخل صفحه است. در فاصلهٔ $d=۲/۱۶\text{cm}$ از لبهٔ نوار در نقطهٔ P در صفحهٔ آن میدان مغناطیسی $\vec{B}$ برحسب بردار یکه چقدر است؟ (*راهنمایی:* نوار را به صورت سیمهای موازی، باریک و دراز زیادی در نظر بگیرید.)

ILW SSM



شکل ۲۵-۵۹ مسئلهٔ ۳۱

حل:



مطابق شکل عنصر dx از نوار را در نظر می‌گیریم که از آن جریان di می‌گذرد و میدان مغناطیسی حاصل از آن برابر است با جریان یک سیم دراز که در اینجا جهت آن در راستای محور y و بزرگی آن در آن نقطه چنین است.

$$dB=\frac{\mu_۰ di}{۲\pi x}$$

که در آن $di=\frac{i}{W}dx$ و داریم

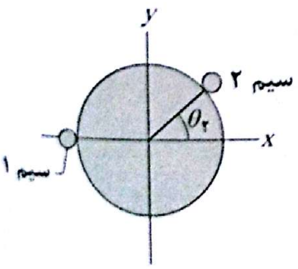
$$dB=\frac{\mu_۰ i}{۲\pi x}\frac{dx}{x}$$

$$B=\frac{\mu_۰ i}{۲\pi W}\int_d^{d+W}\frac{dx}{x}=\frac{\mu_۰ i}{۲\pi W}\ln\frac{d+W}{d}$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده $B=۲/۲۳\times۱۰^{۱۱}\ \text{T}$ و جهت آن نیز در راستای محور y است

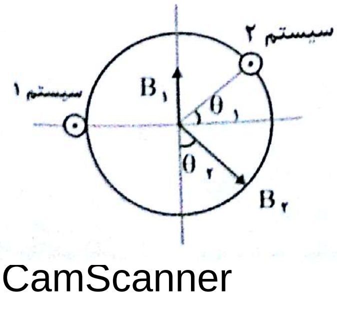
$$\vec{B}=۲/۲۳\times۱۰^{۱۱}\,\hat{j}\text{T}$$

●●●۳۲- شکل ۲۵-۶۰ مقطع دو سیم مستقیم دراز را نشان می‌دهد که روی استوانهٔ پلاستیکی به شعاع $۲۰/۰\ \text{cm}$ نگهداشته شده‌اند. سیم ۱ حامل جریان $i_۱=۶۰/۰\ \text{mA}$ به طرف بیرون صفحه است و در جای خود در سمت چپ استوانه قرار دارد. سیم ۲ حامل جریان $i_۲=۴۰/۰\ \text{mA}$ به طرف بیرون صفحه است و می‌تواند در اطراف استوانه حرکت کند. در چه زاویهٔ $\theta_۲$ (مثبتی) سیم ۲ باید قرار گیرد تا در مبدأ، میدان مغناطیسی ناشی از دو جریان دارای بزرگی $۸۰/۰\ \text{nT}$ باشد؟



شکل ۲۵-۶۰ مسئلهٔ ۳۲

حل:



بزرگی میدان‌های مغناطیسی B_1 و B_2 در مرکز برابر است با

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi R} = \frac{(4\pi\times10^{-7})(60\times10^{-3})}{2\pi(0.2)} = 6\times10^{-8}\,T = 60\,\text{nT}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi R} = \frac{(4\pi\times10^{-7})(40\times10^{-3})}{2\pi(0.2)} = 4\times10^{-8}\,T = 40\,\text{nT}$$

جهت $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$ با توجه به قاعده دست راست در شکل نشان داده شده است.

$$\vec{B}_{\text{net}} = B_2\sin\theta_2\hat{i} + (B_1 - B_2\cos\theta_2)\hat{j}$$

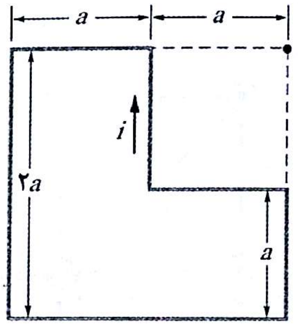
در نتیجه می‌توان نوشت:

$$B_{\text{net}}^2 = (B_2\sin\theta_2)^2 + (B_1 - B_2\cos\theta_2)^2$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت:

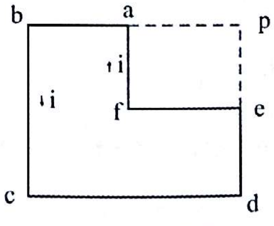
$$\cos\theta_2 = -\frac{1}{4} \Rightarrow \theta = 104.5°$$

●●●۳۳- در شکل ۲۵-۶۱، طول a برابر با ۴/۷ cm و جریان i برابر با ۱۳A است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (به طرف داخل صفحه یا به طرف خارج آن) میدان مغناطیسی در نقطهٔ P را پیدا کنید.



شکل ۲۵-۶۱ مسئلهٔ ۳۳

حل: (الف) و (ب) سیم‌های ab و de سهمی در میدان مغناطیسی حاصل در نقطهٔ P ندارند چون امتداد آنها از این نقطه می‌گذرد. با توجه به مسئله ۲۱، میدان ناشی از سیم bc برابر است با



$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}\frac{L}{(L^2+R^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi(2a)}\frac{(2a)}{\sqrt{(2a)^2+(2a)^2}} = \frac{\sqrt{2}\mu_0 i}{16\pi a}$$

به سمت خارج صفحه

میدان ناشی از سیم cd نیز برابر است با:

$$B_2 = \frac{\sqrt{2}\mu_0 i}{16\pi a}$$

به سمت خارج صفحه

میدان ناشی از سیم fa برابر است با:

$$B_3 = \frac{\mu_0 i}{2\pi a}\frac{a}{\sqrt{a^2+a^2}} = \frac{\sqrt{2}\mu_0 i}{8\pi a}$$

به سمت خارج صفحه

میدان ناشی از سیم ef برابر است با:

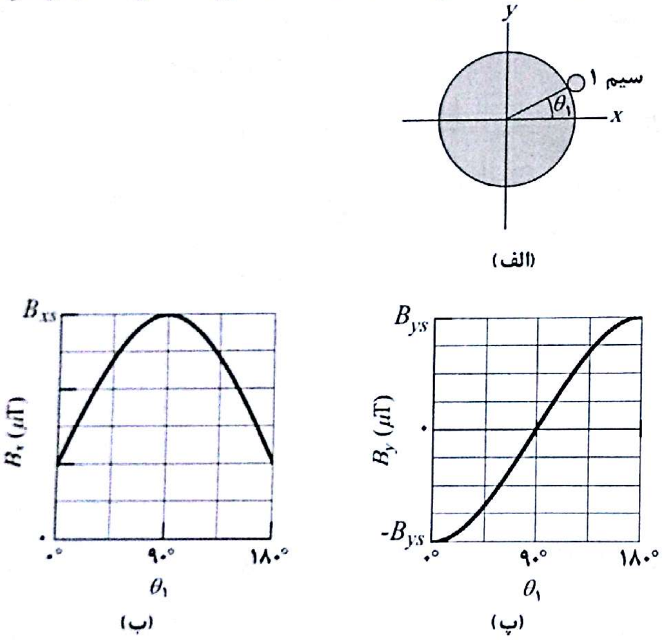
$$B_4 = \frac{\sqrt{2}\mu_0 i}{8\pi a}$$

در نتیجه میدان مغناطیسی کل در P برابر است با:

$$B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 i}{8\pi a} - \frac{2\sqrt{2}\mu_0 i}{16\pi a} = \frac{\sqrt{2}\mu_0 i}{8\pi a} = \frac{(\sqrt{2})(4\pi\times10^{-7})(13)}{(8\pi)(4.7\times10^{-2})} = 1.95\times10^{-5}\,T$$

به سمت داخل صفحه

۳۴- دو سیم دراز مستقیم و باریک با جریان، در برابر یک استوانهٔ پلاستیکی با طول مساوی و در شعاع $R = 20.0\,\text{cm}$ از محور مرکزی استوانه قرار دارند. شکل ۲۵-۶۲ الف مقطع استوانه و سیم ۱ را نشان می‌دهد ولی سیم ۲ نشان داده نشده است. وقتی سیم ۲ در جای خود ثابت است، سیم ۱ از زاویهٔ $\theta_1 = 0°$ تا زاویهٔ $\theta_1 = 180°$ در ربع اول دوم دستگاه مختصات xy دور استوانه حرکت می‌کند. میدان مغناطیسی خالص $\vec{B}$ در مرکز استوانه برحسب تابعی از θ_1 اندازه‌گیری می‌شود. شکل ۲۵-۶۲ ب مؤلفهٔ x این میدان یعنی B_x (مقیاس محور قائم با $B_{xs} = 6.0\,\mu T$ مشخص شده است) و شکل ۲۵-۶۲ پ مؤلفهٔ y این میدان یعنی B_y را (مقیاس محور قائم با $B_{ys} = 4.0\,\mu T$ مشخص شده است) برحسب تابعی از θ_1 نشان می‌دهند. (الف) سیم ۲ در چه زاویهٔ θ_2 واقع شده است؟ (ب) اندازه و (پ) جهت (به طرف داخل یا به طرف خارج صفحه) جریان در سیم ۱ و (ت) اندازه و (ث) جهت جریان در سیم ۲ را پیدا کنید.



شکل ۲۵-۶۲ مسئلهٔ ۳۴

حل: داریم

$$\theta_1 = 0 \Rightarrow B_x = 2\mu T,\ B_y = -4\mu T$$

$$\theta_1 = 90 \Rightarrow B_x = 6\mu T,\ B_y = 0$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi R},\ B_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi R}$$

(الف) وقتی سیم ۱ در زاویهٔ $\theta = \pm180°$ قرار دارد مؤلفهٔ y میدان مغناطیسی آن برابر با صفر است چون خط اثر محور y از

Scanned by CamScanner

سیم می‌گذرد. همچنین از نمودار ب دیده می‌شود که مؤلفهٔ y میدان برایند نیز در $\theta=۹۰^\circ$ برابر صفر است. لذا نتیجه می‌گیریم که سیم ۲ بسته به آنکه سیم ۱ در $\theta=+۹۰^\circ$ برابر صفر است. لذا نتیجه می‌گیریم که سیم ۲ بسته به آنکه سیم ۱ در $\theta=+۹۰^\circ$ یا $\theta=-۹۰^\circ$ باشد به ترتیب در $\theta=-۹۰^\circ$ و $\theta=+۹۰^\circ$ قرار دارد. نکته‌ای که باید به آن توجه کرد اینست که سیم ۲ درمکان خود ثابت شده است لذا سیم ۲ عملاً غیر از این دو مکان نمی‌تواند قرار داشته باشد و با توجه به حرکت پادساعتگرد سیم ۱، آن را در $\theta=-۹۰^\circ$ در نظر می‌گیریم.

(ب) از منحنی شکل ب در می‌یابیم که در $\theta=۹۰^\circ$ مؤلفه x میدان مغناطیسی برایند، $B_{net,x}$ دارای مقدار بیشینهٔ $۶\mu T$ است. همچنین دیده می‌شود که مؤلفهٔ x میدان مغناطیسی حاصل از سیم ۱ در $\theta=۰$ برابر با صفر است. بنابراین مؤلفه x میدان برایند فقط ناشی از سیم ۲ است و چون این ثابت است و حرکت نمی‌کند بنابراین سهم مؤلفهٔ x حاصل از میدان این سیم همواره برابر $۲\mu T$ است. به این ترتیب مؤلفهٔ x میدان مغناطیسی سیم ۱ در $\theta=۰$ برابر است با:

$$B_{۱x}=\frac{\mu_0 i_۱}{۲\pi R}\Rightarrow i_۱=\frac{۲\pi R B_{۱x}}{\mu_0}$$

$$i_۱=\frac{۲\pi(۰/۲m)(۴\times ۱۰^{-۶})}{۴\pi\times ۱۰^{-۷}}=۴A$$

(پ) از نمودار شکل ب دیده می‌شود که با افزایش $\theta_۱$ از ۰ تا ۹۰°، منحنی صعودی است، در نتیجه می‌توان گفت که جریان سیم ۱ رو به سمت خارج صفحه است و این در توافق با این واقعیت است که در $\theta_۱=۹۰^\circ$، $B_{net,y}$ صفر می‌شود.

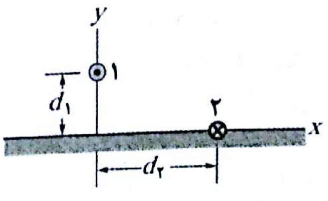
(ت) در قسمت (ب) دیدیم که $B_{۲x}=۲\mu T$ است، بنابراین جریان $i_۲$ برابر است با:

$$i_۲=\frac{۲\pi R B_{۲x}}{\mu_0}=\frac{۲\pi(۰/۲)(۲\times ۱۰^{-۶})}{۴\pi\times ۱۰^{-۷}}=۲A$$

(ث) با توجه به قاعده دست است جریان سیم ۲ رو به سمت داخل صفحه است.

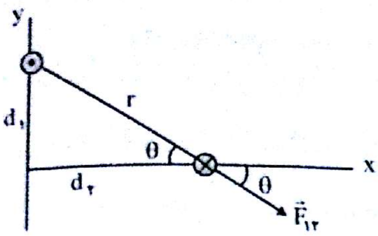
بخش ۲۵-۳ نیروی میان دو جریان موازی

●۳۵- شکل ۲۵-۶۳ مقطع سیم ۱ را نشان می‌دهد؛ سیم دراز و مستقیم است و جریان $۴/۰۰mA$ به طرف خارج صفحه از آن می‌گذرد که در فاصلهٔ $d_۱=۲/۴۰\ cm$ از سطح قرار دارد. سیم ۲ که موازی با سیم ۱ و هم‌چنین دراز است، در فاصلهٔ افقی $d_۲=۵/۰۰cm$ از سیم ۱ قرار دارد و حامل جریان $۶/۸۰\ mA$ به طرف داخل صفحه است. مؤلفهٔ x نیروی مغناطیسی بر یکای *طول* سیم ۲ ناشی از سیم ۱ چقدر است؟ **SSM**



شکل ۲۵-۶۳ مسئلهٔ ۳۵

حل:



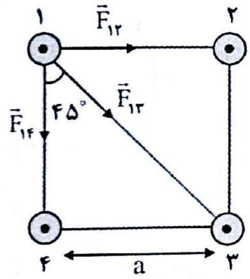
$$F_{۱۲x}=F_{۱۲}\cos\theta=\frac{\mu_0 i_۱ i_۲ L}{۲\pi r}\cdot\frac{d_۲}{r}$$

$$\frac{F_{۱۲x}}{L}=\frac{(۴\pi\times ۱۰^{-۷})(۴\times ۱۰^{-۳})(۶/۸\times ۱۰^{-۳})(۰/۰۵)}{۲\pi\left[(۰/۰۲۴)^۲+(۰/۰۵)^۲\right]}$$

$$=۸/۸۴\times ۱۰^{-۱۱}\ N/m$$

●●۳۶- در شکل ۲۵-۴۹، چهار سیم مستقیم دراز بر صفحه عمودند و مقاطع آنها مربعی به ضلع $a=۸/۵۰\ cm$ را تشکیل می‌دهند. هر سیم حامل جریان $۱۵/۰A$ است و جریانها به طرف خارج صفحه‌اند. نیروی مغناطیسی خالص *وارد* بر یک *متر از طول سیم را* که بر سیم ۱ وارد می‌شود، برحسب بردار یکه پیدا کنید.

حل:



$$F_{۱x}=F_{۱۲}+F_{۱۳}\sin ۴۵^\circ$$

$$=\frac{\mu_0 i^۲ L}{۲\pi a}+\frac{\mu_0 i^۲ L}{۲\pi a\sqrt{۲}}\cdot\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۳\mu_0 i^۲ L}{۴\pi a}$$

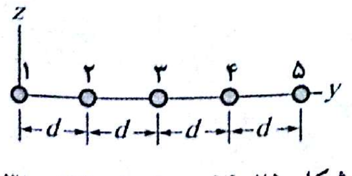
$$F_{۱y}=F_{۱۴}+F_{۱۳}\cos ۴۵=\frac{۳\mu_0 i^۲ L}{۴\pi a}$$

$$\vec{F}_۱=\vec{F}_{۱x}\hat{i}+F_{۱y}(-\hat{j})=\frac{۳\mu_0 i^۲ L}{۴\pi a}(\hat{i}-\hat{j})$$

$$\frac{\vec{F}_۱}{L}=\frac{۳(۴\pi\times ۱۰^{-۷})(۱۵)^۲}{۴\pi(۸/۵\times ۱۰^{-۲})}(\hat{i}-\hat{j})$$

$$=(۷/۹۴\times ۱۰^{-۲}\ N/m)\hat{i}-(۷/۹۴\times ۱۰^{-۲}\ N/m)\hat{j}$$

●●۳۷- در شکل ۲۵-۶۴، پنج سیم موازی دراز در صفحهٔ xy و به فاصلهٔ $d=۵۰/۰\ cm$ از یکدیگر قرار دارند. جریانها به طرف داخل صفحه‌اند و عبارت‌اند از $i_۱=۲/۰۰\ A$، $i_۳=۰/۲۵۰\ A$، $i_۴=۴/۰۰\ A$ و $i_۵=۲/۰۰\ A$. جریان به طرف خارج صفحه $i_۲=۴/۰۰A$ است. بزرگی نیروی خالص بر یکای *طول* وارد بر سیم ۳ ناشی از جریانها در سیمهای دیگر چقدر است؟



شکل ۲۵-۶۴ مسئله‌های ۳۷ و ۳۸

Scanned by CamScanner

حل: به جز سیم ۲ جهت جریان همه سیمها به سمت داخل صفحه است. بنابراین سیم ۳ همه سیمها به جز سیم ۲، را جذب می‌کند. در نتیجه داریم

$$\frac{\vec{F}}{L}=\frac{\mu_0 i_3}{2\pi}\left(-\frac{i_1}{2d}+\frac{i_2}{d}+\frac{i_4}{d}+\frac{i_5}{2d}\right)\hat{j}$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت

$$\frac{\vec{F}}{L}=8\times10^{-7}\,\hat{j}\ \text{N/m}$$

۳۸●●- در شکل ۲۵-۶۴، پنج سیم موازی دراز در صفحه xy به فاصلهٔ $d=8/00\text{cm}$ از یکدیگر قرار دارند. طول سیمها $10/0\,\text{m}$ است و حامل جریانهای یکسان $3/00\,\text{A}$ به طرف خارج صفحه‌اند. به هر سیم نیروی مغناطیسی ناشی از سیمهای دیگر اثر می‌کند. نیروی مغناطیسی خالص وارد بر (الف) سیم ۱، (ب) سیم ۲، (پ) سیم ۳، (ت) سیم ۴ و (ث) سیم ۵ را برحسب بردار یکه پیدا کنید.

حل: نیرویی که سیم ۱ به سیم ۲ وارد می‌کند.

$$F_{12}=\frac{\mu_0 i_1 i_2 L_2}{2\pi r_{12}}=\frac{(4\pi\times10^{-7})(9)(10)}{(2\pi)(8\times10^{-2})}=2/25\times10^{-4}\ \text{N}$$

و به همین ترتیب داریم:

$$F_{13}=\frac{(4\pi\times10^{-7})(9)(10)}{(2\pi)(16\times10^{-2})}=1/25\times10^{-4}\ \text{N}$$

$$F_{14}=\frac{(4\pi\times10^{-7})(9)(10)}{(2\pi)(24\times10^{-2})}=0/75\times10^{-4}\ \text{N}$$

$$F_{15}=\frac{(4\pi\times10^{-7})(9)(10)}{(2\pi)(32\times10^{-2})}=0/563\times10^{-4}\ \text{N}$$

الف) سیم ۱: تمام نیروها جاذبه‌ای و در جهت مثبت محور y هستند.

$$\vec{F}_1=\vec{F}_{12}+\vec{F}_{13}+\vec{F}_{14}+\vec{F}_{15}=4/69\,\hat{j}\ \text{N}$$

ب) سیم ۲: نیروی $\vec{F}_{12}$ و نیروی $\vec{F}_{32}$ یکدیگر را خنثی می‌کنند.

$$\vec{F}_2=\vec{F}_{42}+\vec{F}_{52}=1/125\times10^{-4}\,\hat{j}+0/75\times10^{-4}\,\hat{j}$$
$$=1/88\times10^{-4}\ \text{N}$$

پ) سیم ۳: نیروی $\vec{F}_{13}$ و $\vec{F}_{53}$ و نیز نیروهای $\vec{F}_{23}$ و $\vec{F}_{43}$ یکدیگر را خنثی می‌کنند.

$$\vec{F}_3=0$$

ت) سیم ۴: نیروی $\vec{F}_{34}$ و $\vec{F}_{54}$ یکدیگر را خنثی می‌کنند.

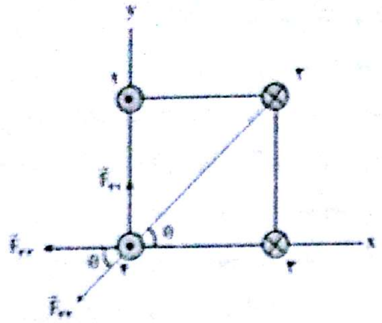
$$\vec{F}_4=-\vec{F}_2=-1/88\,\hat{j}\ \text{N}$$

ث) سیم ۵:

$$\vec{F}_5=-\vec{F}_1=-4/69\,\hat{j}\ \text{N}$$

۳۹●●- در شکل ۲۵-۴۹، چهار سیم مستقیم دراز بر صفحه عمودند و مقاطع آنها مربعی به ضلع $a=13/5\,\text{cm}$ را تشکیل می‌دهند. هر سیم حامل جریان $7/50\,\text{A}$ است و جریانها در سیمهای ۱ و ۴ به طرف داخل صفحه و در سیمهای ۲ و ۳ به طرف خارج صفحه‌اند. نیروی مغناطیسی خالص وارد بر هر متر از طول سیم ۴ را برحسب بردار یکه پیدا کنید.

حل:

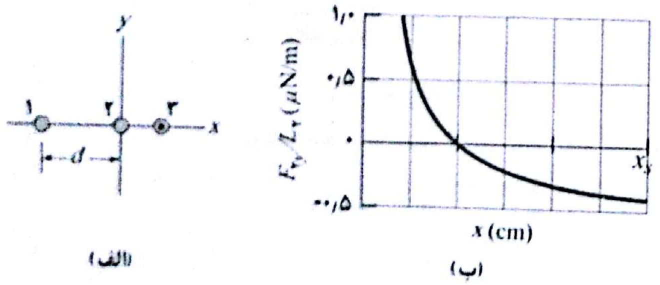


$$\vec{F}_4=\vec{F}_{41}+\vec{F}_{42}+\vec{F}_{43}$$
$$F_{4x}=F_{42}-F_{43}\cos\theta$$
$$=-\frac{\mu_0 i^2 L}{2\pi a}-\frac{\mu_0 i^2 L}{2\pi\sqrt{2}a}\cos45^\circ=-\frac{3\mu_0 i^2 L}{4\pi a}$$
$$F_{4y}=F_{41}-F_{43}\sin\theta=\frac{\mu_0 i^2 L}{2\pi a}-\frac{\mu_0 i^2 L}{2\pi\sqrt{2}a}\sin45^\circ=\frac{\mu_0 i^2 L}{4\pi a}$$
$$\vec{F}_4=-\frac{3\mu_0 i^2 L}{4\pi a}\hat{i}+\frac{\mu_0 i^2 L}{4\pi a}\hat{j}$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت:

$$\frac{\vec{F}_4}{L}=(-125\hat{i}+41/5\hat{j})\mu\ \text{N/m}$$

۴۰●●- شکل ۲۵-۶۵ الف، مقطع سه سیم حامل جریان دراز، مستقیم و موازی با یکدیگر را نشان می‌دهد. سیمهای ۱ و ۲ روی محور x و به فاصلهٔ d از یکدیگر قرار دارند. سیم ۱ حامل جریان $0/750\,\text{A}$ است ولی جهت جریان در آن معلوم نیست. سیم ۳ با جریان $0/250\,\text{A}$ به طرف بیرون صفحه است و می‌تواند در امتداد محور x به سمت راست سیم ۲ حرکت کند. وقتی سیم ۳ حرکت کند، بزرگی نیروی مغناطیسی خالص $\vec{F}_2$ وارد بر سیم ۲ ناشی از جریانهای سیمهای ۱ و ۳ تغییر می‌کند. مؤلفهٔ y این نیرو F_{2y} و مقدار آن به ازای یکای طول سیم ۲ برابر F_{2y}/L_2 است. شکل ۲۵-۶۵ ب، مقدار F_{2y}/L_2 را برحسب مکان x سیم ۳ به دست می‌دهد. نمودار وقتی که $x\to\infty$ میل کند مجانبی به صورت $F_{2y}/L_2=-0/627\mu\text{N/m}$ دارد. مقیاس محور افقی با $x_s=12/0\,\text{cm}$ مشخص شده است. (الف) اندازه و (ب) جهت (به طرف داخل یا به طرف خارج صفحه) جریان در سیم ۲ را پیدا کنید.



شکل ۲۵-۶۵ مسئلهٔ ۴۰

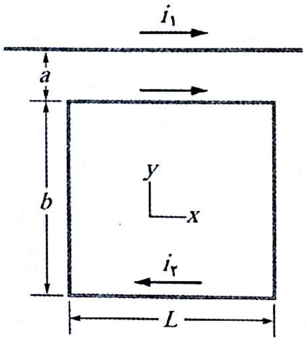
Scanned by CamScanner

حل: (الف) و (ب) با توجه به نمودار شکل ب مشاهده می‌شود که منحنی نیروی وارد بر سیم ۲ از صفر می‌گذرد لذا می‌توان نتیجه گرفت که سیم‌های ۱ و ۳ نیروهایی در جهت مخالف بر سیم ۲ وارد می‌کنند. بنابراین جهت جریان در سیم ۱ باید به سمت خارج صفحه باشد. وقتی سیم ۳ بسیار دور شود دیگر نیرویی بر سیم ۲ وارد نمی‌کند لذا در این حالت تنها نیرویی که به سیم ۲ وارد می‌شود از طرف سیم ۱ است. با توجه به نمودار در $x = 4\,\text{cm}$ نیروی وارد بر سیم ۲ صفر است یعنی در این وضعیت داریم

$$\frac{F_{21}}{L_2} = \frac{F_{24}}{L_2} \Rightarrow 0/627\times10^{-6} = \frac{(4\pi\times10^{-7})(0/25)i_2}{2\pi(4\times10^{-2})}$$
$$\Rightarrow i_2 = 0/5$$

همانطور که بحث جهت آن به سمت خارج صفحه است.

۴۱●●●- در شکل ۲۵-۶۶، سیم دراز مستقیمی حامل جریان $i_1 = 30/0\,\text{A}$ و حلقهٔ مستطیل‌شکل حامل جریان $i_2 = 20/0\,\text{A}$ است. فرض کنید $a = 1/00\,\text{cm}$ ، $b = 8/00\,\text{cm}$ و $L = 30/0\,\text{cm}$. نیروی خالص وارد بر حلقه ناشی از i_1 برحسب بردار یکه را پیدا کنید. **ILW**



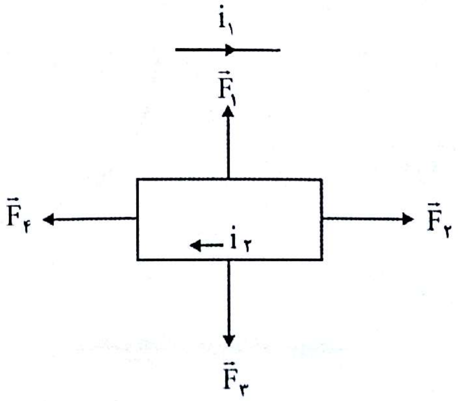
شکل ۲۵-۶۶ مسئلهٔ ۴۱

حل: نیروهای $\vec{F}_2$ و $\vec{F}_4$ از نظر بزرگی برابرند لذا همدیگر را خنثی می‌کنند و تنها باید برآیند نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_3$ را محاسبه کرد.

$$\vec{F}_{net} = (\vec{F}_1 - \vec{F}_3)\hat{j} = \left[\frac{\mu_0 i_1 i_2 L}{2\pi a} - \frac{\mu_0 i_1 i_2 L}{2\pi(a+b)}\right]\hat{j}$$

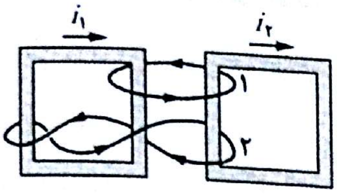
که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت:

$$\vec{F}_{net} = 3/2\times10^{-3}\,\hat{j}\,\text{N}$$



بخش ۲۵-۴ قانون آمپر

۴۲●- شکل ۲۵-۶۷ دو مسیر بستهٔ پیچیده شده به دور دو حلقهٔ رسانا حامل جریانهای $i_1 = 5/0\,\text{A}$ و $i_2 = 3/0\,\text{A}$ را نشان می‌دهد. مقدار انتگرال $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}$ در (الف) مسیر ۱ و (ب) مسیر ۲ چقدر است؟

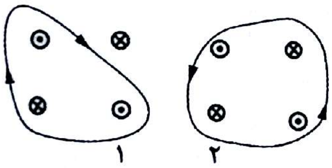


شکل ۲۵-۶۷ مسئلهٔ ۴۲

حل: (الف)
$$\oint_1 \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0(i_2 - i_1) = (4\pi\times10^{-7})(3-5) = -2/51\times10^{-6}\,\text{T}\cdot\text{m}$$

(ب)
$$\oint_2 \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0(-i_2 - i_1 - i_1) = (4\pi\times10^{-7})(-3-5-5) = -1/63\times10^{-5}\,\text{T}\cdot\text{m}$$

۴۳●- از هر یک از هشت رسانای شکل ۲۵-۶۸ جریان ۲/۰A به طرف داخل یا به طرف خارج صفحه می‌گذرد. دو مسیر برای انتگرال خطی $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}$ نشان داده شده است. مقدار این انتگرال در (الف) مسیر ۱ و (ب) مسیر ۲ چقدر است؟ **SSM**



شکل ۲۵-۶۸ مسئلهٔ ۴۳

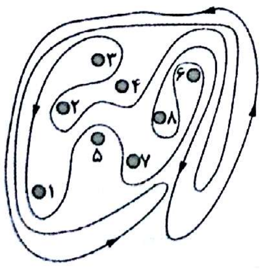
حل: (الف) در مسیر ۱ جهت انتگرال‌گیری ساعتگرد است

$$\oint_1 \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{enc} = \mu_0(-2i + i) - \mu_0 i$$
$$= -(4\pi\times10^{-7})(2) = -2/51\times10^{-6}\,\text{T}\cdot\text{m}$$

(ب) جریان محصور شده در مسیر ۲ برابر صفر است، دو جریان به سمت خارج و دو جریان به سمت داخل صفحه است، لذا داریم

$$\oint_2 \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{enc} = 0$$

۴۴●- در شکل ۲۵-۶۹ هشت سیم در نقطه‌های نشان داده شده به طور عمودی از صفحه عبور کرده‌اند. سیم با عدد k $(k = 1,2,\ldots,8)$ حامل جریان ki است که $ki = 4/50\,\text{mA}$. در مورد سیمهای با k فرد، جریان به طرف خارج صفحه و در مورد k زوج جریان به طرف داخل صفحه است. $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}$ را در طول مسیر بسته در جهت نشان داده شده محاسبه کنید.



شکل ۲۵-۶۹ مسئلهٔ ۴۴

Scanned by CamScanner

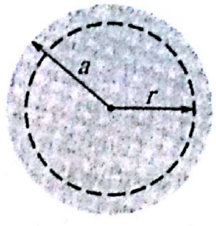
حل:

$$\oint \vec{B}.\vec{ds} = \mu_۰ i_{enc} = \mu_۰(i_۱ + i_۳ + i_۷ + i_۶) = \mu_۰(i + ۳i + ۷i - ۶i)$$

$$= ۵\mu_۰ i = (۵)(۴\pi \times ۱۰^{-۷})(۴/۵ \times ۱۰^{-۳})$$

$$= ۲/۸۳ \times ۱۰^{-۸}\ \mathrm{T \cdot m}$$

۴۵●- شکل ۲۵-۷۰ مقطع قطری یک استوانهٔ رسانای دراز به شعاع $a = ۲/۰۰\,\mathrm{cm}$ را که حامل جریان یکنواخت $۱۷۰\ \mathrm{A}$ است نشان می‌دهد. بزرگی میدان مغناطیسی جریان در فاصلهٔ شعاعی (الف) ۰، (ب) $۱/۰۰\mathrm{cm}$، (پ) $۲/۰۰\mathrm{cm}$ (سطح سیم) و (ت) $۴/۰۰\mathrm{cm}$ چقدر است؟



شکل ۲۵-۷۰ مسئلهٔ ۴۵

حل: میدان داخل سیم از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{ds} = \mu_۰ i_{enc} = \mu_۰ \frac{i\pi r^۲}{\pi a^۲} \Rightarrow B_{in} = \frac{\mu_۰ i r}{۲\pi a^۲} \qquad r < a$$

میدان خارج سیم نیز از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{ds} = \mu_۰ i_{enc} \Rightarrow B_{out} = \frac{\mu_۰ i}{۲\pi r} \qquad r > a$$

(الف) برای $r < a$ و به ازای $r = ۰$ داریم $B_{in} = ۰$

(ب) برای $r < a$ و به ازای $r = ۰/۰۱\mathrm{m}$ با قرار دادن سایر مقادیر داده شده داریم

$$B_{in} = ۸/۵ \times ۱۰^{-۴}\ \mathrm{T}$$

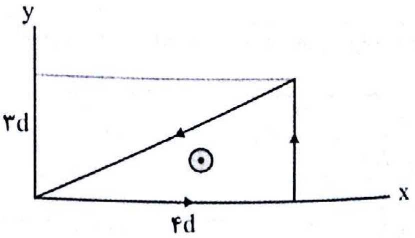
(پ) برای $r = a = ۰/۲\mathrm{m}$ داریم $B_{out} = B_{in} = \frac{\mu_۰ i}{۲\pi a}$ که با قرار دادن مقادیر داده شده پاسخ $۱/۷ \times ۱۰^{-۴}\ \mathrm{T}$ به دست می‌آید.

(ت) برای $r > a$ و به ازای $r = ۰/۰۴\mathrm{m}$ با قرار دادن مقادیر داده شده داریم

$$B_{out} = ۸/۵ \times ۱۰^{-۴}\ \mathrm{T}$$

۴۶- در یک ناحیهٔ خاص چگالی جریان یکنواخت $۱۵\mathrm{A/m^۲}$ و در جهت مثبت z وجود دارد. وقتی انتگرال خطی در طول سه قطعه خط مستقیم از مختصات (x,y,z) برابر با $(۴d,۰,۰)$ تا $(۴d,۳d,۰)$، تا $(۰,۰,۰)$ و تا $(۴d,۰,۰)$ محاسبه شود مقدار $\oint \vec{B} \cdot \vec{ds}$ چقدر است؟ $d = ۲۰\ \mathrm{cm}$ است.

حل: مسیر انتگرال‌گیری به صورت زیر است:



مساحت محصور در حلقه برابر است با:

$$A = \frac{۱}{۲}(۴d)(۳d) = ۶d = ۶(۰/۲)^۲ = ۰/۲۴\,\mathrm{m^۲}$$

از قانون آمپر داریم:

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{ds} = \mu_۰ i = \mu_۰ jA$$

$$= (۴\pi \times ۱۰^{-۷})(۱۵)(۰/۲۴) = ۴/۵۲ \times ۱۰^{-۶}\ \mathrm{T \cdot m}$$

۴۷●●- چگالی جریان $\vec{J}$ داخل یک سیم استوانه‌ای توپر دراز به شعاع $a = ۳/۱\,\mathrm{mm}$ در جهت محور مرکزی است و مقدار آن به طور خطی با فاصلهٔ شعاعی r از محور مطابق با $J = J_۰ r/a$ تغییر می‌کند، که در آن $J_۰ = ۳۱۰\ \mathrm{A/m^۲}$ است. بزرگی میدان مغناطیسی را در (الف) $r = ۰$ و (ب) $r = a/۲$ و (پ) $r = a$ به دست آورید. ILW

حل: حلقه آمپری را به شعاع r < a داخل سیم در نظر می‌گیریم

$$\oint \vec{B}\vec{ds} = \mu_۰ i_{enc} = \mu_۰ \int \vec{j}.\vec{dA} = \mu_۰ \int_۰^r j_۰\left(\frac{r}{a}\right)(۲\pi r dr)$$

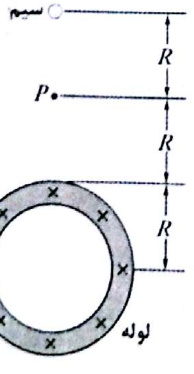
$$\Rightarrow B۲\pi r = \mu_۰ \frac{۲\pi j}{۳a} r^۳ \Rightarrow B = \frac{\mu_۰ j_۰ r^۲}{۳a}$$

(الف) به ازای $r = ۰$، $B = ۰$ است.

(ب) به ازای $r = \frac{a}{۲}$ و قرار دادن مقادیر داده شده داریم $B = ۱ \times ۱۰^{-۷}\ \mathrm{T}$.

(پ) به ازای r=a خواهیم داشت $B = ۴ \times ۱۰^{-۷}\ \mathrm{T}$.

۴۸●●- در شکل ۲۵-۷۱ یک لولهٔ دایره‌ای دراز با شعاع خارجی $R = ۲/۶\mathrm{cm}$ حامل جریان (توزیع شده به طور یکنواخت) $i = ۸/۰۰\mathrm{mA}$ به طرف داخل صفحه است. سیمی در فاصلهٔ $۳/۰۰R$ از مرکز تا مرکز موازی با لوله قرار دارد. (الف) بزرگی و (ب) جهت (به طرف داخل یا به طرف خارج صفحه) جریان در سیم را پیدا کنید به طوری که مقدار میدان مغناطیسی خالص در نقطهٔ P دارای همان مقدار میدان مغناطیسی خالص در مرکز لوله ولی در جهت مخالف باشد.



شکل ۲۵-۷۱ مسئلهٔ ۴۸

حل: (الف) و (ب) میدان در مرکز استوانه فقط میدان ناشی از سیم است و میدان ناشی از لوله صفر است

$$B = \frac{\mu_۰ i_۲}{۲\pi r} = \frac{\mu_۰ i_۲}{۲\pi(۳R)} = \frac{\mu_۰ i_۲}{۶\pi R}$$

در نقطه P میدان ناشی از سیم و لوله برابر مقدار بالا ولی خلاف جهت آن است. میدان ناشی از سیم در P قوی‌تر از

Scanned by CamScanner

میدان در مرکز استوانه است. بنابراین جریان سیم نیز به سمت داخل صفحه است.

$$B=\frac{\mu_0 i_2}{6\pi r}=\frac{\mu_0 i}{2\pi(2R)}=\frac{\mu_0 i_2}{2\pi R}\Rightarrow\frac{i_2}{6}=\frac{i}{4}-\frac{i_2}{2}$$

$$\Rightarrow i_2=\frac{3}{8}i=\left(\frac{3}{8}\right)(8\times10^{-3})=3\times10^{-3}\ \text{A}$$

بخش ۲۵-۵ سیملوله و چنبره

●۴۹- سیملوله‌ای با ۲۰۰ دور به طول ۲۵cm و قطر ۱۰cm حامل جریان ۰/۲۹ A است. بزرگی میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را داخل سیملوله محاسبه کنید.

حل:

$$B=\mu_0 ni=\mu_0\left(\frac{N}{L}\right)i=(4\pi\times10^{-7})\left(\frac{200}{0.25}\right)(0.3)\text{A}$$
$$=0.0003T=0.3\ \text{mT}$$

●۵۰- سیملوله‌ای به طول ۱/۳۰ m و قطر ۲/۶۰ cm حامل جریان ۱۸/۰ A است. میدان مغناطیسی داخل سیملوله ۲۳/۰ mT است. طول سیمی را که سیملوله از آن ساخته شده است به دست آورید.

حل: $$B=\mu_0 ni=\mu_0\frac{N}{\ell}i\Rightarrow N=\frac{B\ell}{\mu_0 i}$$

طول کلی سیم برابر خواهد بود با:

$$L=2\pi r N=\frac{2\pi r B\ell}{\mu_0 i}$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده داریم $L=108\text{m}$.

●۵۱- طول ضلع مقطع مربعی شکل یک چنبره ۵/۰۰cm و شعاع داخلی آن ۱۵/۰ cm و با ۵۰۰ دور حامل جریان ۰/۸۰۰A است. (این سیملولهٔ مربعی شکل، به جای سیملولهٔ گرد در شکل ۲۵-۱۷، به شکل دونات درآمده است). میدان مغناطیسی داخل چنبره در (الف) فاصلهٔ شعاع داخلی و (ب) در فاصلهٔ شعاع خارجی، چقدر است؟

حل: میدان درون یک چنبره از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\oint\vec{B}.\vec{dl}=\mu_0 i_{inc}=\mu_0 N i\Rightarrow B(2\pi r)=\mu_0 N i\Rightarrow B=\frac{\mu_0 N i}{2\pi r}$$

(الف) برای شعاع داخلی $r=a=0.15m$، داریم

$$B=\frac{(4\pi\times10^{-7})(500)(0.8)}{2\pi(0.2)}=5.53\times10^{-4}\ \text{T}$$

(ب) برای شعاع خارجی $r=b=0.2\text{m}$

$$B=\frac{(4\pi\times10^{-7})(500)(0.8)}{2\pi(0.2)}=4\times10^{-4}\ \text{T}$$

●۵۲- سیملوله‌ای به طول ۹۵/۰cm و شعاع ۲/۰۰cm دارای ۱۲۰۰ دور و حامل جریان ۳/۶۰ A است. بزرگی میدان مغناطیسی را داخل سیملوله محاسبه کنید.

حل:

$$B=\mu_0 in=\mu_0\left(\frac{N}{L}\right)i=(4\pi\times10^{-7})\left(\frac{1200}{0.95}\right)(3.6)$$
$$=5.71\times10^{-3}\ \text{T}=5.71\ \text{mT}$$

●●۵۳- سیملولهٔ درازی با ۱۰/۰ دور /cm و شعاع ۷/۰۰cm حامل جریان ۲۰/۰mA است. در رسانای مستقیمی واقع در امتداد محور مرکزی سیملوله جریان ۶/۰۰A برقرار است. (الف) در چه فاصلهٔ شعاعی از محور جهت میدان مغناطیسی ایجاد شده در ۴۵/۰° نسبت به جهت محوری خواهد بود؟ (ب) بزرگی میدان مغناطیسی در آنجا چقدر است؟

WWW ILW SSM

حل: (الف) میدان مغناطیسی سیملوله، $\vec{B}_1$، درامتداد محور سیملوله است. میدان مغناطیسی حاصل از سیمی که روی محور سیموله قرار دارد، $\vec{B}_2$، عمود بر محور یا در واقع عمود بر $\vec{B}_1$ است. وقتی که زاویه میدان مغناطیسی برآیند با محور سیموله برابر ۴۵° است، بدیهی است که زاویه این میدان با $\vec{B}_1$ نیز برابر با ۴۵° است و برای انجام این امر کافی است که بزرگی‌های $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$ با هم برابر باشند:

$$\mu_0 i_1 n=\frac{\mu_0 i_2}{2\pi d}$$

که d فاصله محور تا نقطه موردنظر است و با توجه به اینکه i_1 جریان سیملوله و i_2 جریان سیم است می‌توان d را از رابطه زیر به دست آورد

$$d=\frac{i_2}{2\pi i_1\pi}=\frac{6}{2\pi(2\times10^{-3})(10)}=4.77\text{cm}$$

(ب) بزرگی میدان مغناطیسی برآیند برابر است با:

$$B=\sqrt{B_1^2+B_2^2}=\sqrt{2}B_1=\sqrt{2}\mu_0 i_1 n$$
$$=\sqrt{2}(4\pi\times10^{-7})(20\times10^{-3})(10)=3.55\times10^{-5}\ \text{T}$$

●●●۵۴- الکترونی به طرف یک انتهای سیملوله‌ای پرتاب می‌شود. وقتی که الکترون وارد میدان مغناطیسی یکنواخت داخل سیملوله می‌شود، دارای تندی ۸۰۰ m/s است و بردار سرعت آن با محور مرکزی سیملوله زاویهٔ ۳۰° می‌سازد. تعداد دورهای سیملوله در طول آن ۸۰۰۰ و حامل جریان ۴/۰A است. الکترون داخل سیملوله تا زمان خارج شدن از انتهای مقابل، در طول مسیر مارپیچی چند دور می‌چرخد؟ (در یک سیملولهٔ واقعی، که میدان در دو انتها یکنواخت نیست، تعداد دورها اندکی کمتر از پاسخی است که در اینجا به دست می‌آید.)

حل: سرعت الکترون به دو مؤلفه تجزیه می‌شود، یکی در جهت محور سیملوله و دیگری عمود بر آن، یعنی داریم

$$v_{\parallel}=v\cos30^\circ=(800)\cos30^\circ=692.8\ \text{m/s}$$
$$v_{\perp}=v\sin30^\circ=(800)\sin30^\circ=400\text{m/s}$$

حال زمان تناوب T را می‌توان محاسبه کرد:

$$F=\frac{mv_{\perp}^2}{r}=qv_{\perp}B\Rightarrow mr\omega^2=qr\omega B$$

Scanned by CamScanner

$$qB = m\omega = m\frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi m}{qB}$$

اگر طول سیملوله L باشد، زمان لازم برای عبور از سیملوله برابر است با:

$$L = v_{11}t \Rightarrow t = \frac{L}{v_{11}}$$

تعداد گردش‌های الکترون چنین است:

$$N_0 = \frac{t}{T} = \frac{\frac{L}{v_{11}}}{\frac{2\pi m}{qB}} = \frac{LqB}{2\pi m V_{11}}$$

که در آن $B = \mu_0\left(\frac{N}{L}\right)i$ میدان سیملوله است و با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت

$$N_0 = 1/62\times10^{6}$$

●●۵۵- سیملولهٔ درازی با ۱۰۰ دور/cm حامل جریان i است. الکترونی در داخل سیملوله در دایره‌ای به شعاع ۲/۳۰cm عمود بر محور سیملوله حرکت می‌کند. تندی الکترون $0/0460\,c$ (تندی نور = c) است. جریان i در سیملوله را به دست آورید.

حل: ابتدا B را به دست می‌آوریم. داریم

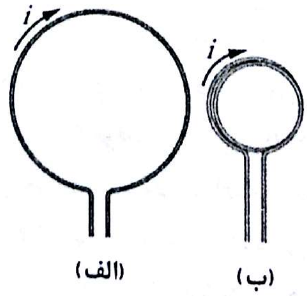
$$F = m\frac{v^2}{r} = qVB \Rightarrow B = \frac{mv}{qr}$$

$$B = \frac{(9/1\times10^{-31})(0/0460\times3\times10^{8})}{(1/6\times10^{-19})(2/3\times10^{-2})} = 3/4\times10^{-4}\ \text{T}$$

حال می‌توان جریان را از رابطه میدان برای سیملوله به دست آورد

بخش ۲۵-۶ پیچهٔ حامل جریان به عنوان دو قطبی مغناطیسی

●۵۶- شکل ۲۵-۷۲ الف طولی از یک سیم حامل جریان i را نشان می‌دهد که به صورت پیچه دایره‌ای با یک دور درآمده است. در شکل ۲۵-۷۲ ب همان طول از سیم به صورت پیچه‌ای با دو دور و نصف شعاع اولیه خم شده است. (الف) اگر B_a و B_b بزرگیهای میدانهای مغناطیسی در مرکز دو پیچه باشند، نسبت B_b/B_a چقدر است؟ (ب) نسبت بزرگیهای گشتاور دو قطبی پیچه‌ها μ_b/μ_a چقدر است؟



شکل ۲۵-۷۲ مسئلهٔ ۵۶

حل: (الف) میدان در مرکز پیچه با شعاع R و تعداد N حلقه، برابر است با $B = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi R}$

در اینجا در حالت الف یک حلقه و در حالت ب دو حلقه داریم لذا:

$$\frac{B_b}{B_a} = \frac{2\frac{1}{R_b}}{\frac{1}{R_a}} = \frac{2R_a}{R_b} = 4$$

(ب) نسبت گشتاورهای دو قطبی چنین می‌شود:

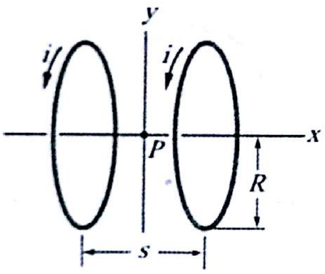
$$\frac{\mu_b}{\mu_a} = \frac{2iA_b}{iA_a} = \frac{2R_b^2}{R_a^2} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} = 0/5$$

●۵۷- بزرگی گشتاور دو قطبی مغناطیسی $\vec{\mu}$ در سیملولهٔ مسئلهٔ ۴۹ چقدر است؟ SSM

حل:

$$\mu = NiA = Ni(\pi r^2) = (200)(0/3)\pi(0/05)^2 = 0/47\ \text{A}\cdot\text{m}^2$$

●۵۸- شکل ۲۵-۷۳ آرایشی به نام پیچهٔ هلمهولتز[1] را نشان می‌دهد. این وسیله شامل دو پیچهٔ دایره‌ای هم محور هر یک دارای ۲۰۰ دور و شعاع $R = 25/0$ cm است که به فاصلهٔ $S = R$ از هم قرار دارند. این دو پیچه حامل جریان مساوی $i = 12/2$ mA در یک جهت‌اند. بزرگی میدان مغناطیسی را در P، وسط فاصلهٔ دو پیچه به دست آورید.



شکل ۲۵-۷۳ مسئلهٔ ۵۸ و ۸۶

حل: میدان مغناطیسی یک پیچهٔ جریان در نقطه‌ای به فاصلهٔ z از مرکز آن با معادله زیر داده می‌شود

$$B = \frac{N\mu_0 iR^2}{2(R^2+z)^{\frac{3}{2}}}$$

میدان هر دو پیچه در نقطهٔ P در جهت محور x است و در این نقطه که $z = \frac{R}{2}$ است اندازه آنها نیز با هم برابر است لذا داریم

$$B = 2\left[\frac{N\mu_0 iR^2}{2(R^2+z)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده، $B = 8/75\times10^{-6}$ T به دست می‌آید.

●۵۹- دانشجویی با پیچیدن ۳۰۰ دور سیم به دور یک استوانهٔ چوبی به قطر $d = 5/0$ cm یک آهنربای الکتریکی کوتاه ساخته است. این پیچه به یک باتری که ۴/۰A جریان در سیم ایجاد می‌کند بسته شده است. (الف) بزرگی گشتاور دو قطبی مغناطیسی این وسیله چقدر است؟ (ب) در چه فاصلهٔ محوری

Scanned by CamScanner

$z \gg d$ میدان مغناطیسی این دو قطبی $۵/۰\,\mu\text{T}$ است (تقریباً یک دهم میدان مغناطیسی زمین)؟ **SSM**

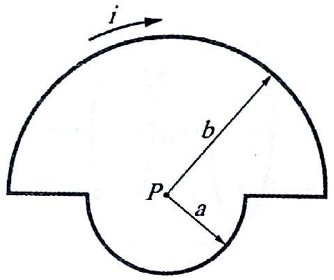
حل: (الف) $\mu = NiA = Ni(\pi R^۲) = (۳۰۰)(۴)\pi(۲/۵\times۱۰^{-۲})^۲$

$= ۲/۳۶\ \text{A}\cdot\text{m}^۲$

(ب) میدان مغناطیسی روی محور یک دو قطبی مغناطیسی به فاصله $Z >> R$ از رابطه $B = \dfrac{\mu_۰}{۲\pi}\dfrac{\mu}{Z^۳}$ به دست می‌آید که با استفاده از آن می‌توان نوشت

$$Z = \left(\frac{\mu_۰\mu}{۲\pi B}\right)^{\frac{۱}{۳}} = \left[\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})}{۲\pi(۵\times۱۰^{-۶})}\right]^{\frac{۱}{۳}} = ۰/۴۶\,\text{m}$$

۶۰●●- در شکل ۲۵-۷۴ جریان $i = ۵۶/۲\ \text{mA}$ در حلقه‌ای شامل دو طول شعاعی و دو نیمدایره به شعاعهای $a = ۵/۷۲\,\text{cm}$ و $b = ۹/۳۶\text{cm}$ با مرکز مشترک P برقرار شده است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (به طرف داخل یا به طرف خارج صفحه) میدان مغناطیسی در P و (پ) بزرگی و (ت) جهت گشتاور دو قطبی مغناطیسی حلقه را پیدا کنید.



شکل ۲۵-۷۴ مسئلهٔ ۶۰

حل: (الف) و (ب) میدان در مرکز یک کمان حامل جریان از رابطه $B = \dfrac{\mu_۰ iB}{۴R}$ به دست می‌آید. در اینجا دو نیمدایره دایره $(\theta = \pi)$ داریم و میدان هر دو نیمدایره در نقطه P طبق قاعده دست راست به سمت داخل صفحه است و میدان دو تیکه سیم مستقیم نیز در نقطه P صفر است زیرا امتداد آنها از نقطه P می‌گذرند. به این ترتیب داریم

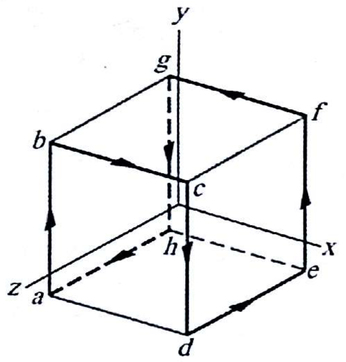
$$B_p = \frac{\mu_۰ i}{۴b} + \frac{\mu_۰ i}{۴a} = \frac{\mu_۰ i}{۴}\left(\frac{a+b}{ab}\right)$$
$$= \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۵۶/۲\times۱۰^{-۳})}{۴}\cdot\frac{(۵/۷۲+۹/۳۶)\times۱۰^{-۲}}{(۵/۷۲)(۹/۳۶)\times۱۰^{-۴}}$$
$$= ۴/۹۷\times۱۰^{-۷}\ \text{T}$$

(پ) $$\mu = iA = i\left(\frac{۱}{۲}\pi b^۲ + \frac{۱}{۲}\pi a^۲\right) = \frac{i\pi}{۲}(b^۲ + a^۲)$$

$$\mu = \frac{(۵۶/۲\times۱۰^{-۳})}{۲}\left[(۹/۳۶)^۲ + (۵/۷۲)^۲\right]\times۱۰^{-۴}$$
$$= ۱/۰۶\times۱۰^{-۳}\ \text{A}\cdot\text{m}^۲$$

(ت) جهت $\vec{\mu}$ در همان جهت $\vec{B}$ و به سمت داخل صفحه است.

۶۱●●- در شکل ۲۵-۷۵ رسانایی حامل $۶/۰\text{A}$ در طول مسیر بستهٔ $abcdefgha$ یعنی ۸ ضلع از ۱۲ ضلع مکعبی به ضلع ۱۰ cm است. (الف) با در نظر گرفتن مسیر به صورت سه حلقهٔ مربع ($bcfgb$، $abgha$ و $cdefc$)، گشتاور مغناطیسی خالص مسیر را برحسب بردار یکه به دست آورید. (ب) بزرگی میدان مغناطیسی خالص در مختصات xyz $(۰, ۵/۰\,\text{m}, ۰)$ چقدر است؟



شکل ۲۵-۷۵ مسئلهٔ ۶۱

حل:

(الف) برای مسیر befgb

$\vec{\mu}_۱ = ia^۲\hat{\text{j}}$

برای مسیر abgha

$\mu_۲ = -ia^۲\hat{\text{i}}$

برای مسیر cdefc

$\vec{\mu}_۳ = ia\hat{\text{i}}$

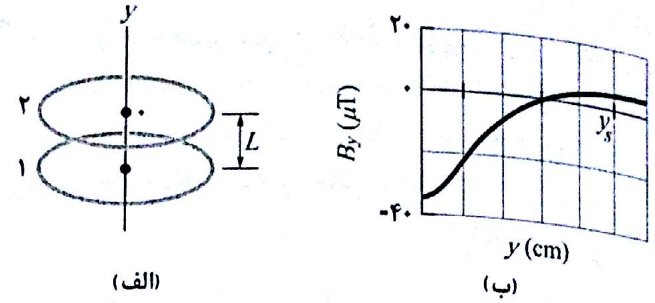
$\vec{\mu} = \vec{\mu}_۱ + \vec{\mu}_۲ + \vec{\mu}_۳ = ia^۲\hat{\text{j}} = (۶)(۰/۱)^۲\hat{\text{j}} = ۰/۰۶\hat{\text{j}}\,\text{A}\cdot\text{m}^۲$

(ب) با توجه به اینکه نقطهٔ مورد نظر بسیار دور از مکعب است. دو حلقه abgha و cdefc اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند و فقط حلقه bcfgb می‌ماند که آن را می‌توان یک دو قطبی مغناطیسی در نظر گرفت و میدان دو قطبی الکتریکی نیز از رابطه زیر به دست می‌آید

$$B = \frac{\mu_۰\mu}{۲\pi z^۳} = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۰/۰۶)}{۲\pi(۵)^۳} = ۹/۶\times۱۰^{۱۱}\ \text{T}$$

۶۲●●- در شکل ۲۵-۷۶ الف، مرکزهای دو حلقهٔ دایره‌ای با جریانهای مختلف و شعاع یکسان $۴/۰\text{cm}$ روی محور y قرار دارند. فاصلهٔ حلقه‌ها در آغاز $L = ۳/۰\ \text{cm}$ و حلقهٔ ۲ در مبداء محور قرار دارد. جریانهای دو حلقه یک میدان مغناطیسی خالص با مؤلفهٔ y برابر B_y در مبدأ ایجاد می‌کنند. می‌خواهیم این مؤلفه را وقتی حلقهٔ ۲ بتدریج در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند اندازه‌گیری کنیم. شکل ۲۵-۷۶ ب، B_y را برحسب تابعی از مکان y حلقهٔ ۲ به دست می‌دهد. وقتی $y \to \infty$ میل می‌کند، منحنی به مجانب $B_y = ۷/۲۰\,\mu\text{T}$ نزدیک می‌شود. مقیاس محور افقی با $y_s = ۱۰/۰\text{cm}$ مشخص شده است. (الف) جریان $i_۱$ در حلقهٔ ۱ و (ب) جریان $i_۲$ در حلقهٔ ۲ چقدر است؟

Scanned by CamScanner



(الف) (ب)

شکل ۲۵-۷۶ مسئلهٔ ۶۲

حل: (الف) و (ب) با توجه به نمودار در $y=6\,cm$ میدان صفر است که نتیجه می‌گیریم جهت جریان‌ها همسو است و داریم:

$$\frac{\mu_0 i_2 R^2}{2(R^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\mu_0 i_1 R^2}{2(R^2+L^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{i_2}{(16+36)^{\frac{3}{2}}}=\frac{i_1}{(16+9)^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow i_2=3i_1$$

همچنین با توجه به نمودار در $y=0$، $B_y=-40\,\mu T$ است:

$$-40\times10^{-6}=-\frac{\mu_0 i_2 R^2}{2(R^2+0)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\mu_0 i_1 R^2}{2(R^2+L^2)^{\frac{3}{2}}}$$

که $i_2=3i_1$ و همچنین قرار دادن سایر مقادیر داده شده خواهیم داشت $i_1=0/9A$ از آنجا داریم $i_2=2/7A$.

●●۶۳- یک حلقهٔ دایره‌ای به شعاع $12cm$ حامل جریان $15A$ است. پیچهٔ مسطحی به شعاع $0/82cm$ با ۵۰ دور و جریان $1/3A$ هم مرکز با این حلقه است. صفحهٔ حلقه بر صفحهٔ پیچه عمود است. فرض کنید که میدان مغناطیسی حلقه در پیچه یکنواخت باشد. بزرگی (الف) میدان مغناطیسی ایجاد شده به وسیلهٔ حلقه در مرکز و (ب) گشتاور نیروی وارد بر پیچه ناشی از حلقه چقدر است؟ **SSM**

حل: (الف) میدان مغناطیسی حلقه در مرکز آن برابر است با:

$$B=\frac{\mu_0 i}{2r}=\frac{(4\pi\times10^{-7})(15)}{(2)(0/12)}=7/9\times10^{-5}\,T$$

(ب) گشتاور دو قطبی پیچه برابر است با

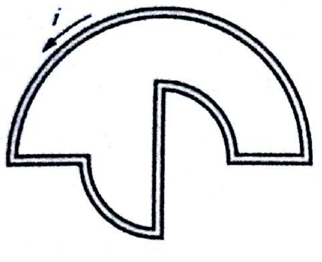
$$\mu=NiA=(50)(1/3)(3/14)(0/82\times10^{-2})^2$$
$$=1/27\times10^{-2}\,A\cdot m^2$$

پیچه تحت تأثیر مغناطیسی حلقه قرار می‌گیرد و چون صفحه آن بر صفحه حلقه عمود است، داریم

$$\tau=\mu B\sin 90=(1/27\times10^{-2})(7/9\times10^{-5})$$
$$=1/1\times10^{-6}\,N\cdot m$$

مسئله‌های اضافی

۶۴- شکل ۲۵-۷۷ حلقهٔ بسته‌ای با جریان $i=2/00A$ را نشان می‌دهد. این حلقه شامل یک نیمدایره به شعاع $4/00m$، ۲ ربع دایره هر یک به شعاع $2/00m$ و سه سیم مستقیم شعاعی است. بزرگی میدان مغناطیسی خالص در مرکز مشترک بخش‌های دایره‌ای چقدر است؟



شکل ۲۵-۷۷ مسئلهٔ ۶۴

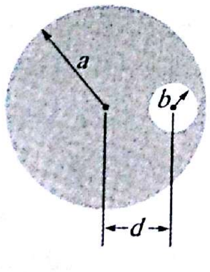
حل: از قاعدهٔ دست راست میدان مغناطیسی حاصل از دو ربع دایره همدیگر را خنثی می‌کنند. بنابراین به ازای $\Phi=\frac{\pi}{2}$ در رابطه $B=\frac{\mu_0 i\Phi}{4\pi R}$ داریم

$$\frac{\mu_0 i(\pi/2)}{4\pi(2)}\hat{k}-\frac{\mu_0 i(\pi/2)}{4\pi(2)}\hat{k}=0$$

همچنین هر سه بخش مستقیم، سهمی در میدان مرکز مشترک بخش‌های دایره‌ای ندارند چون برای این سه بخش $\overrightarrow{ds}\times\vec{r}=0$ است. بنابراین فقط نیمدایره در میدان مغناطیسی سهم دارد. برای نیمدایره $\Phi=\pi$ است لذ داریم

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 i(\pi)}{4\pi(4)}\hat{k}=\frac{(4\pi\times10^{-7})(3)}{16}\hat{k}=(1/57\times10^{-7}\,T)\hat{k}$$

۶۵- شکل ۲۵-۷۸ مقطع یک رسانای استوانه‌ای دراز به شعاع $a=4/00\,cm$ شامل یک سوراخ استوانه‌ای دراز به شعاع $b=1/50\,cm$ را نشان می‌دهد. محور مرکزی استوانه و سوراخ موازی‌اند و فاصلهٔ آنها از یکدیگر $d=2/00cm$ است. جریان $i=5/25\,A$ به طور یکنواخت در سطح سایه‌دار توزیع شده است. (الف) بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز سوراخ چقدر است؟ (ب) دربارهٔ دو مورد خاص $b=0$ و $d=0$ بحث کنید.



شکل ۲۵-۷۸ مسئلهٔ ۶۵

حل: (الف) از اصل بر هم نهی استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم از قسمت خالی، دو جریان با همان چگالی استوانه اصلی، در خلاف جهت یکدیگر عبور می‌کنند. به این ترتیب جریانی که هم جهت جریان استوانه است آن را پر می‌کند و یک استوانه توپر حامل جریان که درون آن استوانهٔ توپری به شعاع a قرار دارد، داریم. میدان در داخل یک استوانه توپر را به دست می‌آوریم (برای چگالی جریان ثابت)

$$\oint B\cdot ds=\mu_0\int j da\Rightarrow B2\pi r=\mu_0 j\pi r^2\Rightarrow B=\frac{\mu_0 j}{2}r$$

با توجه به صورت مسئله چگالی جریان برای استوانه داده شده برابر است با

Scanned by CamScanner

$$j=\frac{i}{A}=\frac{i}{\pi(a^2-b^2)}$$

لذا برای استوانه توپر

$$B_1=\frac{\mu_0}{2}\frac{i}{\pi(a^2-b^2)}r$$

و در مرکز سوراخ r=d، داریم

$$B_1=\frac{\mu_0 id}{2\pi(a^2-b^2)}$$

میدان حاصل از سوراخ استوانه‌ای با جریان متقابل، داریم $r=0$ است لذا داریم $B_2=0$ و میدان کل در مرکز سوراخ چنین خواهد بود

$$B=B_1+B_c=\frac{\mu_0 id}{2\pi}+0=\frac{(4\pi\times10^{-7})(5/25)(0/02)}{2\pi(16-2/25)\times10^{-4}}$$
$$=1/53\times10^{-3}\ T$$

(ب)

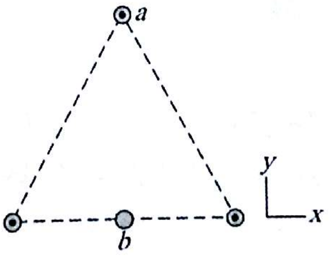
$$b=0 \qquad B=\frac{\mu_0 id}{2\pi a^2}$$
$$d=0 \qquad B=0$$

۶۶- بزرگی میدان مغناطیسی در فاصلهٔ ۸۸/۰cm از محور یک سیم مستقیم دراز برابر با ۷/۳۰ μT است. جریان در سیم چقدر است؟

حل: برای سیم دراز میدان از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

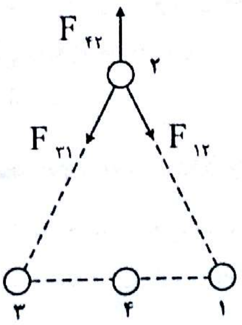
$$B=\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\Rightarrow i=\frac{2\pi rB}{\mu_0}=\frac{2\pi(0/88)(7/3\times10^{-6})}{4\pi\times10^{-7}}=32/1\text{A}$$

۶۷- سه سیم دراز موازی با محور z، هر یک حامل جریان ۱۰A در جهت مثبت z قرار دارند. نقطه‌های تلاقی این سیمها با صفحهٔ xy یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۵۰cm را تشکیل می‌دهند که در شکل ۲۵-۷۹ نشان داده شده است. سیم چهارمی (سیم b) از وسط قاعدهٔ مثلث و موازی با سیمهای دیگر عبور کرده است. اگر نیروی مغناطیسی خالص وارد بر سیم a صفر باشد، (الف) اندازه و (ب) جهت ($+z$ یا $-z$) جریان در سیم b را پیدا کنید.



شکل ۲۵-۷۹ مسئلهٔ ۶۷

حل:



(الف) برای سیم‌های موازی حامل جریان دیدیم که برای جریان‌های هم‌جهت نیرو جاذبه و جریان‌های متقابل نیرو دافع است. با توجه به شکل نیروی $\vec F_{42}$ باید دافعه باشد تا اثر نیروهای جاذبهٔ $\vec F_{12}$ و $\vec F_{32}$ را خنثی نماید

$$F_{12}=F_{32}=\frac{\mu_0 i_1 i_2 L_2}{2\pi a}$$

برایند این دو نیرو برابر است با:

$$F=2F_{12}\cos30^\circ=2\frac{\mu_0 i_1 i_2 L_2}{2\pi a}\cos30^\circ$$

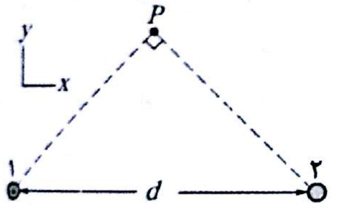
$$F_{42}=F\Rightarrow\frac{\mu_0 i_4 i_2 L_2}{2\pi(a\sin60^\circ)}=2\frac{\mu_0 i_1 i_2 L_2}{2\pi a}\cos30^\circ$$

که $a\sin60^\circ$ ارتفاع مثلث و فاصلهٔ بین سیم ۴ و سیم ۲ است. با ساده کردن عبارت بالا داریم

$$\frac{i_4}{\sin60}=2i_1\cos30\Rightarrow\frac{i_4}{0/87}=2(10)(87)\Rightarrow i_4=15/1\ \text{A}$$

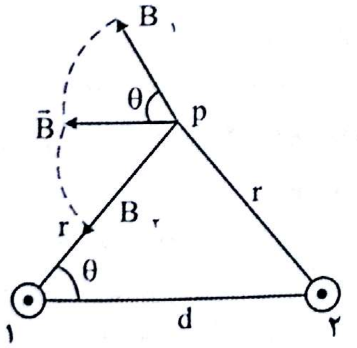
(ب) جهت این جریان در خلاف جهت سیم‌های دیگر یعنی به سمت داخل صفحه است.

۶۸- شکل ۲۵-۸۰ مقطع دو سیم موازی دراز را به فاصلهٔ d=۱۰/۰cm از یکدیگر نشان می‌دهد که هر یک حامل جریان ۱۰۰A هستند، و در سیم ۱ جریان به طرف بیرون صفحه است. نقطهٔ P روی عمود منصف خط وصل کننده سیمها قرار دارد. اگر جریان در سیم ۲ (الف) به طرف بیرون صفحه و (ب) به طرف داخل صفحه باشد، میدان مغناطیسی خالص بر حسب بردار یکه را پیدا کنید.



شکل ۲۵-۸۰ مسئلهٔ ۶۸

حل:

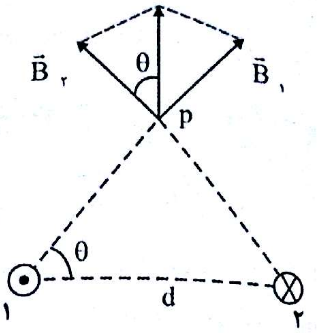


(الف) از قاعدهٔ دست راست درمی‌یابیم که جهت میدان‌ها مطابق شکل‌اند.

$$\vec B=(B_{1x}+B_{2x})(-\hat i)$$
$$=2\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\cos\theta(-\hat i)=\frac{\mu_0 i}{\pi r}\frac{r}{d}(-\hat i)=-\frac{\mu_0 i}{\pi d}\hat i$$
$$=-\frac{(4\pi\times10^{-7})(100)}{\pi(0/1)}=(-4\times10^{-4}\ \text{T})\hat i$$

(ب)

Scanned by CamScanner



جهت میدان‌ها با توجه به قاعدهٔ دست راست مطابق شکل است.

$$\vec{B}=(B_{۱y}+B_{۲y})j=۲\frac{\mu_\circ i}{۲\pi r}\cos\theta(\hat{j})$$
$$=\frac{\mu_\circ i}{\pi r}\frac{r}{d}\hat{j}=(۴\times۱۰^{-۶}\ \hat{j})\text{T}$$

۶۹- سیم لخت مسی نمره ۱۰ (به قطر ۲/۶mm) می‌تواند جریان ۵۰A را بدون داغ شدن اضافی تحمل کند. به ازای این جریان، بزرگی میدان مغناطیسی در سطح سیم چقدر است؟

حل: میدان در سطح یک سیم از رابطه زیر به دست می‌آید

$$B=\frac{\mu_\circ i}{۲\pi R}$$
$$B=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۵۰)}{۲\pi(۱/۳\times۱۰^{-۳})}=۷/۷\times۱۰^{-۳}\ \text{T}$$

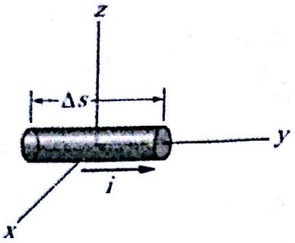
۷۰- یک سیم دراز قائم حامل جریانی نامعلوم است. هم محور با سیم یک سطح رسانای استوانه‌ای نازک دراز قرار دارد که حامل جریان ۳۰mA به طرف بالاست. شعاع سطح استوانه‌ای ۳/۰mm است. اگر بزرگی میدان مغناطیسی در نقطهٔ ۵/۰mm از سیم ۱/۰μT باشد، (الف) اندازه و (ب) جهت جریان در سیم را پیدا کنید. **SSM**

حل: (الف) طبق قانون آمپر یک حلقهٔ آمپر به شعاع $r=۵\text{mm}$ به مرکز سیم در نظر می‌گیریم و قانون آمپر را به کار می‌بریم:

$$\oint\vec{B}\cdot\vec{ds}=\mu_\circ i_{inc}\Rightarrow B(۲\pi r)=\mu_\circ(i_۱+i_۲)$$
$$\Rightarrow(۱\times۱۰^{-۶})(۲\pi)(۵\times۱۰^{-۳})=(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۰/۳+i_۲)$$
$$\Rightarrow i_۲=-۰/۰۰۵\text{A}$$

(ب) با توجه به اینکه $i_۲$ منفی به دست آمد بیانگر این است که در خلاف $i_۱$ است.

۷۱- شکل ۲۵-۸۱ قطعه سیمی به طول $\Delta s=۳/۰\ \text{cm}$ را نشان می‌دهد که مرکزش در مبدأ واقع است و جریان $i=۲/۰\text{A}$ در جهت مثبت محور y (به عنوان بخشی از یک مدار کامل) از آن می‌گذرد. برای محاسبهٔ بزرگی میدان مغناطیسی $\vec{B}$ که توسط قطعه، در نقطه‌ای به فاصلهٔ چند متر از مبدأ ایجاد می‌شود، می‌توانیم از قانون بیو- ساوار به صورت $B=(\mu_\circ/۴\pi)i\Delta s(\sin\theta)/r^۲$ استفاده کنیم، زیرا r و θ در سراسر قطعه رسانا ثابت‌اند. $\vec{B}$ را (برحسب بردار یکه) در مختصات (x,y,z) (الف) $(۰,۰,۵/۰\ \text{m})$، (ب) $(۰,۶/۰\ \text{m},۰)$، (پ) $(۷/۰\ \text{m},۷/۰\ \text{m},۰)$، و (ت) $(-۳/۰\text{m},-۴/۰\text{m},۰)$ پیدا کنید. **SSM**



شکل ۲۵-۸۱ مسئلهٔ ۷۱

حل: با توجه به قانون بیو- ساوار داریم:

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ i}{۴\pi}\frac{\overrightarrow{\Delta s}\times\vec{r}}{r^۳}$$

(الف) برای نقطه $(۰,۰,۵)$، $\vec{r}=r\hat{k}$ و $r=۵$

$$\vec{B}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۲)}{۴\pi}\frac{(۰/۰۳)\hat{j}\times۵\hat{k}}{(۵)^۳}=(۲/۴\times۱۰^{۱۰}\ \hat{i})\text{T}$$

(ب) برای نقطه $(۰,۶,۰)$، $\theta=۰$ و میدان صفر است، $\vec{B}=۰$

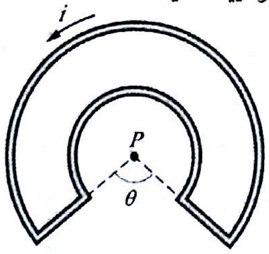
(پ) برای نقطه $(۷,۷,۰)$، $\theta=\frac{\pi}{۴}$ و $\vec{r}=۷\hat{i}+۷\hat{j}$ و $r=۷\sqrt{۲}$

$$\vec{B}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۲)}{۴\pi}\frac{(۰/۰۳)\hat{j}\times(۷\hat{i}\times۷\hat{j})}{(۷\sqrt{۲})^۳}$$
$$=(-۴/۳\times۱۰^{-۱۱}\ \hat{k})\text{T}$$

(ت) برای نقطه $(-۳,-۴,۰)$، $\vec{r}=-۳\hat{i}-۴\hat{j}$ و $r=۵$

$$\vec{B}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۲)}{۴\pi}\frac{(۰/۰۳)\hat{j}\times(-۳\hat{i}-۴\hat{j})}{(۵)^۳}$$
$$=(۱/۴۴\times۱۰^{-۱۰}\ \hat{k})\text{T}$$

۷۲- در شکل ۲۵-۸۲ حلقهٔ بسته‌ای حامل جریان $i=۲۰۰\ \text{mA}$ است. این حلقه شامل دو سیم مستقیم شعاعی و دو کمان دایره‌ای هم مرکز به شعاعهای ۲/۰۰m و ۴/۰۰m است. زاویهٔ θ برابر با $\pi/۲$ rad است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (به طرف داخل یا به طرف خارج صفحه) میدان مغناطیسی خالص در مرکز انحنای P را پیدا کنید.



شکل ۲۵-۸۲ مسئلهٔ ۷۲

حل: (الف) و (ب) میدان ناشی از دو بخش مستقیم سیم در نقطه P صفر است چون $\overrightarrow{ds}\times\vec{r}=۰$ است. میدان در مرکز یک کمان تحت زاویه Φ از رابطه زیر به دست می‌آید

$$B=\frac{\mu_\circ i\Phi}{۴\pi R}$$

و در اینجا $\Phi=۲\pi-\theta=۲\pi-\frac{\pi}{۴}=\frac{۷\pi}{۴}$ است لذا برای دو کمان خارجی و داخلی داریم

به سمت خارج صفحه $(\hat{k})$

Scanned by CamScanner

$$B_۱ = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۰/۲)\left(\frac{۷\pi}{۴}\right)}{۴\pi(۴)} = ۲/۷۵\times۱۰^{-۸}\ T$$

به سمت داخل صفحه $(-\hat{k})$

$$B_۲ = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۰/۲)\left(\frac{۷\pi}{۴}\right)}{۴\pi(۲)} = ۵/۴۹\times۱۰^{-۸}\ T$$

به سمت داخل صفحه $(-\hat{k})$

$$B = B_۱ + B_۲ = (۲/۷۵ - ۵/۴۹)\times۱۰^{-۸} = -۲/۷۵\times۱۰^{-۸}\ T$$

۷۳- یک کابل استوانه‌ای به شعاع ۸/۰۰mm حامل جریان ۲۵/۰A است که به طور یکنواخت در مساحت مقطع توزیع شده است. در چه فاصله‌ای از مرکز سیم، نقطه‌ای داخل سیم وجود دارد که بزرگی میدان مغناطیسی در آن ۰/۱۰۰mT است؟

حل: میدان درون کابل استوانه‌ای از رابطه زیر به دست می‌آید

$$B = \frac{\mu_۰ ir}{۲\pi R^۲}$$

$$۰/۱\times۱۰^{-۳} = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۲۵)r}{۴\pi(۸\times۱۰^{-۳})} \Rightarrow r = ۱/۲۸\times۱۰^{-۳}\ m$$

۷۴- سیم درازی که حامل جریان ۱۰۰A است بر خطهای میدان مغناطیسی یک میدان مغناطیسی یکنواخت با بزرگی ۵/۰mT عمود است. در چه فاصله‌ای از سیم میدان مغناطیسی خالص برابر با صفر است؟

حل: این نقاط باید در امتداد خطی موازی سیم و به فاصله r از آن باشد به طوری که

$$B_{\text{سیم}} = \frac{\mu_۰ i}{۲\pi r} = B_{\text{خارجی}}$$

که از اینجا r را می‌توان به دست آورد

$$۵\times۱۰^{-۳} = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۱۰۰)}{۲\pi r} \Rightarrow r = ۴\times۱۰^{-۳}\ m$$

۷۵- دو سیم هر دو به طول L به شکل یک دایره و یک مربع درآورده شده‌اند و جریان i از هر یک می‌گذرد. نشان دهید که میدان مغناطیسی که در مرکز مربع ایجاد می‌شود از میدان مغناطیسی ایجاد شده در مرکز دایره بیشتر است.

حل: در مسئله ۸۷ نشان خواهیم داد که میدان مغناطیسی در مرکز مربع از رابطه زیر به دست می‌آید

$$B_{\text{مربع}} = \frac{۲\sqrt{۲}\mu_۰ i}{\pi a}$$

که در اینجا $a = \frac{L}{۴}$ است لذا داریم

$$B_{\text{مربع}} = \frac{۲\sqrt{۲}\mu_۰ i}{\pi\left(\frac{L}{۴}\right)} = ۱۱/۳۱\frac{\mu_۰ i}{\pi L}$$

میدان مغناطیسی مرکزی در مرکز دایره برابر است با

$$B_{\text{دایره}} = \frac{\mu_۰ i}{۴R}$$

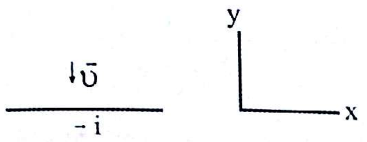
که در اینجا $R = \frac{L}{۲\pi}$ است لذا داریم

$$B_{\text{دایره}} = \frac{\mu_۰ i}{۴\left(\frac{L}{۲\pi}\right)} = \frac{\pi\mu_۰ i}{L} = \pi^۲\frac{\mu_۰ i}{\pi L} = ۹/۸۷\frac{\mu_۰ i}{\pi L}$$

لذا مشاهده می‌شود که $B_{\text{دایره}} > B_{\text{مربع}}$ است.

۷۶- یک سیم مستقیم دراز حامل جریان ۵۰A است. الکترونی که با تندی $۱/۰\times۱۰^۷$ m/s حرکت می‌کند، ۵/۰cm از سیم فاصله دارد. اگر سرعت الکترون در جهت (الف) به طرف سیم، (ب) موازی با سیم در جهت جریان و عمود بر دو جهت مشخص شده با (الف) و (ب)، باشد، بزرگی نیروی مغناطیسی وارد بر الکترون چقدر است؟

حل:



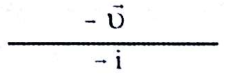
(الف) به سمت خارج صفحه

$$B_{\text{دایره}} = \frac{\mu_۰ i}{۲\pi r} = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۵۰)}{۲\pi(۰/۰۵)} ۲\times۱۰^{۴}\ T$$

$$F = qvB\sin۹۰ = (۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۱\times۱۰^{۷})(۲\times۱۰^{-۴})$$

$$= ۳/۲\times۱۰^{-۱۶}\ N$$

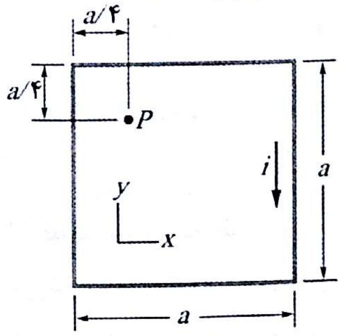
(ب)



$\vec{v}$ بر $\vec{B}$ عمود است و در نتیجه داریم $F = ۳/۲\times۱۰^{-۱۶}\ N$

(پ) در اینجاست $\vec{v}$ موازی $\vec{B}$ است و $F = ۰$ است.

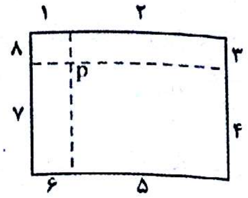
۷۷- در شکل ۲۵-۸۳ اگر $i = ۱۰A$ و $a = ۸/۰cm$ باشد، میدان مغناطیسی در نقطهٔ P را برحسب بردار یکه پیدا کنید. (توجه کنید که سیمها دراز نیستند.) SSM



شکل ۲۵-۸۳ مسئلهٔ ۷۷

حل: قاب را به هشت قسمت می‌کنیم، آنگاه میدان مغناطیسی هر یک را در نقطه P به دست آورده و سپس جمع می‌کنیم، برای انجام این امر از نتیجه مسئله ۲۱ استفاده می‌کنیم. میدان ناشی از یک سیم حامل جریان i به طول L در نقطه‌ای به فاصله R از سیم برابر است با

Scanned by CamScanner



$$B=\frac{\mu_0 i}{4\pi R}\frac{L}{\sqrt{L^2+R^2}}$$

$$B_1=B_8=\frac{\sqrt{2}\mu_0 i}{8\pi(a/4)}=\frac{\sqrt{2}\mu_0 i}{2\pi a}$$

$$B_4=B_5=\frac{\sqrt{2}\mu_0 i}{8\pi(3a/4)}=\frac{\sqrt{2}\mu_0 i}{6\pi a}$$

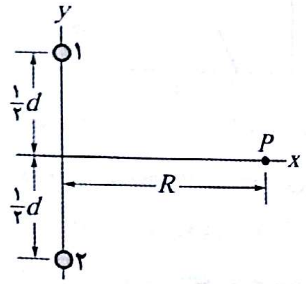
$$B_2=B_7=\frac{\mu_0 i}{4\pi(a/4)}\frac{3a/4}{\left[(3a/4)^2+(a/4)^2\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{3\mu_0}{\sqrt{10}\pi a}$$

$$B_3=B_6=\frac{\mu_0 i}{4\pi(3a/4)}\frac{a/4}{\left[(a/4)^2+(3a/4)^2\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{\mu_0}{3\sqrt{10}\pi a}$$

و در نتیجه خواهیم داشت

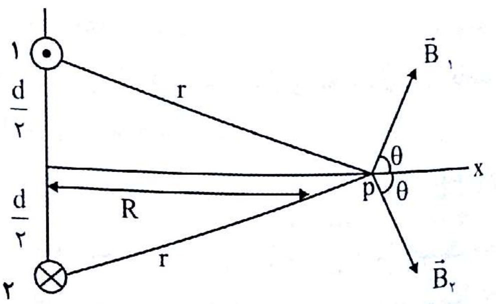
$$\vec{B}_P=\sum_{n=1}^{8}B_1(-\hat{k})=2\frac{\mu_0 i}{\pi a}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{1}{3\sqrt{10}}\right](-\hat{k})$$
$$=(2\times10^{-4}\ \mathrm{T})(-\hat{k})$$

۷۸- شکل ۲۵-۸۴ مقطع دو سیم موازی دراز به فاصلهٔ $d=18.6\ \mathrm{cm}$ از یکدیگر را نشان می‌دهد. هر یک از سیمها حامل جریان ۴/۲۳A به طرف بیرون صفحه در سیم ۱ و به طرف داخل صفحه در سیم ۲ است. میدان مغناطیسی در نقطهٔ P در فاصلهٔ $R=34.2\ \mathrm{cm}$ را بر حسب بردار یکه پیدا کنید.



شکل ۲۵-۸۴ مسئلهٔ ۷۸

حل:



جهت میدان‌های مغناطیسی را با استفاده از قاعده دست راست رسم می‌کنیم. داریم

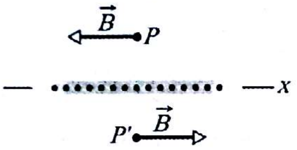
$$|\vec{B}_1|=|\vec{B}_2|$$

مؤلفه‌های قائم یکدیگر را خنثی می‌کنند و برایند مؤلفه‌های افق نیز برابر است با

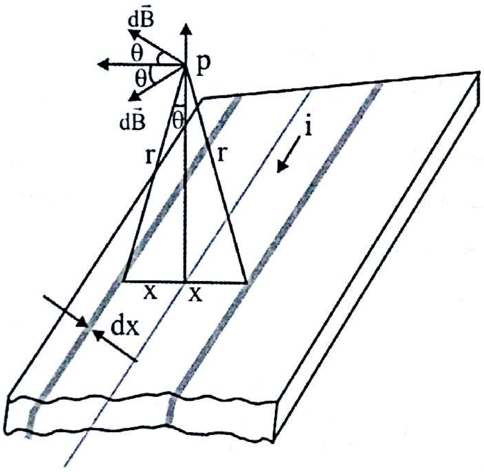
$$B_x=B_1\cos\theta+B_2\cos\theta=2B_1\cos\theta=2\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\right)\left(\frac{d/2}{r}\right)$$
$$=\frac{\mu_0 id}{2\pi r^2}=\frac{\mu_0 id}{2\pi(R^2+d\frac{2}{4})}$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده $\vec{B}=(1.25\times10^{-6}\ \mathrm{T})\hat{i}$

۷۹- شکل ۲۵-۸۵ مقطع یک برگهٔ رسانای نامتناهی را که حامل جریان بر یکای طول x برابر با λ است نشان می‌دهد؛ جریان به طور عمود و به طرف بیرون از صفحه خارج می‌شود. (الف) با استفاده از قانون بیو- ساوار و تقارن نشان دهید که برای تمام نقطه‌های P در بالای برگه و تمام نقطه‌های P زیر آن، بزرگی میدان مغناطیسی $\vec{B}$ موازی با برگه و در جهت نشان داده شده است. (ب) با استفاده از قانون آمپر نشان دهید که در تمام نقطه‌های P و P' داریم $B=\frac{1}{2}\mu_0\lambda$. SSM



شکل ۲۵-۸۵ مسئلهٔ ۷۹



حل: (الف) این برگه را می‌توان مجموعه‌ای از رشته‌های دراز به پهنای کوچک dx در نظر گرفت. مطابق شکل دو رشته متقارن را که در نظر بگیریم مشاهده می‌شود که مؤلفه‌های قائم یکدیگر را خنثی و مؤلفه‌های افقی با هم جمع می‌شوند.

(ب) بزرگی میدان dB ناشی از یک رشته جریان برابر است با:

$$dB=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{di}{r}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\lambda dx}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

همانطور که در قسمت (الف) دیدیم تنها مؤلفه افقی میدان وجود دارد لذا

$$B=\int dB\cos\theta=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu_0\lambda dx}{2\pi\sqrt{R^2+x^2}}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}$$
$$=\frac{\mu_0\lambda R}{\pi}\int_{\pi}^{\pi/2}\frac{R(1+\tan^2\theta)d\theta}{R^2(1+\tan\theta)}\Rightarrow B=\frac{\mu_0\lambda}{2}$$

Scanned by CamScanner

۸۰- دو سیم دراز در صفحهٔ xy قرار دارند و هر یک حامل جریان در جهت مثبت محور x است. سیم ۱ در $y=10.0\,\text{cm}$ حامل جریان $6.00\,\text{A}$ و سیم ۲ در $y=5.00\,\text{cm}$ حامل جریان $10.0\,\text{A}$ است. (الف) میدان مغناطیسی خالص $\vec{B}$ را در مبدأ برحسب بردار یکه پیدا کنید. (ب) به ازای چه مقدار y میدان $\vec{B}=0$ می‌شود؟ (پ) اگر جریان در سیم ۱ معکوس شود، به ازای چه مقدار y میدان $\vec{B}=0$ می‌شود؟

حل: (الف) با استفاده از معادلهٔ میدان مغناطیسی سیم دراز و قاعدهٔ دست راست درمی‌یابیم

$$\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2=-\frac{\mu_0 i_1}{2\pi r_1}\hat{k}-\frac{\mu_0 i_2}{2\pi r_2}\hat{k}$$

$$=-\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{6}{0.1}+\frac{10}{0.05}\right)\hat{k}=(-52\times10^{-6}\,\hat{k})\,\text{T}$$

(ب) در ناحیهٔ $r_2<y<r_1$، دیده می‌شود که $B=0$ و داریم

$$\frac{\mu_0 i_1}{2\pi(r_1-y)}=\frac{\mu_0 i_2}{2\pi(y-r_2)}$$

که با گذاشتن مقادیر داده شده خواهیم داشت $y=0.0813\,\text{m}$.

(پ) سیم ۲ جریان بزرگتری دارد لذا این وضعیت در ناحیه $y>r_1$ رخ می‌دهد که در آنجا داریم

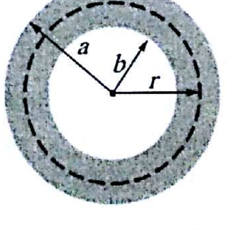
$$\frac{\mu_0 i_1}{2\pi(y-r_2)}=\frac{\mu_0 i_2}{2\pi(r_1-y)}$$

که با گذاشتن مقادیر داده شده خواهیم داشت $y=0.0175\,m$.

۸۱- شکل ۲۵-۸۶ مقطع یک رسانای استوانه‌ای توخالی به شعاعهای a و b را نشان می‌دهد که حامل جریان i است که به طور یکنواخت توزیع شده است. (الف) نشان دهید که بزرگی میدان مغناطیسی $B(r)$ در مورد فاصلهٔ شعاعی r در گسترهٔ $b<r<a$ با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$B=\frac{\mu_0 i}{2\pi(a^2-b^2)}\frac{r^2-b^2}{r}$$

(ب) نشان دهید که هرگاه $r=a$ باشد، این معادله بزرگی میدان مغناطیسی B در سطح یک سیم مستقیم دراز حامل جریان i را به دست می‌دهد؛ هرگاه $r=b$ باشد، میدان مغناطیسی صفر به دست می‌دهد، و هرگاه $b=0$ باشد، میدان مغناطیسی داخل یک رسانای توپر به شعاع a و حامل جریان را به دست می‌دهد. (پ) فرض کنید که $a=2.0\,\text{cm}$ ، $b=1.8\,\text{cm}$ و $i=100\,\text{A}$ باشد، حال $B(r)$ را در گسترهٔ $0<r<6\,\text{cm}$ رسم کنید. **SSM**



شکل ۲۵-۸۶ مسئلهٔ ۸۱

حل: (الف) حلقه آمپری به شعاع r را در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\oint\vec{B}\cdot\vec{ds}=\mu_0 i_{inc}\Rightarrow B=\frac{\mu_0 i_{inc}}{2\pi r}$$

i_{inc} جریان عبوری از پوسته رسانا تا خط‌چین است. تناسب زیرا به کار می‌بریم،

$$\begin{matrix}\pi(a^2-b^2) & i\\ \pi(r^2-b^2) & i_{inc}\end{matrix}\Rightarrow i_{inc}=\frac{(r^2-b^2)}{(a^2-b^2)}i$$

آنگاه داریم:

$$B=\frac{\mu_0 i}{2\pi(a^2-b^2)}\frac{r^2-b^2}{r}$$

(ب) به ازای $r=a$ داریم:

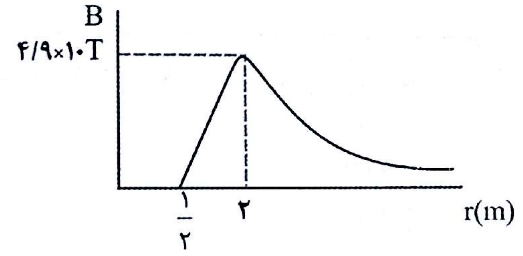
$$B=\frac{\mu_0 i}{2\pi(a^2-b^2)}\frac{a^2-b^2}{a}=\frac{\mu_0 i}{2\pi a}$$

که همان میدان مغناطیسی روی سطح یک سیم دراز است.

$$b=0\Rightarrow B=\frac{\mu_0 i}{2\pi a^2}\frac{r^2-0}{r}=\frac{\mu_0 ir}{2\pi a^2}$$

که میدان درون سیمی به شعاع a است.

(پ) میدان مغناطیسی در $r<b$ صفر است، زیرا در این ناحیه هیچ جریانی محصور نشده است. میدان مغناطیسی در ناحیه $a<r<b$ متناسب با $\frac{r^2-a^2}{r}$ است و در ناحیه $r>b$ متناسب با $\frac{1}{r}$ است لذا منحنی تغییرات به صورت زیر خواهد بود



۸۲- سه سیم دراز همه در صفحهٔ xy و موازی با محور x قرار دارند. فاصلهٔ سیمها از یکدیگر مساوی و برابر $10\,\text{cm}$ است. از دو سیم بیرونی جریان $5.0\,\text{A}$ در جهت مثبت x می‌گذرد. اگر جریان در سیم مرکزی $3.2\,\text{A}$ (الف) در جهت مثبت x و (ب) در جهت منفی x باشد، بزرگی نیروی وارد بر $3.0\,\text{m}$ هر یک از دو سیم بیرونی چقدر است؟

حل: (الف) نیرویی که دو سیم موازی به طول L و فاصله d بر یکدیگر وارد می‌کنند چنین است

$$F_{12}=\frac{\mu_0 i_1 i_2 L}{2\pi d}$$

در اینجا هر سه سیم حامل جریان‌هایی هم جهت هستند و یکدیگر را جذب می‌کنند. بنابراین بالاترین سیم توسط دو سیم دیگر به سمت پایین کشیده می‌شود و داریم

$$F=\frac{\mu_0 L}{2\pi}\left[\frac{(5)(3.2)}{(0.1)}+\frac{(5)(5)}{(0.2)}\right]$$

در نتیجه $F=1.7\times10^{-4}\,\text{N}$ می‌شود.

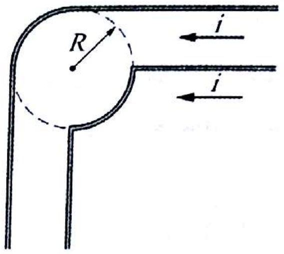
Scanned by CamScanner

(ب) در این حالت بالاترین سیم توسط پایین‌ترین سیم، روبه بالا دفع شده و توسط سیم پایینی‌اش رو به پایین کشیده می‌شود. بنابراین داریم

$$F=\frac{\mu_۰ L}{۲\pi}\left[\frac{(۵)(۳/۲)}{(۰/۱)}+\frac{(۵)(۵)}{(۰/۲)}\right]$$

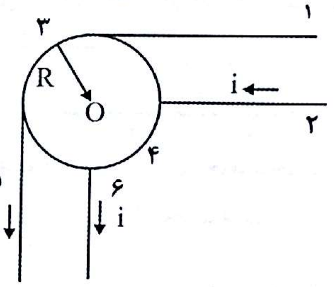
در نتیجه $F=۲/۱\times۱۰^{-۵}$ N می‌شود.

۸۳- در شکل ۲۵-۸۷ دو سیم دراز نامتناهی حامل جریانهای مساوی i هستند. هر یک از دو سیم دارای یک کمان ۹۰° روی پیرامون دایرهٔ یکسان R هستند. نشان دهید که میدان مغناطیسی $\vec{B}$ در مرکز دایره با میدان $\vec{B}$ در فاصلهٔ R زیر سیم مستقیم نامتناهی که حامل جریان i به سمت چپ باشد برابر است.



شکل ۲۵-۸۷ مسئلهٔ ۸۳

حل:



ساختار نشان داده شده شامل شش قسمت است چهار سیم راست و دو کمان. سیم‌های ۲ و ۴ نقشی در میدان مرکزی ندارند چون امتداد آنها از مرکز می‌گذرد.
میدان حاصل از دو کمان با توجه به قاعده دست راست یکدیگر را خنثی می‌کنند. سیم‌های ۱ و ۵ دو سیم نیم‌نامتناهی هستند و میدان حاصل از آنها با هم جمع می‌شود و میدان کل در مرکزی برابر است با

$$B=\frac{\mu_۰ i}{۴\pi R}+\frac{\mu_۰ i}{۴\pi R}=\frac{\mu_۰ i}{۲\pi R}$$

۸۴- یک سیم دراز شعاعی بزرگتر از ۴/۰mm دارد و حامل جریانی است که به طور یکنواخت در مقطع آن توزیع شده است. بزرگی میدان مغناطیسی ناشی از جریان در نقطه‌ای با فاصلهٔ ۴/۰mm از محور سیم ۰/۲۸ mT و در نقطه‌ای با فاصلهٔ ۱۰mm از سیم ۰/۲۰ mT است. شعاع سیم چقدر است؟

حل: با توجه به اینکه $R>۴$mm است، فاصله ۴mm درون سیم است و برای درون سیم میدان از رابطه زیر به دست می‌آید

$$B_{in}=\frac{\mu_۰ ir}{۲\pi R^۲}$$

$$(۰/۲۸\times۱۰^{-۳})=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})i(۴\times۱۰^{-۳})}{۲\pi R^۲}\qquad(۱)$$

فاصله ۱۰mm خارج سیم و برای خارج از سیم میدان از رابطه زیر به دست می‌آید

$$B_{out}=\frac{\mu_۰ i}{۲\pi r}\Rightarrow ۰/۲\times۱۰^{-۳}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})i}{۲\pi(۱۰\times۱۰^{-۳})}\Rightarrow i=۱۰\,\text{A}$$

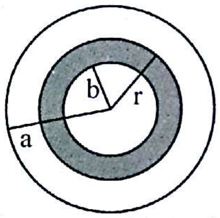
با قرار دادن مقدار فوق در رابطه (۱) شعاع به دست می‌آید $R=۵/۳۴$ mm.

۸۵- یک رسانای استوانه‌ای توخالی دراز (به شعاع داخلی ۲/۰mm و شعاع خارجی ۴/۰mm) حامل جریان ۲۴A است که به طور یکنواخت در مقطع آن توزیع شده است. سیم باریک درازی که هم محور با استوانه است حامل جریان ۲۴A در خلاف جهت است. بزرگی میدان مغناطیسی (الف) ۱/۰mm ، (ب) ۳/۰mm و (پ) ۵/۰mm از محور مرکزی سیم و استوانه چقدر است؟

حل: (الف) برای $r=۱$mm، حلقهٔ آمپری را به همین شعاع در نظر بگیریم تنها جریان محصور شده در حلقه، جریان حاصل از سیم است، لذا داریم

$$B_{\text{out}}=\frac{\mu_۰ i w}{۲\pi r}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۲۴)}{۲\pi(۱\times۱۰^{-۳})}=۴/۸\times۱۰^{-۳}\ \text{T}$$

(ب)



در اینجا یک حلقهٔ آمپری را به شعاع $r=۳$mm در نظر می‌گیریم جریان محصور شده در حلقه شامل جریان سیم دراز مرکزی و بخشی از پوسته استوانه‌ای است. جریان عبوری از این بخش را می‌توان از تناسب زیر به دست آورد

$$\pi(a^۲-b^۲)\qquad i$$

$$\pi(a^۲-b^۲)\qquad i\Rightarrow i'=\frac{r^۲-b^۲}{a^۲-b^۲}i$$

آنگاه از قانون آمپر داریم:

$$B=\frac{\mu_۰ i_{inc}}{۲\pi r}=\frac{\mu_۰(i_w-i')}{۲\pi r}$$

$$B=\frac{\mu_۰}{۲\pi r}\left(i_w-\frac{r^۲-b^۲}{a^۲-b^۲}i\right)$$

که با قرار دادن مقادیر داده، خواهیم داشت

$$B=۹/۳\times۱۰^{-۴}$$

(پ) در این حالت حلقه آمپری را به شعاع $r=۵$mm در می‌گیریم. جریا محصور در حلقه برابر صفر است چون $i=-i_w$ است، لذا از قانون آمپر داریم $B=۰$.

۸۶- در شکل ۲۵-۷۳، آرایشی به نام پیچهٔ هلمهولتز شامل دو پیچهٔ هم محور دایره‌ای، هر یک با N دور سیم به شعاع R و به

Scanned by CamScanner

فاصلهٔ s از یکدیگر نشان داده شده است. این دو پیچه حامل جریانهای مساوی i در جهت یکسان هستند. (الف) نشان دهید که مشتق اول بزرگی میدان مغناطیسی خالص پیچه‌ها (dB/dx) در نقطهٔ وسط P بدون توجه به مقدار s صفر است. چرا انتظار دارید که این امر با توجه به تقارن نیز درست باشد؟ (ب) نشان دهید که مشتق دوم (d^2B/dx^2) نیز در P صفر است، مشروط بر اینکه $s=R$ باشد. این به دلیل یکنواختی B در نزدیکی P برای این فاصلهٔ خاص پیچه است.

حل: (الف) بزرگی میدان مغناطیسی روی محور یک پیچهٔ N دو و شعاع R حامل جریان i به فاصله Z از مرکز پیچه، طبق رابطه زیر داده می‌شود.

$$B=\frac{N\mu_0 iR^2}{2(R^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

در اینجا از قاعده دست راست در می‌یابیم که در ناحیه میان پیچه‌ها میدان حاصل از آنها در یک جهت است. مبدأ را روی مرکز حلقه سمت چپ انتخاب می‌کنیم و برای محاسبه میدان پیچه سمت چپ $Z=x$ و برای پیچهٔ سمت راست $Z=s-x$ است. در نتیجه میدان مغناطیسی کل در نقطه میان دو پیچه برابر است با:

$$B=\frac{n\mu_0 iR^2}{2}\left[\frac{1}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{(R^2+x^2-2sx+s^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

و مشتق میدان نسبت به x برابر است با:

$$\frac{dB}{dx}=\frac{N\mu_0 iR^2}{2}\left[-\frac{3}{(R^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{3}{(R^2+x^2-2sx+s^2)^{\frac{5}{2}}}\right]$$

وقتی این را برای نقطهٔ میانی، $x=S/2$ محاسبه کنیم، خواهیم داشت:

$$\left.\frac{dB}{dx}\right|_{x=\frac{s}{2}}=0$$

(ب) برای مشتق دوم داریم:

$$\frac{d^2B}{dx^2}=\frac{N\mu_0 iR^2}{2}\left[-\frac{3}{(R^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{15x^2}{(R^2+x^2)^{\frac{7}{2}}}-\frac{3}{(R^2+x^2-2sx+s^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{15(x-s)^2}{(R^2+x^2-2sx+s^2)^{\frac{7}{2}}}\right]$$

که در $x=S/2$ خواهیم داشت:

$$\left.\frac{d^2B}{dx^2}\right|_{x=\frac{s}{2}}=3N\mu_0 iR^2\frac{S^2-R^2}{(R^2+S^2/4)^{\frac{7}{2}}}$$

۸۷- یک حلقهٔ مربع شکل از سیم به ضلع a حامل جریان i است. نشان دهید که در مرکز حلقه، بزرگی میدان مغناطیسی ایجاد شده توسط جریان عبارت است از:

$$B=\frac{2\sqrt{2}\mu_0 i}{\pi a}$$

حل: مرکز مربع روی عمود منصف چهار ضلع آن قرار دارد و میدان روی عمود منصف سیم حامل جریان به طول L و در فاصله R از آن در مسئله ۱۷ محاسبه شد که از رابطه زیر به دست می‌آید

$$B=\frac{\mu_0 iL}{2\pi\sqrt{L^2+4R^2}}$$

در اینجا $R=a/2$ و $L=a$ است در نتیجه میدان مغناطیسی حاصل از یک ضلع مربع در مرکز چنین است

$$B_1=\frac{\mu_0 ia}{2\pi\left(\frac{a}{2}\right)\sqrt{a^2+4\left(\frac{a^2}{4}\right)}}=\frac{\mu_0 ia}{\pi a\sqrt{2}}$$

با استفاده از قاعده دست راست میدان حاصل از اضلاع مربع در مرکز هم جهت هستند از میدان مغناطیس کل در مرکز مربع برابر است با

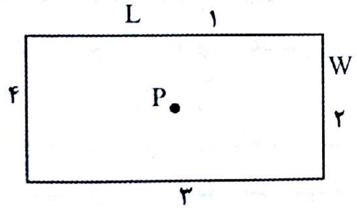
$$B=4B_1=\frac{4\mu_0 ia}{\pi a\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}\mu_0 i}{\pi a}$$

۸۸- نشان دهید که بزرگی میدان مغناطیسی ایجاد شده در مرکز یک حلقهٔ مستطیل شکل به درازای L و پهنای W که حامل جریان i است عبارت است از

$$B=\frac{2\mu_0 i}{\pi}\frac{(L^2+W^2)^{1/2}}{LW}$$

حل: میدان روی عمود منصف سیم حامل جریان به طول L و در فاصله R از آن در مسئله ۱۷ محاسبه شد

$$B=\frac{\mu_0 iL}{2\pi R\sqrt{L^2+4R^2}}$$



برای سیم‌های ۱ و ۳، $L=L$ و $R=\frac{W}{2}$، لذا داریم:

$$B_1=B_3=\frac{\mu_0 iL}{2\pi\left(\frac{W}{2}\right)\sqrt{L^2+4\left(\frac{W^2}{4}\right)}}=\frac{\mu_0 iL}{\pi w\sqrt{L^2+W^2}}$$

برای سیم‌های ۲ و ۴، $L=W$ و $R=\frac{L}{2}$، لذا داریم

$$B_2=B_4=\frac{\mu_0 iW}{2\pi\left(\frac{L}{2}\right)\sqrt{W^2+4\left(\frac{L^2}{4}\right)}}=\frac{\mu_0 iW}{\pi L\sqrt{W^2+L^2}}$$

با استفاده از قاعده دست راست درمی‌یابیم میدان حاصل از هر چهار ضلع هم جهت هستند لذا میدان کل در مرکز مستطیل چنین خواهد شد

Scanned by CamScanner

$$B = 2\frac{\mu_0 iL}{\pi W\sqrt{L^2+W^2}} + \frac{\mu_0 iW}{\pi L\sqrt{W^2+L^2}}$$
$$= \frac{2\mu_0 i}{\pi\sqrt{W^2+L^2}}\left(\frac{L}{W}+\frac{W}{L}\right) = \frac{2\mu_0 i}{\pi}\frac{\sqrt{L^2+W^2}}{LW}$$

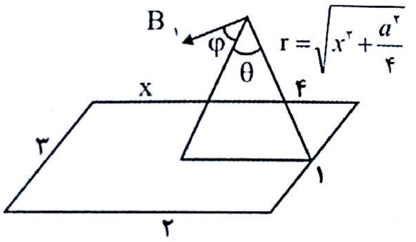
۸۹- یک حلقهٔ مربع شکل سیمی بـه ضلع a حامل جریـان i است. نشان دهید که بزرگی میدان مغناطیسی ایجاد شده در نقطهٔ واقع بر محور مرکزی عمود بر حلقه و به فاصلهٔ x از مرکز آن عبارت است از

$$B(x) = \frac{4\mu_0 ia^2}{\pi(4x^2+a^2)(4x^2+2a^2)^{1/2}}$$

ثابت کنید که این نتیجه با نتیجه به دست آمده در مسئلهٔ ۸۷ سازگار است. **SSM**

حل: در مسئله ۱۷ نشان داده شده که میدان روی عمود منـصف سیم دراز حامل جریان به طول L و در فاصله R از آن از رابطـه زیر به دست می‌آید

$$B = \frac{\mu_0 iL}{2\pi R\sqrt{L^2+4R^2}}$$



میدان حاصل از ضلع ۱ را در نظر بگیریم داریم

$$B_1 = \frac{\mu_0 iL}{2\pi r\sqrt{a^2+4r^2}}$$

میدان ناشی از سایر اضلاع از نظر بزرگـی همـین مقـدار اسـت. مؤلفه‌های افقی آنها یکدیگر را خنثی می‌کنند و فقط در راسـتای محور z میدان خالص داریم

$$B_z = 4B_1\cos\varphi = 4B_1\sin\theta = 4\frac{\mu_0 a}{2\pi r\sqrt{a^2+4r^2}}\frac{a/2}{r}$$
$$= \frac{\mu_0 ia^2}{4\pi r^2\sqrt{a^2+4r^2}}$$

با قرار دادن مقدار r نتیجه نهایی به دست می‌آید

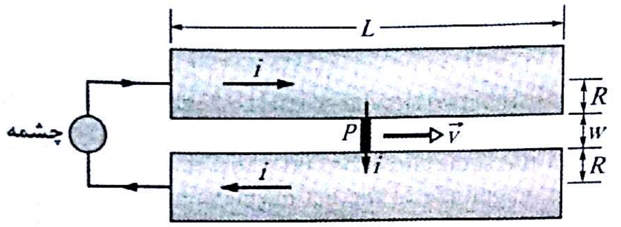
$$B = \frac{\mu_0 ia^2}{4\pi\left(x^2+\frac{a^2}{4}\right)\sqrt{a^2+4\left(x^2+\frac{a^2}{4}\right)}}$$
$$= \frac{\mu_0 ia^2}{\pi(4x^2+a^2)\sqrt{4x^2+2a^2}}$$

چنانچه $x=0$ را قرار دهیم نتیجه به آمـده بـا نتیجـه مـسئله ۸۷ سازگار می‌شود

۹۰- شکل ۲۵-۸۸ طرحوار آرمانی شدهٔ یک تفنگ ریلی است. پرتابهٔ P بین دو ریل پهن با مقطع دایره‌ای قرار دارد؛ یک چشمهٔ جریان در ریلها و پرتابهٔ (رسانا) جریانی می‌فرستد (از فیوز استفاده نشده است). (الف) فرض کنیم w فاصلهٔ بین ریلها، R شعاع هر ریل و i جریان است. نشان دهید که نیروی وارد بر پرتابه در امتداد ریلها به طرف راست است و تقریباً با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$F = \frac{i^2\mu_0}{2\pi}\ln\frac{w+R}{R}$$

(ب) اگر پرتابه از انتهای چپ ریل‌ها از حالـت سـکون شـروع کرده باشد، تندی v را که به طرف راست پرتـاب مـی‌شـود بـه دسـت آوریـد. فـرض کنیـد کـه $i=45\,\text{kA}$ ، $w=12\,\text{mm}$ ، $R=6.7\,\text{cm}$ ، $L=4.0\,\text{m}$ و جرم پرتابه $10\,\text{g}$ است.



شکل ۲۵-۸۸ مسئلهٔ ۹۰

حل: (الف) جهت میـدان ناشـی از دو ریـل روی پرتابـهٔ P بـه سمت داخل صفحه است. نیرویی که ریل بالایی به پرتـاب وارد می‌کند را حساب می‌کنیم

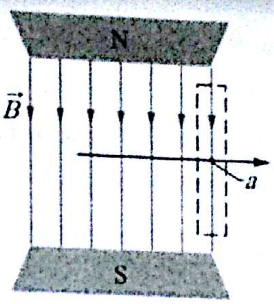
$$dF = ibd\ell \Rightarrow dF = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi y}dy$$
$$F = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi}\int_R^{R+W}\frac{dy}{y} = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi}\ln\frac{R+W}{W}$$

با استفاده از قاعده دست راست، جهت نیرو بـه سـمت راسـت است.

(ب) $$F = \frac{(4\pi\times10^{-7})(45\times10^3)^2}{2\pi}\ell n\frac{96.7+1.2}{(6.7)}6672.6\,\text{N}$$
$$F = ma \Rightarrow 6672.6 = (10\times10^{-3})a \Rightarrow a = 6.67\times10^5\ \text{m/s}^2$$
$$v^2 - v_0^2 = 2aL \Rightarrow v = \sqrt{2aL}$$
$$v = \sqrt{2(6.67\times10^5)(4)} = 2.31\times10^3\ \text{m/s}$$

۹۱- نشان دهید که میدان مغناطیـسی یکنواخـت $\vec{B}$ در هنگـام حرکت عمود بـر $\vec{B}$ ، یعنـی در امتـداد پیکـان افقـی در شـکل ۲۹-۸۹، نمی‌تواند به طور ناگهانی صفر شود (همان‌طور کـه در نبود خطهای میدان در طرف راست نقطـهٔ a در شـکل بـه نظـر می‌رسد). (*راهنمایی*: قانون آمپر را در مسیر مستطیل شکل نشان داده شده با خط‌چین به کار بریـد.) در آهنربـاهـای واقعـی «اثـر کناره‌ها» خطهای میدان مغناطیسی همیشه رخ می‌دهد، که معنای آن این است که $\vec{B}$ به طور تدریجی به صفر می‌رسد. خطهـای میدان را در شکل اصلاح کنید تا وضعیت واقعـی‌تـری را نـشان بدهند.

Scanned by CamScanner



شکل ۲۵-۸۹ مسئلهٔ ۹۱

حل: در حلقه آمپری که با خط‌چین نشان داده شده است جریان خالص برابر صفر است و بنابراین $\oint \vec{B}\cdot\vec{ds}=0$ می‌شود. حال این انتگرال را درامتداد اضلاع حلقه آمپری محاسبه می‌کنیم. چون در ضلع‌های بالایی و پایینی حلقه، میدان مغناطیسی $\vec{B}$ بر $\vec{ds}$ عمود است و سهم این دو قسمت در انتگرال صفر است. فرض کرده‌ایم که در بیرون از آهنربا میدان صفر است و بنابراین ضلع سمت راست حلقه آمپر نیز در انتگرال بالا سهمی ندارد. پس اگر ℓ طول ضلع سمت چپ باشد انتگرال بالا به صورت $\oint \vec{B}\cdot\vec{ds}=B\ell$ در می‌آید. از طرفی طبق قانون آمپر $\oint \vec{B}\cdot\vec{ds}=0$ می‌شود. با توجه به اینکه نه B نه ℓ برابر صفر نیستند، بنابراین نتیجه بالا در تناقض با قانون آمپر است. تنها توجیه این است که میدان بیرون آهنربا برابر صفر نباشد. پس، آنچه که برای خطوط میدان آهنربا نشان می‌دهند، صحیح نیست. در واقع خطوط میدان به سمت بیرون شکم می‌دهند و چگالی آنها به تدریج و نه بی‌درنگ کاهش می‌یابد.

۹۲- نشان دهید که اگر ضخامت چنبره‌ای خیلی کوچکتر از شعاع انحنای آن باشد (چنبره خیلی نازک)، آنگاه معادلهٔ ۲۵-۲۴ در مورد میدان داخل چنبره به معادلهٔ ۲۵-۲۳ برای میدان داخل سیملوله تبدیل می‌شود. توضیح دهید که چرا این نتیجه قابل انتظار است؟

حل: میدان درون چنبره از رابطه زیر به دست می‌آید

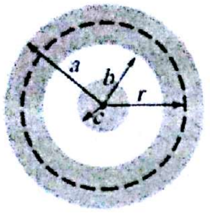
$$B=\frac{\mu_0 iN}{2\pi r}$$

اگر چنبره خیلی نازک باشد آنگاه تفاوت چندانی میان شعاع‌های داخلی و خارجی چنبره نیست و $L=2\pi r$ را می‌توان تقریباً برابر طول چنبره گرفت بنابراین داریم:

$$B=\mu_0 i\left(\frac{L}{N}\right)=\mu_0 in$$

که همان میدان داخل سیملوله است.

۹۳- شکل ۲۵-۹۰ مقطع یک کابل هم محور رسانای دراز را نشان می‌دهد که شعاعهای آن (a,b,c) است. جریانهای مساوی ولی در خلاف جهت i به طور یکنواخت در دو رسانا توزیع شده‌اند. عبارتهایی برای $B(r)$ با فاصلهٔ شعاعی r در گستره‌های (الف) $r<c$، (ب) $c<r<b$، (پ) $b<r<a$ و (ت) $r>a$، به دست آورید. (ث) این عبارتها را در تمام موارد خاص که می‌تواند رخ دهد آزمایش کنید. (ج) فرض کنید که $a=2/0\,\text{cm}$ ، $b=1/8\,\text{cm}$ ، $c=0/40\,\text{cm}$ و $i=120\,\text{A}$ باشد، تابع $B(r)$ را در گسترهٔ $0<r<3\text{cm}$ رسم کنید.



شکل ۲۵-۹۰ مسئلهٔ ۹۳

حل: (الف) حلقهٔ آمپری به شعاع $r<c$ در نظر می‌گیریم و قانون آمپر رابه کار می‌بندیم

$$\oint \vec{B}_1\cdot\vec{ds}=\mu_0 i_{inc}\Rightarrow B_1(2\pi r)=\mu_0\frac{i}{\pi c^2}\pi r^2$$

$$B_1=\frac{\mu_0 ir}{2\pi c^2}$$

(ب) $c<r<b$

$$\oint \vec{B}_2\cdot\vec{ds}=\mu_0 i_{inc}\Rightarrow B_2(2\pi r)=\mu_0 i$$

$$B_2=\frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

(پ) $b<r<a$

$$\oint \vec{B}_3\cdot\vec{ds}=\mu_0 i_{inc}\Rightarrow B_3(2\pi r)=\mu_0(i-i')$$

که $i'=\frac{i}{\pi(a^2-b^2)}\pi(r^2-b^2)$ لذا داریم:

$$B_3=\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\left(\frac{a^2-r^2}{a^2-b^2}\right)$$

(ت) $r>a$

$$\oint \vec{B}_4\cdot\vec{ds}=\mu_0 i_{inc}\Rightarrow \mu_0(i-i)=0\Rightarrow B_4=0$$

(ث) حالت‌های ویژه قسمت (الف) چنین می‌شود:

$$r=0\Rightarrow B_1=0$$

$$r=c\Rightarrow B=\frac{\mu_0 i}{2\pi c}$$

حالت‌های ویژه قسمت (ب) چنین می‌شود:

$$r=c\Rightarrow B=\frac{\mu_0 i}{2\pi c}$$

$$r=b\Rightarrow B=\frac{\mu_0 i}{2\pi c}$$

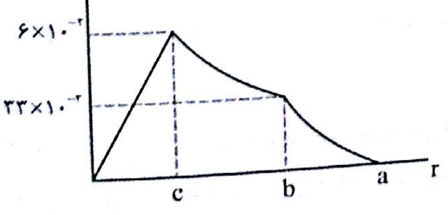
حالت‌های ویژه قسمت (پ) چنین می‌شود:

$$r=b\Rightarrow B=\frac{\mu_0 i}{2\pi c}$$

$$r=a\Rightarrow B=0$$

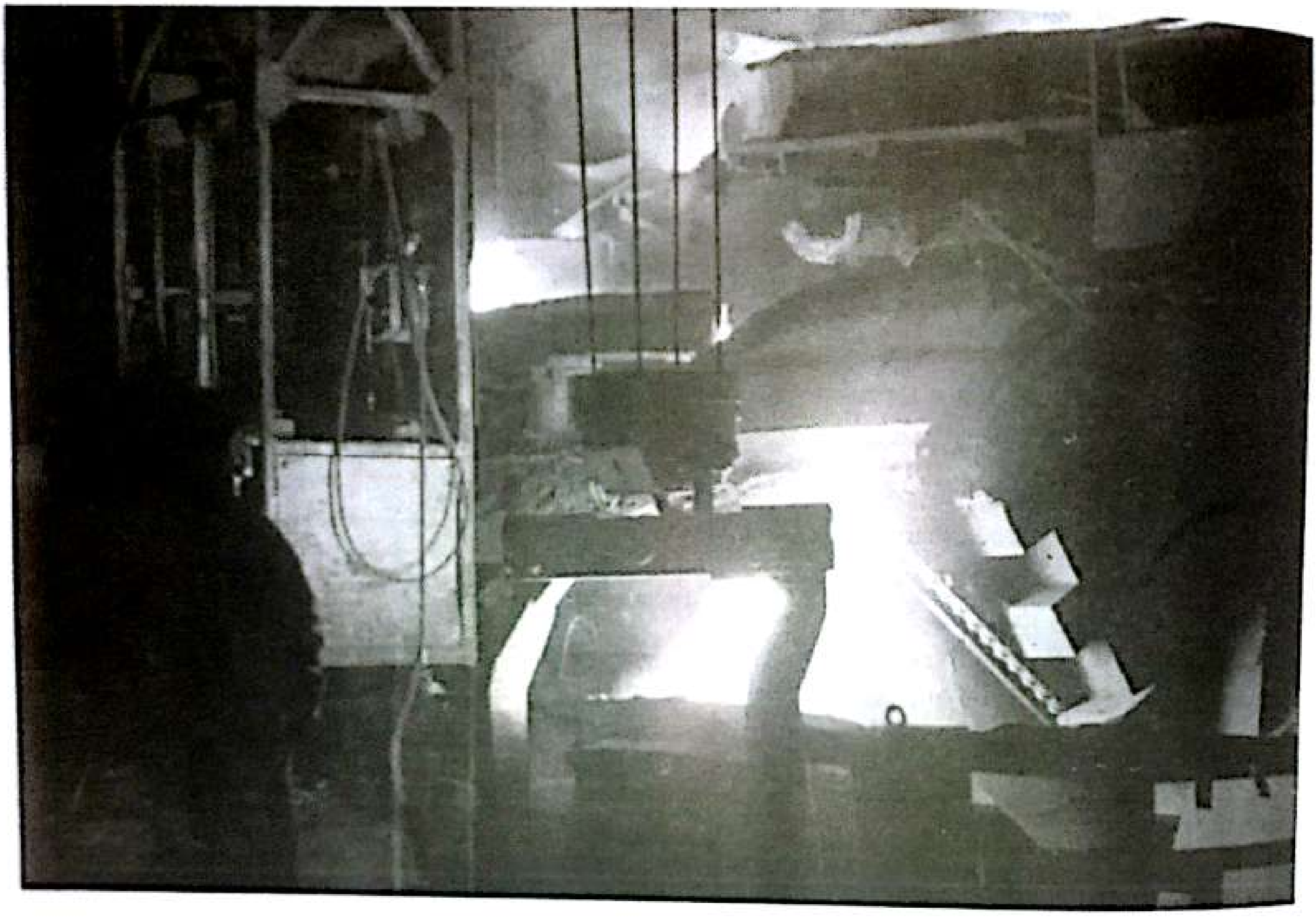
همانطور که مشاهده می‌کنیم حالت‌های مرزی بر هم منطبق می‌شوند.

(ج)



Scanned by CamScanner

۲۶ القا و القاییدگی



طراحیpdf (مظاهری)

پل ارتباطی 09130676392

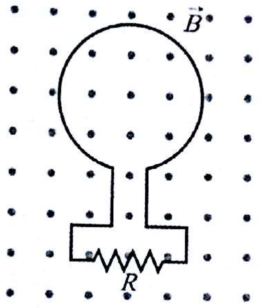
کانال ارتباطی @T_A_F_gut

آیدی ارتباطی @T_a_fizik_96

Scanned by CamScanner

بخش ۲۶-۴ قانون لنز

●۱- در شکل ۲۶-۳۷، شار مغناطیسی که از حلقه می‌گذرد با رابطهٔ $\Phi_B = 6.0t^2 + 7.0t$ افزایش می‌یابد که در آن Φ_B برحسب میلی‌وبر و t برحسب ثانیه است. (الف) وقتی $t = 2.0s$ است، بزرگی emf القایی در حلقه چقدر است؟ (ب) جهت جریان در R به سمت راست است یا چپ؟



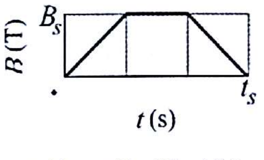
شکل ۲۶-۳۷ مسئلهٔ ۱

حل: (الف)

$$\varepsilon = \left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right| = 12t + 7\Big|_{t=2s} = 12(2) + 7 = 31 mV$$

(ب) چون شار در حال افزایش است جهت جریان باید طوری باشد که مانع این افزایش گردد و میدانی در خلاف جهت میدان اصلی ایجاد نماید. چون میدان اصلی به سمت خارج صفحه است لذا میدان القایی باید به سمت داخل صفحه باشد در نتیجه جریان باید ساعتگرد و جهت جریان در R از راست به چپ باشد.

●۲- یک حلقهٔ سیمی به شعاع ۱۲cm و مقاومت ۸/۵Ω در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ که بزرگی آن به ترتیب شکل ۲۶-۳۸ تغییر می‌کند قرار دارد. مقیاس محور قائم با $B_s = 0.50T$ و مقیاس محور افقی با $t_s = 6.00s$ مشخص شده است. صفحهٔ حلقه بر $\vec{B}$ عمود است. در بازه‌های زمانی (الف) ۰ تا ۲/۰s ، (ب) ۲/۰s تا ۴/۰s و (پ) ۴/۰s تا ۴/۰s، emf القا شده در حلقه چقدر است؟



شکل ۲۶-۳۸ مسئلهٔ ۲

حل:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -A\frac{dB}{dt} = -\pi r^2\frac{dB}{dt}$$

به ازای $0 < t < 2s$ از روی نمودار شکل ۲۶-۳۶ شیب منحنی (dB/dt) را تعیین کرد، در نتیجه داریم

$$\varepsilon = -\pi(0.12)^2\left(\frac{0.5-0}{2}\right) = -1.12\times10^{-2}\ V$$

(ب) در $2s < t < 4s$، $dB/dt = 0$ و در نتیجه $\varepsilon = 0$ است.

(پ) به ازای $4s < t < 6s$ داریم:

$$\varepsilon = -\pi(0.12)^2\left(\frac{0-0.5}{2}\right) = 1.12\times10^{-2}\ V$$

●۳- حلقهٔ کوچکی به مساحت $6.8\ mm^2$ داخل سیملولهٔ درازی که دارای ۸۵۴دور/cm و حامل جریان متغیر سینوسی i با دامنهٔ ۱/۲۸A و بسامد زاویه‌ای ۲۱۲rad/s است، قرار دارد. محور مرکزی حلقه و سیملوله بر هم منطبق‌اند. دامنهٔ emf القا شده در حلقه چقدر است؟

حل: جریان سیملوله را به‌صورت $i = i_0 \sin\omega t$ درنظر می‌گیریم.

$$B = \mu_0 ni$$

$$\Phi_B = BA = B(\pi R^2) = \mu_0 ni(\pi R^2)$$

$$\varepsilon = \frac{d\Phi_B}{dt} = \mu_0 n\pi R^2\frac{di}{dt} = \mu_0 n\pi R^2 i_0\omega\cos\omega t$$

که با قرار دادن مقادیر داده در دامنه $\varepsilon_m = \mu_0 n\pi R^2 i_0\omega$ خواهیم داشت $\varepsilon_m = 1.98\times10^{-4}\ V$

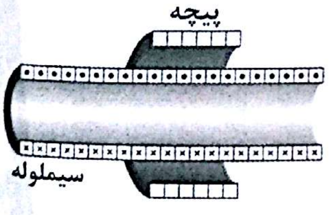
●۴- یک مادهٔ رسانای کشسان را می‌کشیم و آن را به شکل حلقهٔ دایره‌ای به شعاع ۱۲۰/cm در می‌آوریم. حلقه در یک میدان مغناطیسی یکنواخت ۰/۸۰۰ قرار داده می‌شود به طوری که صفحهٔ آن عمود برمیدان است. وقتی آن را رها کنیم، شعاع حلقه با آهنگ لحظه‌ای ۷۵/۰cm/s شروع به کوچک شدن می‌کند. در آن لحظه emf القا شده در حلقه چقدر است؟

حل: $\Phi_B = BA = B\pi r^2$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -2B\pi r\frac{dr}{dt}$$

$$= -2\pi(0.8)(0.12)(0.75) = 0.452V$$

●۵- در شکل ۲۶-۳۹ یک پیچهٔ ۱۲۰ دور با شعاع ۱/۸cm و مقاومت ۵/۳Ω با سیملوله‌ای با ۲۲۰ دور بر سانتی‌متر و قطر ۳/۲cm هم‌محور است. جریان در سیملوله در بازهٔ زمانی $\Delta t = 25s$ از ۱/۵A به صفر کاهش می‌یابد. در طی زمان Δt جریان القا شده در حلقه چقدر است؟



شکل ۲۶-۳۹ مسئلهٔ ۵

حل: مشاهده می‌شود که emf کل القا شده در پیچه برابر است با

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -NA\left(\frac{dB}{dt}\right) = -NA\frac{d}{dt}(\mu_0 ni)$$

$$= -N\mu_0 n(\pi r^2)\frac{di}{dt}$$

$$= -(120)(4\pi\times10^{-7})(22000)\pi(0.016m)^2\left(\frac{1.5}{0.025}\right)$$

$$= -0.16V$$

Scanned by CamScanner

آنگاه جریان القا شده در پیچه از رابطه زیر به دست می‌آید

$$i=\frac{|\varepsilon|}{R}=\frac{۰/۱۶}{۵/۳}=۰/۰۳$$

۶●- یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ بر صفحهٔ حلقهٔ دایره‌ای به قطر ۱۰cm عمود است. این حلقه از سیمی مسی به قطر ۲/۵mm و مقاومت ویژهٔ $۱/۶۹\times۱۰^{-۸}\,\Omega.m$ تشکیل شده است. با چه آهنگی بزرگی $\vec{B}$ باید تغییر کند تا یک جریان ۱۰A در حلقه القا شود؟

حل: برای مقاومت حلقه داریم $R=\rho\frac{L}{A}$ که در آن $\rho=۱/۶\times۱۰^{-۸}\,\Omega m$ و

$$L=۲\pi\frac{d}{۲}=\pi d=\pi(۰/۱)=۰/۳۱۴$$

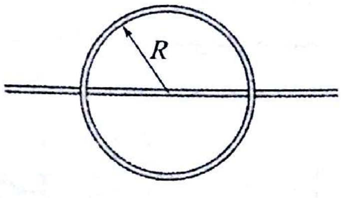
$$A'=\pi\left(\frac{d'}{۲}\right)^{۲}=\pi\left(\frac{۲/۵\times۱۰^{-۳}}{۲}\right)^{۲}=۴/۹۱\times۱۰^{-۶}$$

به این ترتیب داریم $R=۱/۱\times۱۰^{-۳}\,\Omega$. حال با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت

$$i=\frac{|\varepsilon|}{R}=\frac{|d\Phi B/dt|}{R}=\frac{|AdB/dt|}{R}=\frac{\pi r^{۲}}{R}\frac{dB}{dt}$$

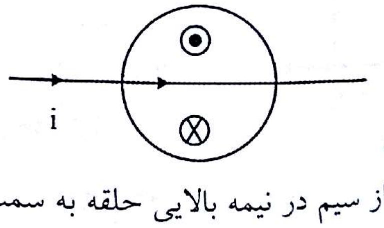
$$\frac{dB}{dt}=\frac{iR}{\pi r^{۲}}=\frac{(۱۰)(۱/۱\times۱۰^{-۳})}{\pi(۰/۰۵)^{۲}}=۱/۳۹\ \text{T/s}$$

۷●- در شکل ۲۶-۴۰ سیمی به شکل حلقهٔ دایره‌ای بسته با شعاع R=۲/۰m و مقاومت ۴/۰Ω در آمده است. مرکز دایره روی یک سیم مستقیم دراز قرار دارد؛ در زمان $t=۰$ جریان در سیم مستقیم ۵/۰A و به سمت راست است. از این لحظه به بعد، جریان با رابطهٔ $i=۵/۰\text{A}-(۲/۰\text{A/s}^{۲})t^{۲}$ تغییر می‌کند. (سیم دراز به گونه‌ای عایقبندی شده است که تماس الکتریکی بین آن و حلقهٔ سیمی وجود ندارد.) بزرگی جریان القا شده در حلقه در زمان $t>۰$ چقدر است؟



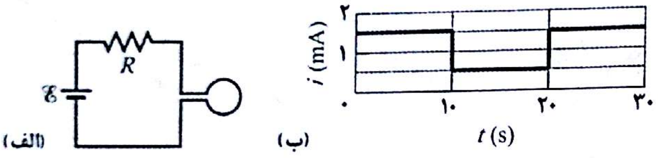
شکل ۲۶-۴۰ مسئلهٔ ۷

حل:



میدان حاصل از سیم در نیمه بالایی حلقه به سمت خارج و در نیمه پایینی به سمت داخل صفحه است و بنا به تقارن دو نیمدایره، شار کل صفر است و نیروی محرکه القایی نیز صفر است.

۸●- شکل ۲۶-۴۱ الف مداری را نشان می‌دهد که شامل یک باتری آرمانی با emf برابر $\varepsilon=۶/۰۰\,\mu\text{V}$، یک مقاومت R و یک حلقه سیم کوچک به مساحت ۵/۰cm^{۲} است. در بازهٔ زمانی $t=۱۰$ s تا $t=۲۰$ s یک میدان مغناطیسی خارجی از حلقه می‌گذرد. میدان یکنواخت است و جهت آن به سمت داخل صفحه در شکل ۲۶-۴۱ الف قرار دارد و بزرگی میدان با رابطهٔ $B=at$ داده می‌شود که در آن B برحسب تسلا، a ثابت و t برحسب ثانیه است. شکل ۲۶-۴۱ ب جریان i را پیش از، در حین و پس از برقراری میدان خارجی نشان می‌دهد، در معادلهٔ مربوط به بزرگی میدان ثابت a را به دست آورید.



شکل ۲۶-۴۱ مسئلهٔ ۸

حل: با توجه به نمودار شکل ب دیده می‌شود که قبل از اعمال میدان در $۰<t<۱۰s$ جریان ناشی از باتری برابر ۱/۵mA بوده است

$$R=\frac{\varepsilon}{i}=\frac{۶\times۱۰^{-۶}}{۱/۵\times۱۰^{-۳}}=۴\times۱۰^{-۳}\,\Omega$$

همچنین دیده می‌شود که در بازه $۱۰s<t<۲۰s$ جریان مدار ۰/۵mA است پس نیروی محرکه القایی در سیم پیچ برابر است با

$$\varepsilon-Ri-\varepsilon_{\text{القایی}}=۰$$

$$۶\times۱۰^{-۶}-(۴\times۱۰^{-۳})(۰/۵\times۱۰^{-۳})-\varepsilon_{\text{القایی}}=۰$$

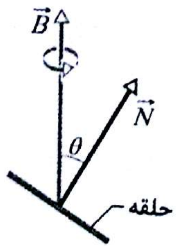
$$\Rightarrow\varepsilon_{\text{القایی}}=۴\times۱۰^{-۶}\ \text{V}$$

حال با استفاده از قانون القا فارادی می‌توانیم ضریب a را به دست آوریم

$$\varepsilon_{\text{القایی}}=\frac{d\Phi_B}{dt}=-A\frac{dB}{dt}=-Aa=-(۵\times۱۰^{-۶})a$$

که خواهیم داشت $a=۰/۰۰۸\text{T/s}$.

۹●- در شکل ۲۶-۴۲ یک حلقهٔ سیمی دایره‌ای به قطر ۱۰cm (کنارهٔ آن دیده می‌شود) طوری در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به بزرگی ۰/۵۰T قرار داده می‌شود که بردار عمود $\vec{N}$ بر آن با میدان زاویهٔ θ=۳۰° می‌سازد. سپس حلقه با آهنگ ثابت ۱۰۰ دور بر دقیقه به گونه‌ای چرخانده می‌شود که $\vec{N}$ روی مخروطی حول میدان مغناطیسی می‌چرخد؛ در طی این فرایند زاویهٔ θ تغییر نمی‌کند. emf القا شده در حلقه چقدر است؟

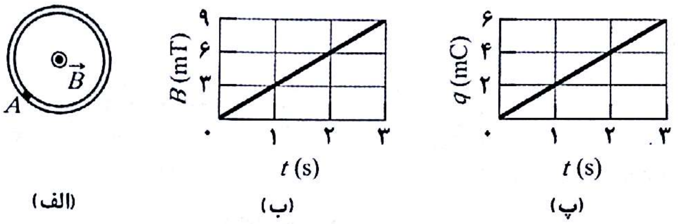


شکل ۲۶-۴۲ مسئلهٔ ۹

Scanned by CamScanner

حل: در این مسئله داریم $\Phi_B = BA\cos\theta$ و چون هیچ یک از سه کمیت A، B و θ تغییر نمی‌کنند، شار ثابت بوده و نیروی محرکه القایی صفر است.

••**۱۰-** در شکل ۲۶-۴۳ الف، بزرگی میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ با زمان t مطابق شکل ۲۶-۴۳ ب افزایش می‌یابد. یک حلقهٔ رسانای دایره‌ای به مساحت $۸/۰\times۱۰^{-۴}\ m^۲$ در صفحهٔ کاغذ در این میدان قرار دارد. مقدار بار q که از نقطهٔ A روی حلقه می‌گذرد بر حسب تابعی از t در شکل ۲۶-۴۳ پ نشان داده شده است. مقاومت حلقه چقدر است؟



شکل ۲۶-۴۳ مسئلهٔ ۱۰

حل: از شکل ب دیده می‌شود که dB/dt (شیب خط) برابر است با

$$\frac{dB}{dt}=\frac{۹\times۱۰^{-۳}}{۳}=۲\times۱۰^{-۳}\ T/s$$

با توجه به قانون فارادی داریم

$$\varepsilon=\left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right|=A\frac{dB}{dt}=(۸\times۱۰^{-۴})(۳\times۱۰^{-۳})=۲/۴\times۱۰^{-۶}\ V$$

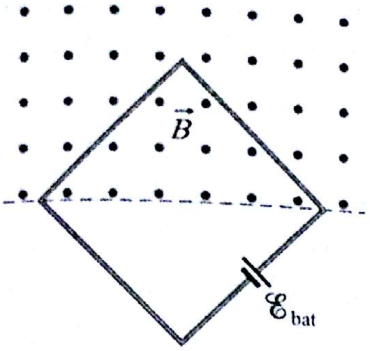
از طرف دیگر از شکل (پ) جریان عبوری i از حلقه با dq/dt (شیب خط) داده می‌شود

$$i=\frac{dq}{dt}=\frac{۶\times۱۰^{-۳}}{۳}۲\times۱۰^{-۳}\ A$$

آنگاه داریم

$$R=\frac{\varepsilon}{i}=\frac{۲/۴\times۱۰^{-۶}}{۲\times۱۰^{-۳}}=۰/۰۰۱۲\Omega$$

••**۱۱-** یک حلقه سیم مربعی شکل به ضلع ۲/۰۰m عمود بر یک میدان مغناطیسی یکنواخت است و همان‌طور که در شکل ۲۶-۴۴ مشاهده می‌شود نصف حلقه در میدان قرار دارد. حلقه شامل یک باتری آرمانی با emf برابر $\mathscr{E}=۲۰/۰V$ است. اگر بزرگی میدان مغناطیسی با زمان با رابطهٔ $B=۰/۰۴۲۰-۰/۸۷۰t$ که B برحسب تسلا و t برحسب ثانیه است. تغییر کند، (الف) emf خالص در مدار چقدر است؟ (ب) جهت و جریان (خالص) دور حلقه چیست؟



شکل ۲۶-۴۴ مسئلهٔ ۱۱

حل: (الف)

$$\Phi_B=BA=\frac{a^۲}{۲}B$$

$$\varepsilon=-\frac{d\Phi_B}{dt}=-\frac{a}{۲}\frac{dB}{dt}(۰/۰۴۲-۰/۸۷t)$$

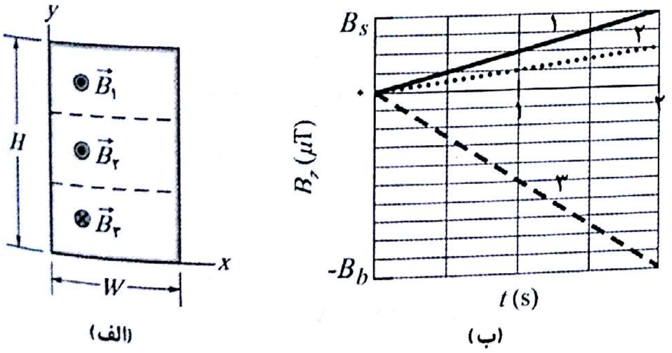
$$=-\frac{(۲)^۲}{۲}(-۰/۸۷)=۱/۷۴V$$

میدان مغناطیسی خارجی به سمت رو به بیرون صفحه و در حال کاهش است، در نتیجه شار در حال کاهش است. جریان القایی پادساعتگرد باید باشد تا میدان را تقویت کند. در نتیجه emf القا شده در مدار همان جهت emf را خواهد داشت و بنابراین emf کل برابر است با:

$$\varepsilon_{\text{کل}}=\varepsilon_{\text{القایی}}+\varepsilon_{\text{باتری}}=۱/۷۴+۲۰=۲۱/۷\ V$$

(ب) جریان خالص در جهت *emf* کل، یعنی پاد ساعتگرد است.

••**۱۲-** شکل ۲۶-۴۵ الف سیمی را نشان می‌دهد که به شکل مستطیل $(W=۲۰cm, H=۳۰cm)$ است و ۵/۰mΩ مقاومت دارد. سطح آن به سه ناحیهٔ یکسان با میدانهای مغناطیسی $B_۱$، $B_۲$ و $B_۳$ تقسیم شده است. میدانها در همهٔ ناحیه‌ها یکنواخت است و همان‌طور که مشخص شده به سمت خارج و داخل صفحه هستند. شکل ۲۶-۴۵ ب مؤلفه‌های z مربوط به B_z سه میدان با زمان t را به دست می‌دهد، مقیاس محور قائم با $B_b=-۲/۵B_s$ و $B_z=۴/۰\mu T$ و مقیاس محور افقی با $t_s=۲/۰s$ مشخص شده‌اند مطلوب است. (الف) بزرگی و (ب) جهت جریان القا شده در سیم.



شکل ۲۶-۴۵ مسئلهٔ ۱۲

حل: (الف) چون شار، حاصلضرب داخلی بردار میدان مغناطیسی و بردار سطح است، و جهت میدان مغناطیسی دو تا از سیم‌ها با سیم سوم مخالف است لذا خواهیم داشت

Scanned by CamScanner

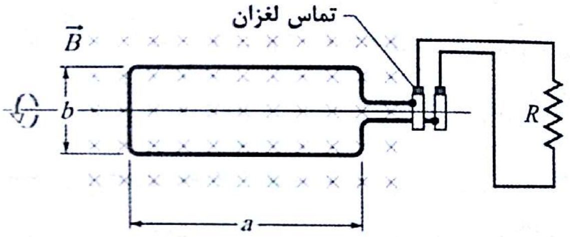
$$\varepsilon = -\left(A\frac{dB_1}{dt} + A\frac{dB_2}{dt} - A\frac{dB_3}{dt}\right) = -A\left(\frac{dB_1}{dt} + \frac{dB_2}{dt} + \frac{dB_3}{dt}\right)$$
$$= -\frac{HW}{3}\left(\frac{dB_1}{dt} + \frac{dB_2}{dt} - \frac{dB_3}{dt}\right)$$
$$= -\frac{(0/3)(0/2)}{3}\left[\frac{(4-0)\times 10^{-6}}{2} + \frac{(2-0)\times 10^{-6}}{2} - \left|\frac{-10-0}{2}\right|\right]$$
$$= 4\times 10^{-8}\ \text{V}$$

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{4\times 10^{-8}}{5\times 10^{-3}} = 8\times 10^{-6}\ \text{A} = 8\,\mu\text{A}$$

(ب) با استفاده از قانون نشر نتیجه می‌گیریم که جهت جریان القا شده پادساعتگرد است.

۱۳۰۰- پیچهٔ مستطیل شکلی دارای N دور، طول a و پهنای b است و همان‌طور که شکل ۲۶-۴۶ نشان می‌دهد با بسامد f در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ می‌چرخد. سرهای پیچه به استوانه‌های چرخانی وصل است که مقابل آنها جاروهای فلزی برای برقراری تماس قرار دارند. (الف) نشان دهید که emf القا شده در پیچه (به صورت تابعی از زمان t) از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\varepsilon = 2\pi f NabB\sin(2\pi ft) = \varepsilon_0 \sin(2\pi ft)$$



شکل ۲۶-۴۶ مسئلهٔ ۱۳

این اساس مولد جریان متناوب تجارتی است. (ب) وقتی حلقه با ۶۰/۰ دور بر ثانیه در میدان مغناطیسی یکنواخت ۰/۵۰۰T می‌چرخد، مقدار Nab باید چقدر باشد تا emf برابر ε_0=۱۵۰V را به دست دهد؟

حل: داریم $\theta = \omega t$ و $\omega = 2\pi f$ و شار مغناطیسی از رابطه زیر به دست می‌آید

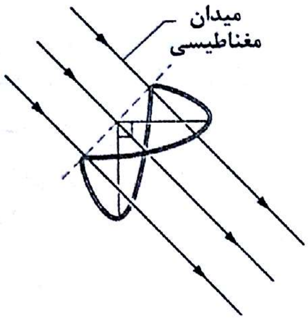
$$\Phi_B = NBA\cos\theta = NBA\cos Wt = NBA\cos 2\pi ft$$
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = NBab2\pi f\sin 2\pi ft = \varepsilon_0 \sin 2\pi ft$$

که در آن $\varepsilon_0 = 2\pi fBNab$ است.

(ب)

$$Nab = \frac{\varepsilon_0}{2\pi fB} = \frac{150}{2\pi(60)(0/5)} = 0/796\,\text{m}^2$$

۱۴۰۰- شکل ۲۶-۴۷ یک حلقهٔ بسته از سیم شامل یک جفت نیمدایرهٔ یکسان با شعاع ۳/۷cm است که در دو صفحهٔ عمود بر هم قرار دارند. حلقه به این صورت شکل می‌گیرد که حلقهٔ دایره‌ای تختی را در امتداد قطرش آنقدر تا می‌کنیم تا دو نیمه بر هم عمود شوند. یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به بزرگی ۷۶mT بر قطر تا شده عمود است و با صفحه‌های نیمدایره‌ای زاویه‌های یکسان (۴۵°) می‌سازد. در طی بازهٔ زمانی ۴۵ms ، میدان مغناطیسی با آهنگی یکنواخت به صفر کاهش می‌یابد. در طی این بازهٔ زمانی، مطلوب است تعیین (الف) بزرگی و (ب) جهت (ساعتگرد یا پاد ساعتگرد وقتی که در امتداد جهت $\vec{B}$ نگاه کنیم) emf القایی در حلقه.



شکل ۲۶-۴۷ مسئلهٔ ۱۴

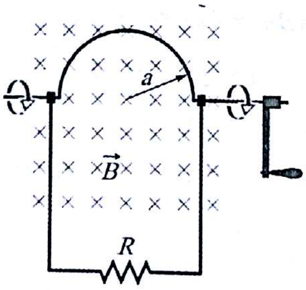
حل: با کمی دقت مشاهده می‌شود که در هر حال دو شار مغناطیسی در حال عبور از حلقه خم شده است و لذا شار خالص عبوری چنین می‌شود

$$\Phi_B = 2BA\cos 45° = 2B\left(\pi r^2/2\right)(\cos 45°) = \pi r^2 B/\sqrt{2}$$

اکنون از قانون القا فارادی داریم

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\pi r^2 B}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi r^2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)$$
$$= -\frac{\pi(3/7\times 10^2)}{\sqrt{2}}\left(\frac{0-76\times 10^{-3}}{4/5\times 10^{-3}}\right) = 5/13\times 10^{-2}\ \text{V}$$

۱۵۰۰- در شکل ۲۶-۴۸، سیم سفتی به شکل نیمدایره‌ای به شعاع a=۲/۰cm خم شده است و با تندی زاویه‌ای ثابت ۴۰ دور بر ثانیه در میدان مغناطیسی یکنواخت ۲۰mT می‌چرخد. مطلوب است محاسبهٔ (الف) بسامد و (ب) دامنهٔ emf القا شده در حلقه.



شکل ۲۶-۴۸ مسئله ۱۵

حل: (الف)

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{(40\frac{\text{rev}}{\text{s}})(2\pi)}{2\pi} = 40\,\text{Hz}$$

(ب)

$$\Phi_B = BA\cos\theta = B\left(\frac{\pi r^2}{2}\right)\cos\omega t = B\left(\frac{\pi r^2}{2}\right)\cos 2\pi ft$$
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = B\left(\frac{\pi r}{2}\right)^2 (2\pi f)\sin 2\pi ft$$

Scanned by CamScanner

در این صورت دامنه emf برابر است با

$$\varepsilon_m = B\pi^۲ a^۲ f = (۰/۰۲)\pi^۲(۰/۰۲)^۲(۴۰) = ۳/۲\times ۱۰^{-۳}\ \text{V}$$

۱۶●● – در یک مکان معین، میدان مغناطیسی زمین دارای بزرگی $B=۰/۵۹۰$ گاوس است و با زاویهٔ $۷۰/۰^\circ$ نسبت به افق و به سمت پایین قرار دارد. یک پیچهٔ دایره‌ای افقی تخت سیمی با شعاع ۱۰/۰cm دارای ۱۰۰۰ دور و مقاومت کل ۸۵/۰Ω است. پیچه به طور متوالی به یک آمپرسنج با مقاومت ۱۵۰Ω متصل است. پیچه نیم دور حول قطر می‌چرخد به طوری که دوباره افقی می‌شود. در طی این چرخش چقدر بار از آمپرسنج می‌گذرد؟

حل:

$$\theta = ۹۰^\circ - ۷۰^\circ = ۲۰^\circ$$

$$\Phi_B = NBA\cos\theta$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{NBA[\cos\theta-(-\cos\theta)]}{\Delta t} = -\frac{۲NBA\cos\theta}{\Delta t}$$

با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$|\varepsilon| = Ri = R\frac{\Delta q}{\Delta t} \qquad \frac{۲NBA\cos\theta}{\Delta t} = R\Delta q$$

$$\Delta q = \frac{۲NBA\cos\theta}{R} = \frac{(۲)(۱۰۰۰)(۰/۵۹\times۱۰^{-۴})(۰/۱)^۲\cos ۲۰^\circ}{۸۵+۱۴۰}$$

$$\Delta q = ۱/۵۵\times۱۰^{-۵}\ \text{C}$$

۱۷●● – یک مولد الکتریکی شامل ۱۰۰ دور سیم است که به شکل یک حلقهٔ مستطیلی ۵۰/۰cm در ۳۰/۰cm آمده است و به طور کامل در یک میدان مغناطیسی یکنواخت به بزرگی $B=۳/۵۰$T قرار دارد. $\vec{B}$ در ابتدا بر صفحهٔ پیچه عمود است. وقتی حلقه ۱۰۰۰ دور بر دقیقه حول محوری عمود بر $\vec{B}$ بچرخد، مقدار بیشینه emf تولید شده چقدر است؟ ILW

حل:

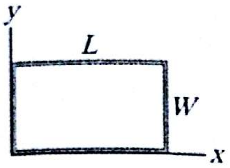
$$\Phi_B = NBA\cos\theta = NBA\cos\omega t = NBA\cos ۲\pi f t$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = NBA۲\pi f \sin ۲\pi f t$$
$$= (۱۰۰)(۳/۵)(۰/۱۵)^۲(۲\pi)(۱۶/۷)\sin ۲\pi f t$$
$$(۵/۵\times۱۰^۳)\sin ۲\pi f t$$

در نتیجه بیشینه emf تولید شده یعنی دامنه ولتاژ القایی برابر است با

$$\varepsilon_m = ۵/۵\times۱۰^۳\ V$$

۱۸●● – در شکل ۲۶-۴۹ یک حلقه سیم به ابعاد $L=۴۰/۰$cm و $W=۲۵/۰$cm در یک میدان مغناطیسی $\vec{B}$ قرار دارد. مطلوب است (الف) بزرگی ε و (ب) جهت (ساعتگرد یا پادساعتگرد – یا هیچ کدام اگر $\varepsilon=۰$ است) emf القا شده در حلقه در صورتی که $\vec{B}=(۴/۰۰\times۱۰^{-۲}\ \text{T/m})y\hat{k}$ باشد. اگر $\vec{B}=(۶/۰۰\times۱۰^{-۲}\ \text{T/s})t\hat{k}$ باشد، (پ) ε و (ت) جهت آن چیست؟ اگر $\vec{B}=(۸/۰۰\times۱۰^{-۲}\ \text{T/m·s})yt\hat{j}$ باشد، (ث) ε و (ج) جهت آن چیست؟ اگر $\vec{B}=(۳/۰۰\times۱۰^{-۲}\ \text{T/m.s})xt\hat{J}$ باشد، (چ) ε و (ح) جهت آن چیست؟ در صورتی که $\vec{B}=(۵/۰۰\times۱۰^{-۲}\ \text{T/m·s})yt\hat{i}$ باشد، (خ) ε و (د) جهت آن چیست؟



شکل ۲۶-۴۹ مسئلهٔ ۱۸

حل: (الف) و (ب) در اینجانب $dB/dt=۰$ و چون نه مساحت و نه زاویه عمود بر سطح نیز تغییرنمی‌کنند، $\varepsilon=۰$ می‌شود و در نتیجه جریان القایی نیز صفر است.

(پ)
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -A\frac{dB}{dt} = -LW\frac{dB}{dt}$$
$$= -(۰/۴)(۰/۲۵)(۰/۰۶) = -۶\times۱۰^{-۳}\ \text{V}$$

(ت) میدان خارجی افزایشی و برون سو است. بنابراین، طبق قانون لنز، جریان القایی باید به گونه‌ای باشد که این میدان را تضعیف کند. جهت انجام این امر جریان القایی باید ساعتگرد باشد تا میدان حاصل از آن درون سو و میدان خارجی را تضعیف کند. پس، جریان القایی ساعتگرد است.

(ث)

$$\Phi_B = \int BdA = L\int Bdy = (۰/۴)(۸\times۱۰^{-۲})t\int_۰^{w=۰/۲۵} ydy$$
$$= (۰/۴)(۸\times۱۰^{-۲})\frac{۱}{۲}(۰/۲۵)^۲ t = ۱\times۱۰^۳\ \text{t}$$

و با استفاده از قانون القا فارادی داریم

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -۱\times۱۰^۳\ \text{V} \Rightarrow |\varepsilon| = ۱۰^{-۳}\ \text{mV}$$

(ج) و (چ) میدان در جهت $\hat{j}$ و عمود بر سطح در راستای $\hat{k}$ است. پس شار مغناطیسی عبوری از حلقه صفر و در نتیجه نیروی محرکه القایی برابر صفر بوده و لذا جریان القایی ایجاد نمی‌شود.

(خ) و (د) میدان در جهت $\hat{i}$ و عمود بر سطح در راستای $\hat{k}$ است. پس شار مغناطیسی عبوری از حلقه صفر و در نتیجه نیروی محرکه القایی برابر صفر بوده و لذا جریان القایی ایجاد نمی‌شود.

۱۹●● – صد دور سیم مسی (عایقبندی شده) دور یک هستهٔ استوانه‌ای چوبی با سطح مقطعی به مساحت $۱/۲\times۱۰^{-۳}\ \text{m}^۲$ پیچیده شده است. دو انتها به مقاومتی وصل شده‌اند. مقاومت کل مدار ۱۳/۰Ω است. اگر یک میدان مغناطیسی طولی یکنواخت خارجی در هسته از ۱/۶۰T در یک جهت به ۱/۶۰T را در جهت مقابل تغییر کند، در این تغییر چه مقدار بار از یک نقطه در مدار می‌گذرد؟ ILW

حل: با استفاده از قانون آمپر و همچنین قانون فارادی خواهیم داشت

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{۱}{R}\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Scanned by CamScanner

از طرف دیگر $q(t)=\int i\,dt$ است لذا با قرار دادن i در آن داریم

$$q(t) = -\frac{۱}{R}\int_{۰}^{t}\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{NA}{R}[B(۰)-B(t)]$$

$$= \frac{(۱۰۰)(۱/۲\times ۱۰^{-۳})}{۱۳}[۱/۶-(-۱/۶)] = ۲/۹۵\times ۱۰^{-۲}\ C$$

۲۰●●●- یک حلقهٔ مستطیلی ($۱/۵\ m^۲$ =مساحت) درمیدان مغناطیسی یکنواخت $B=۰/۲۰T$ می‌چرخد. وقتی زاویهٔ بین میدان و عمود بر صفحهٔ حلقه برابر $\pi/۲$ است و با $۰/۶۰ rad/s$ افزایش می‌یابد، emf القا شده در حلقه چقدر است؟

حل:

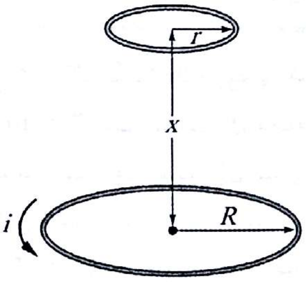
$$\Phi_B = BA\cos\theta$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = BA\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$$

که به ازای $\theta=\frac{\pi}{۲}$ برای $\sin\theta$ داریم

$$\varepsilon = (۰/۲)(۰/۱۵)\left(\sin\frac{\pi}{۲}\right)(۰/۶) = ۰/۰۱۸\ V$$

۲۱●●- شکل ۲۶-۵۰ دو حلقهٔ سیم موازی با محور مشترک را نشان می‌دهد. حلقهٔ کوچکتر (با شعاع r) بالای حلقهٔ بزرگتر (با شعاع R) و به فاصلهٔ $x \gg R$ قرار دارد. در نتیجه، میدان مغناطیسی حاصل از جریان پادساعتگرد i در حلقهٔ بزرگتر، تقریباً در سراسر حلقهٔ کوچکتر ثابت است. فرض کنید. که x با آهنگ ثابت $dx/dt=v$ افزایش می‌یابد. (الف) رابطه‌ای را برای شار مغناطیسی که‌از مساحت احاطه شده به وسیلهٔ حلقهٔ کوچکتر می‌گذرد برحسب تابعی از x به دست آورید. (راهنمایی: به معادلهٔ ۲۹-۲۷ نگاه کنید.) در حلقهٔ کوچکتر مطلوب است (ب) رابطه‌ای برای emf القایی و (پ) جهت جریان القایی. **SSM**



شکل ۲۶-۵۰ مسئلهٔ ۲۱

حل: (الف) میدان مغناطیسی حاصل از یک حلقه جریان در نقطه‌ای روی محور آن و در فاصله x از رابطه زیر به دست می‌آید

$$B = \frac{\mu_۰ i R^۲}{۲(R^۲+x^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

چون $x >> R$ است در مخرج از آن صرف‌نظر می‌کنیم، در نتیجه داریم:

$$B \approx \frac{\mu_۰ i R^۲}{۲x^۳}$$

که جهت آن طبق قاعده دست راست به سمت بالا است. این میدان از سطح حلقه کوچک عبور می‌کند

$$\Phi_B = BA = \frac{\mu_۰ i R^۲}{۲x^۳}(\pi r^۲)$$

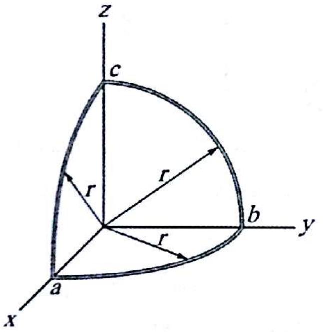
(ب) emf القا شده برابر است با:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\left[\frac{\mu_۰ i\pi r^۲ R^۲}{۲}\right]\frac{d}{dx}\left(\frac{۱}{x^۳}\right)$$

$$= -\left[\frac{\mu_۰ i\pi r^۲ R^۲}{۲}\right]\left(\frac{dx}{dt}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{۱}{x^۳}\right) = \frac{۳\mu_۰ i\pi r^۲ R^۲}{۲x^۴}$$

(پ) چون حلقه کوچک در حال دور شدن است لذا شاری که از آن می‌گذرد کاهش می‌یابد، بنابراین جهت جریان القایی باید به گونه‌ای باشد که میدان القایی میدان حلقه بزرگ را تقویت کند، لذا جهت جریان حلقه کوچکتر باید در همان جهت جریان حلقه بزرگتر یعنی پادساعتگرد باشد.

۲۲●●- سیمی همان‌طور که در شکل ۲۶-۵۱ نشان داده شده به سه قسمت دایره‌ای به شعاع $r=۱۰cm$ خم شده است. هر قسمت یک ربع دایره است، ab در صفحهٔ xy، bc در صفحهٔ yz و ca در صفحه zx قرار دارند. (الف) اگر میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ در جهت مثبت محور x باشد، وقتی B با آهنگ $۳/۰T/s$ افزایش یابد، بزرگی emf ایجاد شده در سیم چقدر است؟ (ب) جریان در قسمت bc در کدام جهت است؟



شکل ۲۶-۵۱ مسئلهٔ ۲۲

حل: (الف) میدان مغناطیسی در جهت مثبت محور xها است. شاری که از ربع دایره‌های ac و ab می‌گذرد صفر است چون میدان B موازی این دو می‌باشد شاری که از ربع حلقه bc می‌گذرد برابر است با:

$$\Phi_B = BA = B\frac{\pi r^۲}{۴}$$

$$|\varepsilon| = \left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right| = \frac{\pi r^۲}{۴}\frac{dB}{dt}$$

$$= \frac{۱}{۴}\pi(۰/۱)^۲(۳\times ۱۰^{-۳}) = ۲/۳۶\times ۱۰^{-۵}\ V$$

(ب) چون B در حال افزایش است لذا جهت جریان القایی در bc باید به گونه‌ای باشد که میدان مغناطیسی حاصل از آن، این میدان را تضعیف کند. بنابراین جهت جریان در bc باید از c به سمت b باشد.

Scanned by CamScanner

●●۲۳- یک حلقهٔ دایره‌ای کوچک به مساحت $۲/۰۰\text{cm}^۲$ در صفحهٔ یک حلقهٔ دایره‌ای بزرگ به شعاع $۱/۰۰\text{m}$ و هم مرکز با آن قرار دارد. جریان در حلقهٔ بزرگ با آهنگ یکنواخت در مدت $۱/۰۰\text{s}$ که از $t=۰$ شروع می‌شود، از ۲۰۰A به -۲۰۰A تغییر می‌کند (تغییر در جهت). بزرگی میدان مغناطیسی $\vec{B}$ در مرکز حلقهٔ کوچک براثر جریان در حلقهٔ بزرگ در (الف) $t=۰$، (ب) $t=۰/۵۰۰\text{s}$ و (پ) $t=۱/۰۰\text{s}$، چقدر است؟ (ت) آیا از $t=۰$ تا $t=۱/۰۰\text{s}$، $\vec{B}$ معکوس می‌شود؟ چون حلقهٔ داخلی کوچک است فرض کنید که میدان $\vec{B}$ روی سطح آن یکنواخت است. (ث) در $t=۰/۵۰۰\text{s}$ مقدار emf القا شده در حلقهٔ کوچک چقدر است؟

حل: میدان حلقه بزرگتر که با زیرنویس ۱ مشخص می‌کنیم در مرکز آن از رابطه زیر به دست می‌آید

$$B_۱=\frac{\mu_\circ i}{۲R}$$

(الف) به ازای $t=۰$، $i=۲۰۰\text{A}$ است

$$B_۱=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۲۰۰)}{(۲)(۱)}=۱/۲۶\times۱۰^{-۴}\ \text{T}$$

(ب) چون جریان به طور یکنواخت تغییر می‌کند لذا در $t=۰/۵s$، $i=۰$ است. و در نتیجه $B_۱=۰$

(پ) به ازای $t=۱s$، $i=-۲۰۰\text{A}$ است

$$B_۱=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(-۲۰۰)}{(۲)(۱)}=-۱/۲۶\times۱۰^{-۴}\ \text{T}$$

میدان در خلاف جهت حالت (الف) است.

(ت) از مقایسه جواب (الف) و (پ) دیده می‌شود که جهت میدان وارونه شده است. (ث) از قانون القا فارادی و شاری که از حلقه دیگر می‌گذرد خواهیم داشت:

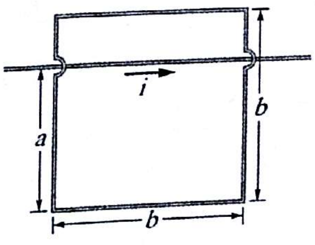
$$\varepsilon=-\frac{d\Phi_B}{dt}=-\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}=-A\frac{\Delta B}{\Delta t}$$

که A مساحت حلقه کوچک و برابر $۲\times۱۰^{-۴}\ m^۲$ است. لذا داریم

$$\varepsilon=-(۲\times۱۰^{-۴})\left(\frac{-۱/۲۶\times۱۰^{-۴}-۱/۲۶\times۱۰^{-۴}}{(۱)}\right)$$

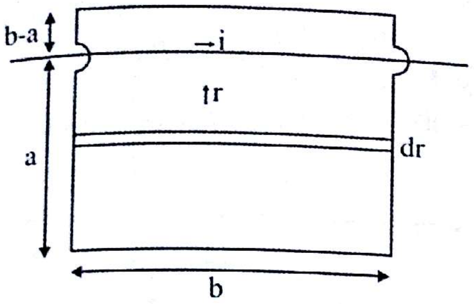
$$=۵/۰۴\times۱۰^{-۸}\ \text{V}$$

●●●۲۴- برای وضعیت نشان داده شده در شکل ۲۶-۵۲، $a=۱۲/۰\text{cm}$ و $b=۱۶/۰\text{cm}$ است. جریان در سیم مستقیم دراز با رابطهٔ $i=۴/۵۰t^۲-۱۰/۰t$ داده می‌شود که i برحسب آمپر و t برحسب ثانیه است. (الف) در $t=۳/۰۰\text{s}$ مقدار emf در حلقهٔ مربعی را به دست آورید. (ب) جریان القا شده در حلقه در کدام جهت است؟



شکل ۲۶-۵۲ مسئلهٔ ۲۴

حل:



(الف) توجه داریم که برای بخش بالایی سیم میدان به سمت بیرون شار مثبت بوده و برای بخش پایین سیم میدان به سمت داخل و شار منفی است. برای سیم دراز داریم

$$B=\frac{\mu_\circ i}{۲\pi r}$$

$$d\Phi_B=BdA=\frac{\mu_\circ i}{۲\pi r}bdr$$

$$\Phi_B=\Phi_{\text{بالایی}}+\Phi_{\text{پایینی}}=\int_\circ^{b-a}\frac{\mu_\circ i}{۲\pi r}bdr-\int_\circ^{a}\frac{\mu_\circ i}{۲\pi r}bdr$$

$$=\int_\circ^{b-a}\frac{\mu_\circ ib}{۲\pi}\frac{dr}{r}+\int_a^\circ\frac{\mu_\circ ib}{۲\pi}\frac{dr}{r}=\frac{\mu_\circ ib}{۲\pi}\int_\circ^{b-a}\frac{dr}{r}$$

$$=\frac{\mu_\circ ib}{۲\pi}\ell m\frac{b-a}{a}$$

$$\varepsilon=-\frac{d\Phi_B}{dt}=-\frac{d\Phi_B}{di}\frac{di}{dt}=-\frac{\mu_\circ b}{۲\pi}\ln\frac{b-a}{a}\frac{di}{dt}$$

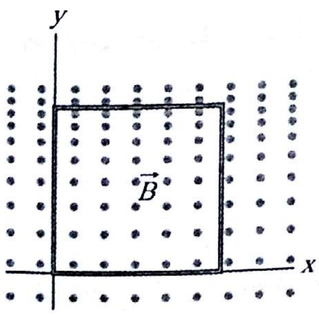
$$=-\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۰/۱۶)}{(۲\pi)}\ln\frac{(۰/۱۶-۰/۱۲)}{(۰/۱۲)}(۹t-۱۰)$$

$$=۳/۵۲\times۱۰^{-۸}\ (۹t-۱۰)$$

$$t=۳s\quad \varepsilon=۳/۵۲\times۱۰^{-۸}\ (۲۷-۱۰)=۵/۹۸\times۱۰^{-۷}\ \text{V}$$

(ب)
$$\frac{di}{dt}=۹t-۱۰=۰\Rightarrow t=\frac{۱۰}{۹}=۱/۱۱\ \text{s}$$

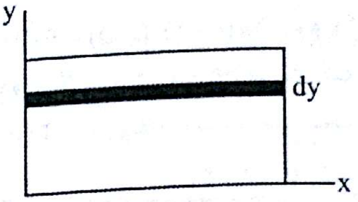
●●●۲۵- در شکل ۲۶-۵۳ یک حلقهٔ مربعی شکل سیمی دارای اضلاعی به طول $۲/۰\text{cm}$ است. میدان مغناطیسی به سمت خارج از صفحه کاغذ است و بزرگی آن با رابطهٔ $B=۴/۰t^۲y$ داده می‌شود که B برحسب تسلا، t برحسب ثانیه و y برحسب متر است. در $t=۲/۵\text{s}$ مطلوب است محاسبهٔ (الف) بزرگی و (ب) تعیین جهت emf القا شده در حلقه.



شکل ۲۶-۵۳ مسئلهٔ ۲۵

حل: عنصر سطح را مطابق شکل در نظر می‌گیریم

Scanned by CamScanner



$$d\Phi_B = BdA = (4t^2 y)\,ady$$

$$\Phi_B = 4t^2 a\int_0^a ydy = 2t^2a^3$$

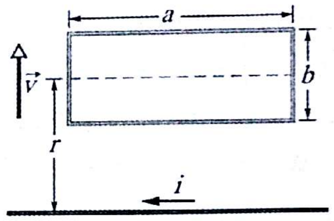
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -4a^3t$$

(الف) به ازای $t = 2.5s$ داریم:

$$\varepsilon = -(4)(2\times10^{-2})^3(2.5) = 8\times10^{-5}\ \mathrm{V}$$

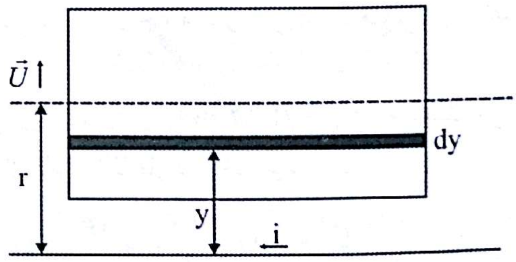
(ب) چون شار در حال افزایش است. جهت جریان القایی طوری است که میدان حاصل از آن با افزایش مخالفت کند و میدان به سمت داخل باشد درنتیجه جریان و نیروی محرکه ساعتگرد است.

۲۶●●●- در شکل ۲۶-۵۴ یک حلقهٔ مستطیلی شکل سیمی به درازای a=۲/۲cm، پهنای b=۰/۸۰cm و مقاومت R=۰/۴۰mΩ در نزدیکی سیم بینهایت دراز حامل جریان i=۴/۷A قرار دارد. حال حلقه را با تندی ثابت v=۳/۲mm/s از سیم دور می‌کنیم. وقتی مرکز حلقه در فاصلهٔ r=۱/۵b قرار دارد، مطلوب است (الف) بزرگی شار مغناطیسی که از حلقه می‌گذرد و (ب) جریان القا شده در حلقه.



شکل ۲۶-۵۴ مسئلهٔ ۲۶

حل:



$$d\Phi_B = BdA = \frac{\mu_0 i}{2\pi y}(ady)$$

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 ia}{2\pi}\int_{r-b/2}^{r+b/2}\frac{dy}{y} = \frac{\mu_0 ia}{2\pi}\ln\left(\frac{r+b/2}{r-b/2}\right)$$

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 ia}{2\pi}\ln\left(\frac{2r+b}{2r-b}\right)$$

که به ازای مقادیر داده شده خواهیم داشت

$$\Phi_B = 1.4\times10^{-8}\ Wb$$

(ب) نخست از قانون القا فارادی نیروی محرکه القایی را به دست می‌آوریم

$$\varepsilon = \frac{-d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{dr}\frac{dr}{dt} = -\frac{\mu_0 ia}{2\pi}\frac{\dfrac{2(2r-b)-2(2r+b)}{(2r-b)^2}}{\dfrac{2r+b}{2r-b}}(v)$$

$$= \frac{\mu_0 ia}{2\pi}\frac{4bv}{(2r-b)(2r+b)} = \frac{2\mu_0 iabv}{\pi(4r^2-b^2)^2}$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت:

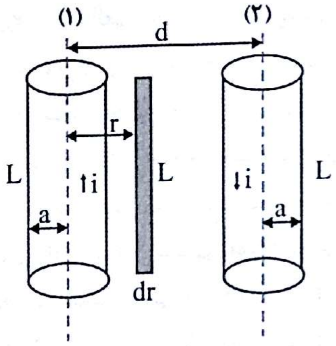
$$\varepsilon = 4.14\times10^{-9}\ \mathrm{V}$$

اکنون می‌توان جریان القا شده را به دست آورد:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{4.14\times10^{-9}}{0.4\times10^{-3}} = 1.03\times10^{-5}\ \mathrm{A}$$

۲۷●●●- دو سیم مسی موازی و دراز به قطر ۳۲/۵mm حامل جریانهای ۱۰A در جهتهای مخالف‌اند. (الف) با فرض اینکه محور مرکزی آنها ۲۰mm از هم فاصله دارند، شار مغناطیسی به ازای هر متر سیم را که در فضای بین دو محور سیمها وجود دارد حساب کنید. (ب) چه کسری از این شار داخل سیمها قرار دارد؟ (پ) قسمت (الف) را برای جریانهای موازی، تکرار کنید.

حل:



(الف) میدان حاصل از سیم (۱) در فضای بین دو سیم تا محور سیم (۲) برابر است با:

$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

شاری که از عنصر سطح نشان داده می‌گذرد برابر است با:

$$d\Phi_1 = B_1 dA = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}Ldr = \frac{\mu_0 iL}{2\pi}\frac{dr}{r}$$

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 iL}{2\pi}\left[\int_a^{d-a}\frac{dr}{r} + \int_{d-a}^{d}\frac{dr}{r}\right] = \frac{\mu_0 iL}{2\pi}\ln\frac{d-a}{a} + \frac{\mu_0 iL}{2\pi}\ln\frac{d}{d-a}$$

جهت میدان حاصل از سیم (۲) هم جهت با میدان سیم (۱) و درونسو و برابر Φ_1 می‌باشد لذا داریم:

$$\Phi_B = 2\Phi_1 = \frac{\mu_0 iL}{\pi}\ln\frac{d-a}{a} + \frac{\mu_0 iL}{\pi}\ln\frac{d}{d-a}$$

جمله اول مربوط به شار عبوری از بین دو سیم است و جمله دوم مربوط به شار میدان یک سیم است که درون سیم دیگر می‌گذرد. با قرار دادن مقادیر داده شده در این رابطه خواهیم

$$\frac{\Phi_B}{L} = 10.83\times10^{-6} + 0.258\times10^{-6} = 11.1\times10^{-6}\ \mathrm{Wb/m}$$

حال باید شار میدان هر سیم را که از درون خود آن سیم می‌گذرد حساب کنیم. میدان درون سیم برابر است با:

Scanned by CamScanner

$$B = \frac{\mu_۰ iL}{۲\pi a^۲}$$

$$d\Phi'_۱ = BdA = \frac{\mu_۰ ir}{۲\pi a^۲} Ldr$$

$$\Phi'_۱ = \frac{\mu_۰ iL}{۲\pi a^۲}\int_۰^a rdr = \frac{\mu_۰ iLa^۲}{۴\pi a^۲} = \frac{\mu_۰ iL}{۴\pi}$$

دوسیم $\Phi'_B = ۲\Phi'_۱ = \frac{\mu_۰ iL}{۲\pi}$

$$\frac{\Phi'_B}{L} = \frac{\mu_۰ i}{۲\pi} = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۱۰)}{۲\pi} = ۲\times۱۰^{-۶}\ \text{Wb/m}$$

در نتیجه شار کل که از بین دو محور می‌گذرد برابر است با:

$$\Phi_{B\,\text{کل}} = ۱۱/۱\times۱۰^{-۶} + ۲\times۱۰^{-۶} = ۱۳/۱\times۱۰^{-۶}\ \text{Wb/m}$$

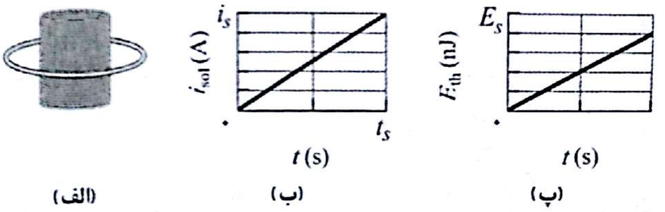
(ب)

$$\frac{\Phi_{Bi}}{\Phi_{B\,\text{کل}}}\times۱۰۰ = \frac{۲\times۱۰^{-۶} + ۰/۲۵۸\times۱۰^{-۶}}{۱۳/۱\times۱۰^{-۶}} = \%۱۷/۴$$

(پ) اگر جریان‌ها هم سو باشند جهت میدان‌ها خلاف یکدیگر بوده و با توجه به تقارن موجود یکدیگر را خنثی می‌کنند و شار کل صفر است.

بخش ۲۶-۵ القایش و تبدیل انرژی

۲۸•- در شکل ۲۶-۵۵ الف یک حلقهٔ دایره‌ای سیمی به طور هم محور با یک سیملوله و در صفحهٔ عمود بر محور مرکزی سیملوله قرار دارد. شعاع حلقه ۶/۰۰cm است. شعاع سیملوله برابر ۲/۰۰cm و در هر متر ۸۰۰۰ حلقه دارد و جریان متغیر i_{sol} از آن می‌گذرد که تغییرات آن نسبت به زمان t در شکل ۲۶-۵۵ ب نشان داده شده است. مقیاس محور قائم با $i = ۱/۰۰A$ و مقیاس محور افقی با $t_s = ۲/۰s$ مشخص شده است. شکل ۲۶-۵۵ پ انرژی E_{th}، یعنی انرژی تبدیل شده به انرژی گرمایی در حلقه را برحسب تابعی از زمان نشان می‌دهد. مقاومت حلقه چقدر است؟



شکل ۲۶-۵۵ مسئلهٔ ۲۸

حل: آهنگ تولید انرژی گرمایی $\varepsilon^۲/R$ است و از طرف دیگر طبق قانون فارادی بزرگی نیروی محرکه القایی برای یک تک حلقه برابر است با:

$$|\varepsilon| = \frac{d\Phi_B}{dt} = A\frac{dB}{dt}$$

میدان برای یک سیملوله آرمانی د رخارج آن صفر و در داخل آن برابر است با $B = \mu_۰ i_{sol} n$. لذا داریم:

$$|\varepsilon| = \mu_۰ n A_{sol}\frac{di_{sol}}{dt}$$

از نمودار شکل ب دیده می‌شود که $di_{sol/dt} = ۰/۵\ \text{A/s}$ در نتیجه خواهیم داشت.

$$|\varepsilon| = (۴\pi\times۱۰^{-۷})(۸۰۰۰)\pi(۰/۰۲)^۲(۰/۵) = ۶/۳۱\times۱۰^{-۶}\ \text{V}$$

حل با استفاده از $P_{th} = dE_{th/dt} = \varepsilon^۲/R$ که با استفاده از نمودار $dE_{th/dt} = ۴۰\times۱۰^{-۹}$ J/s است و در نتیجه داریم:

$$R = \frac{\varepsilon^۲}{dE_{th/dt}} = \frac{(۶/۳۱\times۱۰^{-۶})}{(۴۰\times۱۰^{-۹})} = ۰/۹۸\times۱۰^{-۳}\ \Omega$$

۲۹•- اگر یک سیم مسی به طول ۵۰/۰cm (قطر = ۱/۰۰mm) که به شکل یک حلقهٔ دایره‌ای درآمده است بر یک میدان مغناطیسی یکنواخت که با آهنگ ثابت ۱۰/۰mT/s افزایش می‌یابد عمود باشد، با چه آهنگی انرژی گرمایی در حلقه ایجاد می‌شود؟ SSM ILW

حل: باید رابطه بین آهنگ تولید انرژی گرمایی و آهنگ تغییر میدان مغناطیسی باشیم. محیط حلقه طول سیم مسی است. شعاع حلقه برابر است با

$$r = \frac{L}{۲\pi} = \frac{۰/۵}{(۲)(۳/۱۴)} = ۷/۹۶\times۱۰^{-۲}\ \text{m}$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -A\frac{dB}{dt}$$

$$Ri = \pi r^۲\frac{dB}{dt} \Rightarrow i = \frac{\pi r^۲}{R}\frac{dB}{dt}$$

که R مقاومت الکتریکی سیم است و داریم

$$R = \rho\frac{L}{A} = (۱/۷\times۱۰^{-۸})\frac{۰/۵}{\pi(۰/۵\times۱۰^{-۳})^۲} = ۱/۰۸۵\times۱۰^{-۲}\ \Omega$$

از طرف دیگر داریم

$$P = Ri^۲ = R\left(\frac{\pi r^۲}{R}\frac{dB}{dt}\right)^۲$$

که با قرار دادن مقدار R و سایر مقادیر داده شده، خواهیم داشت

$$P = ۳/۶۸\times۱۰^{-۶}\ \text{W}$$

۳۰•- یک آنتن حلقه‌ای به مساحت ۲/۰۰cm² و مقاومت ۵/۲۱μΩ بر میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی ۱۷/۰μT عمود است. در ۲/۹۶s، بزرگی میدان به صفر کاهش می‌یابد. براثر تغییر در میدان چه مقدار انرژی گرمایی در حلقه ایجاد می‌شود.

حل: انرژی گرمایی از رابطه $E_{th} = P_{th}\Delta t$ به دست می‌آید و با استفاده از قانون القا فارادی خواهیم داشت

$$E_{th} = \left(\frac{\varepsilon^۲}{R}\right)\Delta t = \frac{۱}{R}\left(-\frac{d\Phi_B}{dt}\right)^۲\Delta t = \frac{۱}{R}\left(-A\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)^۲\Delta t = \frac{A^۲B^۲}{R\Delta t}$$

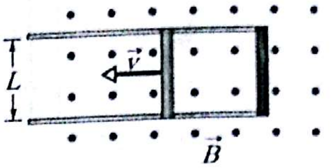
که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت

$$E_{th} = ۷/۵\times۱۰^{-۱۰}\ \text{J}$$

۳۱•- در شکل ۲۶-۵۶، یک میلهٔ فلزی با سرعت $\vec{v}$ در امتداد دو ریل فلزی موازی حرکت داده می‌شود، ریلها در یک انتها با نواری فلزی به هم متصل‌اند. یک میدان مغناطیسی به بزرگی $B = ۰/۳۵۰\text{T}$، به سمت خارج از صفحهٔ کاغذ موجود است. (الف) اگر فاصلهٔ بین ریلها $L = ۲۵/۰\text{cm}$ تندی میله ۵۵/۰cm/s باشد، emf ایجاد شده چقدر است؟ (ب) اگر

Scanned by CamScanner

مقاومت میله $۱۸/۰\Omega$ و مقاومت ریلها و اتصال آنها ناچیز باشد، جریان در میله چقدر است؟ (پ) انرژی با چه آهنگی به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود؟



شکل ۲۶-۵۶ مسئله‌های ۳۱ و ۳۳

حل: (الف) بزرگی شار مغناطیسی برابر است با:

$$\Phi_B = \int B\,dA = B\int_0^x L\,dx = BLx$$

و از قانون القا فارادی داریم:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -BL\frac{dx}{dt} = BLv$$
$$= (۰/۳۵)(۰/۲۵)(۰/۵۵) = ۰/۰۴۸۱\ V$$

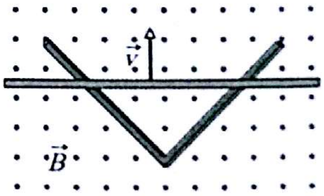
(ب) برای جریان القایی نیز داریم:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{۰/۰۴۸۱}{۱۸} = ۲/۶۷\times ۱۰^{-۳}\ A$$

(پ) آهنگ تولید انرژی گرمایی برابر است با:

$$P_{th} = Ri^{۲} = (۱۸)(۲/۶۷\times ۱۰^{-۳})^{۲} = ۱/۲۹\times ۱۰^{-۴}\ W$$

••۳۲- در شکل ۲۶-۵۷، دو ریل رسانای مستقیم یک زاویهٔ قائمه تشکیل می‌دهند. میلهٔ رسانایی که در تماس با ریل‌هاست در $t=۰$ از رأس شروع و با سرعت ثابت $۵/۲۰\text{m/s}$ در امتداد آنها حرکت می‌کند. یک میدان مغناطیسی با $B=۰/۳۵۰$ به سمت خارج از صفحهٔ کاغذ موجود است. مطلوب است محاسبهٔ (الف) شاری که از مثلثی که به وسیلهٔ ریلها و میله ساخته می‌شود در $t=۳/۰۰\text{s}$ می‌گذرد و (ب) emf ایجاد شده در دور مثلث در آن زمان. (پ) اگر emf را به صورت $\mathscr{E}=at^n$ بنویسیم که a و n ثابت‌اند، مقدار n چقدر است؟



شکل ۲۶-۵۷ مسئلهٔ ۳۲

حل: (الف) اگر مثلث محصور شده را در بگیریم ارتفاع آن از $h=vt$ به دست می‌آید. همچنین طول قاعده آن از رابطه مثلثاتی زیر به دست می‌آید

$$\tan ۴۵^\circ = \frac{\ell/۲}{h} \Rightarrow \ell = ۲h = ۲vt$$

در نتیجه می‌توان مساحت محصور شده را در هر لحظه به دست آورد

$$A = \frac{۱}{۲}(\text{قاعده})(\text{ارتفاع}) = \frac{۱}{۲}(۲vt)(vt) = v^{۲}t^{۲}$$

از آنجا شار میدان مغناطیسی چنین است

$$\Phi_B = BA = Bv^{۲}t^{۲} = (۰/۳۵)(۵/۲)^{۲}t^{۲} = ۹/۴۶t^{۲}$$

که به ازای $t=۳s$ داریم $\Phi_B = ۸۵/۱۸\text{T}\cdot\text{m}^{۲}$

(ب) بزرگی نیروی محرکه برابر است با

$$\varepsilon = \frac{d\Phi_B}{dt} = ۹/۴۶\frac{d}{dt}(t^{۲}) = ۱۸/۹\,t$$

که به ازای $t=۳s$ داریم $\varepsilon = ۵۶/۸\text{V}$

(پ) اگر $\varepsilon = at^n$ را با نتیجه قسمت (ب) یعنی $\varepsilon = ۱۸/۹t$، مقایسه کنیم در می‌یابیم که $n=۱$ است.

••۳۳- میلهٔ رسانای نشان داده در شکل ۲۶-۵۶ دارای طول L است و در امتداد افقی با سرعت ثابت v_t، روی ریلهای رسانای بدون اصطکاکی کشیده می‌شود. ریلها در یک انتها با نواری فلزی به هم متصل‌اند. یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به سمت خارج از صفحهٔ کاغذ ناحیه‌ای را که میله در آن حرکت می‌کند پرکرده است. فرض کنید که $L=۱۰\text{cm}$ ، $v=۵/۰\text{m/s}$ و $B=۱/۲\text{T}$ است. مطلوب است (الف) بزرگی و (ب) جهت (بالا یا پایین صفحه) emf القا شده در میله. مطلوب است (پ) اندازه و (ت) جهت جریان در حلقهٔ رسانا. فرض کنید که مقاومت میله $۰/۴۰\Omega$ و مقاومت ریلها و نوار فلزی کم و قابل چشمپوشی است. (ث) آهنگ تولید انرژی گرمایی در مسئله چقدر است؟ (ج) نیروی خارجی لازم برای اینکه $\vec{v}$ ثابت باشد،چقدر است؟ (چ) با چه آهنگی این نیرو روی میله کار انجام می‌دهد؟

حل: (الف) از مسئله ۳۱ داریم

$$\varepsilon = BLv = (۱/۲)(۰/۱)(۵) = ۰/۶\text{V}$$

(ب) چون سطح و در نتیجه شار میدان مغناطیسی در حال افزایش است، جهت جریان و نیروی محرکه القایی می‌خواهد با این افزایش مخالفت کند در نتیجه میدان مغناطیسی خلاف میدان اصلی ایجاد می‌نماید. جهت میدان درون سو و جهت جریان و در نتیجه نیروی محرکه در میله رو به بالا است.

(پ) جریان القا شده در سیم برابر است

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{۰/۶}{۰/۴} = ۱/۵\text{A}$$

(ت) همانطور که در حل قسمت ب گفته شد جهت جریان در میله رو به بالا و در حلقه ساعتگرد می‌باشد.

(ث) آهنگ تولید انرژی گرمایی برابر است با:

$$P_{th} = Ri^{۲} = (۰/۴)(۱/۵)^{۲} = ۰/۹\text{W}$$

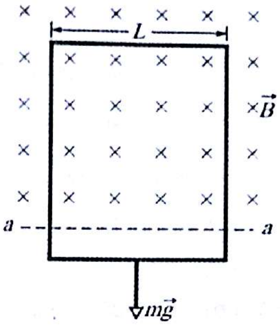
(ج) $$F = iLB = (۱/۵)(۰/۱)(۱/۲) = ۰/۱۸$$

طبق قاعده دست راست نیرو به سمت راست است پس برای آنکه میله با سرعت ثابت خود ادامه دهد باید نیروی خارجی به بزرگی $۰/۱۸N$ و به سمت چپ به میله وارد می‌شود.

(چ) $$P = Fv = (۰/۱۸)(۵) = ۰/۹۰\ \text{W/s}$$

Scanned by CamScanner

••۳۴- در شکل ۲۶-۵۸ یک حلقهٔ رسانای مستطیلی دراز، به پهنای L، مقاومت R و جرم m در میدان مغناطیسی افقی و یکنواخت $\vec{B}$ که به سمت داخل صفحهٔ کاغذ است و فقط در بالای خط aa' وجود دارد، آویزان است. سپس حلقه رها می‌شود؛ درحین سقوط حلقه شتاب می‌گیرد تا به تندی حد معین v_t می‌رسد. با چشمپوشی از مقاومت هوا، رابطه‌ای برای v_t به دست آورید.



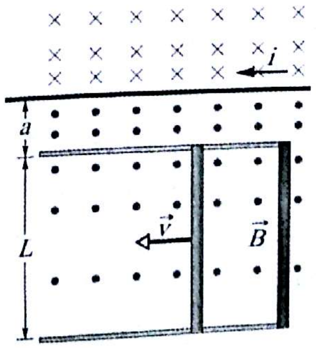
شکل ۲۶-۵۸ مسئلهٔ ۳۴

حل: نیرویی که باعث تغییر شار میدان مغناطیسی می‌شود نیروی وزن mg حلقه است. برای اینکه حلقه به تندی حد v_t برسد باید این نیرو با نیروی iLB که با تغییر شار مخالفت می‌کند برابر شود. لذا داریم

$$mg = iLB = \left|\frac{\varepsilon}{R}\right| LB = \frac{BLv_t}{R}LB = \frac{B^۲L^۲v_t}{R}$$

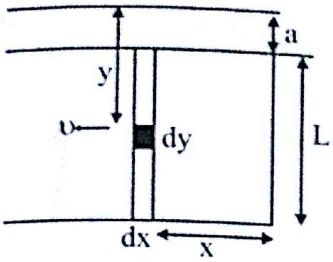
$$\Rightarrow v_t = \frac{mgR}{B^۲L^۲}$$

••۳۵- شکل ۲۶-۵۹ میله‌ای به طول $L=۱۰/۰$cm را نشان می‌دهد که با تندی ثابت $v=۵/۰۰$m/s روی دو ریل افقی حرکت داده می‌شود. میله، ریلها و نوار متصل کننده در سمت راست یک حلقهٔ رسانا را تشکیل می‌دهند. مقاومت میله $۰/۴۰۰\Omega$ و مقاومت بقیهٔ حلقه قابل چشمپوشی است. جریان $i=۱۰۰$A در سیم مستقیم درازی که به فاصلهٔ $a=۱۰/۰$mm از حلقه واقع است یک میدان مغناطیسی (غیر یکنواخت) را از حلقه می‌گذراند. مطلوب است محاسبهٔ (الف) emf و (ب) جریان القا شده در حلقه. (پ) با چه آهنگی انرژی گرمایی در میله ایجاد می‌شود؟ (ت) برای اینکه میله با تندی ثابت به حرکت ادامه دهد، بزرگی نیرویی که باید اعمال شود چقدر است؟ (ث) با چه آهنگی این نیرو روی میله کار انجام می‌دهد؟



شکل ۲۶-۵۹ مسئلهٔ ۳۵

حل:



با توجه به شکل شاری که از عنصر سطح $dxdy$ می‌گذرد برابر است با

$$\Phi_B = \int BdA = \int_۰^x \int_a^{a+L} \frac{\mu_۰ i}{۲\pi y}dxdy = \frac{\mu_۰ ix}{۲\pi}\int_a^{a+L}\frac{dy}{y}$$

$$= \frac{\mu_۰ ix}{۲\pi}\ln\left(\frac{a+L}{a}\right)$$

(الف) بزرگی نیروی محرکه القایی برابر است با:

$$\varepsilon = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\mu_۰ i}{۲\pi}\left(\frac{dx}{dt}\right)\ln\left(\frac{a+L}{a}\right)$$

$$\varepsilon = \frac{\mu_۰ iV}{۲\pi}\ln\left(\frac{a+L}{a}\right)$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهم داشت $\varepsilon = ۲/۴\times۱۰^{-۴}$ V.

(ب) جریان القایی نیز برابر است با:

$$i' = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{۲/۴\times۱۰^{-۴}}{۰/۴} = ۶\times۱۰^{-۴}\text{ A}$$

(پ)

$$P = Ri'^۲ = (۰/۴)(۶\times۱۰^{-۴})^۲ = ۱/۴۴\times۱۰^{-۷}\text{ W}$$

(ت) چون میله با سرعت ثابت حرکت می‌کند، نیروی خالص وارد بر آن برابر با صفر است پس، بزرگی نیروی عامل خارجی باید برابر با بزرگی نیروی مغناطیسی وارد بر سیم، و جهت آن در خلاف جهت این نیرو باشد. بزرگی نیروی مغناطیسی وارد بر یک عنصر دیفرانسیلی حامل جریان القایی i' از میله به ضخامت dy و فاصله y از سیم بلند برابر است با

$$dF_B = i'Bdy = i'\left(\frac{\mu_۰ i}{۲\pi y}\right)dy$$

$$F_B = \frac{\mu_۰ ii'}{۲\pi}\int_a^{a+L}\frac{dy}{y} = \frac{\mu_۰ ii'}{۲\pi}\ln\left(\frac{a+L}{a}\right)$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده داریم $F_B = ۲/۸۷\times۱۰^{-۸}\,N$
چون میدان برونسو و جهت جریان در میله رو به بالا است از قاعده دست راست دیده می‌شود که جهت $\vec{F}_B$ رو به سمت راست است. پس عامل، خارجی باید نیروی به بزرگی $۲/۸۷\times۱۰^{-۸}\,N$ و رو به سمت چپ وارد کند.

(ث) آهنگ کار عامل خارجی روی میله برابر است با

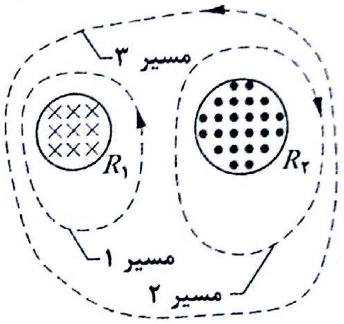
$$P = Fv = (۲/۸۷\times۱۰^{-۸})(۵) = ۱/۴۴\times۱۰^{-۷}\text{ W}$$

که همانطور که انتظار داشتیم برابر پاسخ قسمت (ب) است، و این بیانگر پایستگی انرژی است. انرژی مکانیکی عامل خارجی به انرژی گرمایی تبدیل شده است.

Scanned by CamScanner

بخش ۲۶-۶ میدان‌های الکتریکی القایی

●۳۶- شکل ۲۶-۶۰ دو ناحیهٔ دایره‌ای $R_۱$ و $R_۲$ را به شعاعهای $r_۱=۲۰/۰\text{cm}$ و $r_۲=۳۰/۰\text{cm}$ نشان می‌دهد. در $R_۱$ میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $B_۱=۵۰/۰\text{mT}$ به سمت داخل صفحهٔ کاغذ و در $R_۲$ میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $B_۲=۷۵/۰\text{mT}$ به سمت خارج صفحه برقرار است (از کناره‌های این میدانها چشم‌پوشی کنید.) هر دو میدان با آهنگ $۸/۵۰\text{mT/s}$ کاهش می‌یابند. $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s}$ را برای (الف) مسیر ۱، (ب) مسیر ۲ و (پ) مسیر ۳ محاسبه کنید.



شکل ۲۶-۶۰ مسئلهٔ ۳۶

حل: (الف)

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{ds}=-\frac{d\Phi_B}{dt}=-\pi r^۲\frac{dB}{dt}$$

برای مسیر ۱

$$\oint_۱ \vec{E}\cdot\vec{ds}=-(۳/۱۴)(۰/۲)^۲(-۸/۵\times۱۰^{-۳})=۱/۰۶\times۱۰^{-۳}\ \text{V}$$

(ب) برای مسیر ۲

$$\oint_۲ \vec{E}\cdot\vec{ds}=-(۳/۱۴)(۰/۳)^۲(-۸/۵\times۱۰^{-۳})=۲/۴\times۱۰^{-۳}\ \text{V}$$

(پ) برای مسیر ۳، به دلیل اینکه میدان مغناطیسی در $C_۱$ و $C_۲$ در خلاف جهت‌اند لذا داریم:

$$\oint_۳ \vec{E}\cdot\vec{ds}=۲/۴\times۱۰^{-۳}-۱/۰۶\times۱۰^{-۳}=۱/۳\times۱۰^{-۳}\ \text{V}$$

●۳۷- سیملولهٔ درازی دارای قطر $۱۲/۰\text{cm}$ است. وقتی جریان i در سیم پیچهایش برقراراست، میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $B=۳۰/۰\text{mT}$ داخل آن ایجاد می‌شود. کاهش جریان i، باعث کاهش میدان با آهنگی برابر $۶/۵۰\text{mT}$ می‌شود. بزرگی میدان الکتریکی القایی را در (الف) $۲/۲۰\text{cm}$ و (ب) $۸/۲۰\text{cm}$ از محور سیملوله، حساب کنید. **SSM ILW**

حل: (الف) به ازای $r=۲/۲\text{cm}$ نقطه داخل سیملوله و از قانون القای فارادی داریم:

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{ds}=-\frac{d\Phi_B}{dt}\Rightarrow E(۲\pi r)=-\pi r^۲\frac{dB}{dt}$$

$$\Rightarrow E=-\frac{۱}{۲}r\frac{dB}{dt}=\frac{۱}{۲}(۲/۲\times۱۰^{-۲})(۶/۵\times۱۰^{-۳})$$

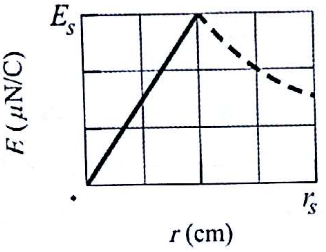
$$=۷/۱۳\times۱۰^{-۵}\ \text{V/m}$$

(ب) برای $r=۸/۲\text{cm}$ نقطه خارج سیملوله است و داریم:

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{ds}=-\frac{d\Phi_B}{dt}\Rightarrow E(۲\pi r)=-\pi R^۲\frac{dB}{dt}\Rightarrow E=\frac{۱}{۲}\frac{R^۲}{r}\frac{dB}{dt}$$

$$E=\left(\frac{۱}{۲}\right)\frac{(۰/۰۶)^۲}{(۰/۰۸۲)}(۶/۵\times۱۰^{-۳})=۱/۴۳\times۱۰^{-۴}\ \text{V/m}$$

●●۳۸- میدان مغناطیسی یکنواختی در جهت مثبت محور z از یک ناحیهٔ دایره‌ای در صفحهٔ xy می‌گذرد. بزرگی میدان مغناطیسی B (برحسب تسلا) با رابطهٔ $B=at$، که در آن a ثابت است با زمان t (برحسب ثانیه) افزایش می‌یابد. بزرگی میدان الکتریکی E که بر اثر این افزایش در میدان مغناطیسی برقرار می‌شود در شکل ۲۶-۶۱ برحسب فاصلهٔ شعاعی r داده شده است. مقیاس محور قائم با $E_s=۳۰۰\mu\text{N/C}$ و مقیاس محور افقی با $r_s=۴/۰۰\text{cm}$ مشخص شده است. a را پیدا کنید.



شکل ۲۶-۶۱ مسئلهٔ ۳۸

حل: بزرگی میدان الکتریکی القایی در داخل ناحیه داخلی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$E=(۲\pi r)=\pi r^۲\frac{dB}{dt}\Rightarrow E=\frac{۱}{۲}r\frac{dB}{dt}=\frac{۱}{۲}r\frac{d}{dt}(at)$$

$$E=\frac{۱}{۲}ar$$

با توجه به نمودار به ازای $r=۲\text{cm}$ داریم $E=۳۰۰\times۱۰^{-۶}\ \text{N/c}$ در نتیجه خواهیم داشت:

$$۳۰۰\times۱۰^{-۶}=\left(\frac{۱}{۲}\right)a\left(۲\times۱۰^{-۲}\right)\Rightarrow a=۰/۰۳\text{T/s}$$

●●۳۹- میدان مغناطیسی یک آهنربای استوانه‌ای که سطح قطب آن دارای قطر $۳/۳\text{cm}$ است می‌توانند به طور سینوسی بین $۲۹/۶\text{T}$ و $۳۰/۰\text{T}$ با بسامد ۱۵Hz تغییر کند. در فاصلهٔ شعاعی $۱/۶\text{cm}$، دامنهٔ میدان الکتریکی القایی بر اثر این تغییر چقدر است؟

حل: میدان مغناطیسی B را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت

$$B(t)=B_۰+B_۱\sin(\omega t+\Phi_۰)$$

که در آن

$$B_۰=\left(\frac{۱}{۲}\right)(۳۰+۲۹/۶)=۲۹/۸\text{T}$$

و

$$B_۱=\frac{۱}{۲}(۳۰-۲۹/۶)=۰/۲\text{T}$$

$$B=۲۹/۸+۰/۲\sin(\omega t+\Phi_۰)$$

حال از رابطه میدان الکتریکی در داخل استفاده می‌کنیم

Scanned by CamScanner

$$E = \frac{r}{۲}\frac{dB}{dt} = \frac{r}{۲}\frac{d}{dt}[۲۹/۸ + ۰/۲\sin(\omega t + \Phi_۰)]$$
$$= \left(\frac{r}{۲}\right)[۰/۲\,\omega\cos(\omega t + \Phi_۰)] = E_{max}\cos(\omega t + \Phi_۰)$$
$$E_m = (۰/۱)r\omega = (۰/۱)(r)(۲\pi f) = (۰/۱)(۱/۶\times۱۰^{-۱})(۲\pi)(۱۵\,\text{Hz})$$
$$= ۰/۱۵\ \text{V/m}$$

بخش ۲۶-۷ القاگرها و القایش

•۴۰- القایدگی در پیچه‌ای که به طور فشرده ۴۰۰ دور سیم پیچی دارد برابر ۸/۰mH است. وقتی جریان ۵/۰mA است، شار مغناطیسی عبوری از پیچه چقدر است؟

حل: از معادله ۲۶-۳۳، $N\Phi_B = Li$ لذا برای Φ_B داریم

$$\Phi_B = \frac{Li}{N} = \frac{(۸\times۱۰^{-۳})(۵\times۱۰^{-۳})}{۴۰۰} = ۱\times۱۰^{-۷}\ \text{Wb}$$

•۴۱- یک پیچهٔ دایره‌ای به شعاع ۱۰/۰cm شامل ۳۰/۰ دور سیم است که به طور فشرده پیچیده شده‌اند. یک میدان مغناطیسی خارجی ۲/۶۰ mT بر پیچه عمود است. (الف) اگر جریانی در پیچه برقرار نباشد، شار مغناطیسی که دورها را پیوند می‌دهد چقدر است؟ (ب) وقتی جریان در یک جهت معین در پیچه ۳/۸۰A است، شار خالص در پیچه از بین می‌رود. القایدگی در پیچه چقدر است؟

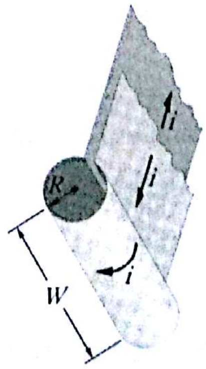
حل: (الف) $\Phi_۱$ شار عبوری از یک حلقه است. لذا داریم

$$\Phi_B = N\Phi_۱ = NBA = NB(\pi r^۲)$$
$$= (۳۰)(۲/۶\times۱۰^{-۳})(\pi)(۰/۱)^۲ = ۲/۴۵\times۱۰^{-۳}\ \text{Wb}$$

(ب) از معادله ۲۶-۳۳ داریم

$$L = \frac{N\Phi_۱}{i} = \frac{۲/۴۵\times۱۰^{-۳}}{۳/۸} = ۶/۴۵\times۱۰^{-۴}\ \text{H}$$

••۴۲- شکل ۲۶-۶۲ یک نوار مسی به پهنای W=۱۶/۰ را نشان می‌دهد که به صورت لوله‌ای به شعاع R=۱/۸cm و با دو انتهای تخت خم شده است. جریان i=۳۵mA که به طور یکنواخت در پهنای نوار توزیع شده است از آن می‌گذرد و به این ترتیب عملاً یک سیملولهٔ تک دور تشکیل می‌شود. فرض کنید که میدان مغناطیسی در خارج این لوله قابل چشم‌پوشی و میدان در داخل لوله یکنواخت است. مطلوب است (الف) بزرگی میدان مغناطیسی در داخل لوله و (ب) القایدگی لوله (دو انتهای تخت را در نظر نگیرید.)



شکل ۲۶-۶۲ مسئلهٔ ۴۲

حل: (الف) لوله را به عنوان یک سیملوله تک دور را می‌توان به صورت N حلقه دایره‌ای کوچک در پهنای نوار مسی در نظر گرفت. از هر حلقه جریان $\Delta i = i/N$ می‌گذرد. بنابراین میدان مغناطیسی در داخل این سیملوله برابر است با

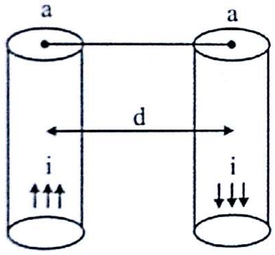
$$B = \mu_۰ n\Delta i = \mu_۰\left(\frac{N}{W}\right)\left(\frac{i}{N}\right) = \mu_۰\frac{i}{W}$$
$$= (۴\pi\times۱۰^{-۷})\frac{۰/۰۳۵}{۰/۱۶} = ۲/۷\times۱۰^{-۷}\ \text{T}$$

(ب) از معادله ۲۶-۳۳ برای سیملوله تک حلقه داریم

$$L = \frac{N\Phi_۱}{i} = \frac{(\pi R^۲)B}{i} = \frac{\pi R^۲(\mu_۰ i/w)}{i} = \frac{\mu_۰\pi R^۲}{w}$$
$$L = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(\pi)(۰/۰۱۸)^۲}{۰/۱۶} = ۸\times۱۰^{-۹}\ \text{H}$$

••۴۳- دو سیم دراز مشابه به شعاع a=۱/۵۳mm موازی‌اند و از آنها جریانها یکسان و در جهتهای مخالف می‌گذرند. فاصلهٔ محور آنها برابر d=۱۴/۲cm است. از شار داخل خود سیمها صرفنظر کنید اما شار ناحیهٔ بین دو سیم را در نظر بگیرید. القایدگی بر یکای طول سیمها چقدر است؟

حل:

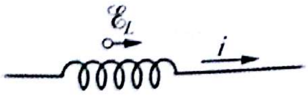


•۴۴- یک القاگر ۱۲H حامل جریان ۲/۰A است. جریان باید با چه آهنگی تغییر کند تا یک emf برابر ۶۰V در القاگر ایجاد شود.

حل:

$$\varepsilon = L\frac{di}{dt} \Rightarrow ۶۰ = (۱۲)\left(\frac{di}{dt}\right) \Rightarrow \frac{di}{dt} = ۵\ \text{A/s}$$

•۴۵- در لحظهٔ معینی جهت جریان و emf خود القایی در یک القاگر مطابق شکل ۲۶-۶۳ داده شده‌اند. (الف) آیا جریان افزایش می‌یابد یا کاهش؟ (ب) emf القایی برابر ۱۷ V و آهنگ تغییر جریان ۲۵kA/s است؛ القایدگی را به دست آورید.



شکل ۲۶-۶۳ مسئلهٔ ۴۵

حل:

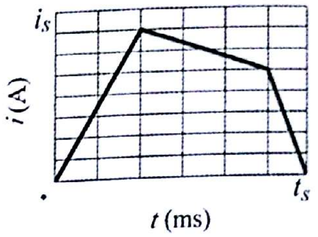
(الف) طبق قانون لنز، جریان باید کاهش یابد تا با افزایش شار (ناشی لذا افزایش جریان رو به سمت راست) مخالفت کند.

(ب)

$$\varepsilon = L\frac{di}{dt} \Rightarrow ۱۷ = L(۲/۵\times۱۰^{۴}) \Rightarrow L = ۶/۸\times۱۰^{-۴}\ \text{H}$$

Scanned by CamScanner

۴۶●●- جریان i در یک القاگر $۴/۶H$ مطابق شکل ۲۶-۶۴ نسبت به زمان t، تغییر می‌کند که در آن مقیاس محور قائم با $i_s = ۸/۰ A$ و مقیاس محور افقی با $t_s = ۶/۰ ms$ مشخص شده است. القاگر دارای مقاومت ۱۲Ω است. در طی بازه‌های زمانی (الف) $t=۰$ تا $t=۲ms$؛ (ب) $t=۲ms$ تا $t=۵ms$؛ و (پ) $t=۵ms$ تا $t=۶ms$، بزرگی ε، emf، را به دست آورید. (از رفتار در انتهای هر بازه صرفنظر کنید.)



شکل ۲۶-۶۴ مسئلهٔ ۴۶

حل: از معادلــه $|\varepsilon| = L\left|\frac{\Delta i}{\Delta t}\right|$ و بـا اسـتفاده از نمـودار خـواهیم داشت:

(الف) به ازای $۰<t<۲ms$ داریم

$$\varepsilon = L\frac{\Delta i}{\Delta t} = (۴/۶)\frac{(۷-۰)}{۲\times ۱۰^{-۳}} = ۱/۶\times ۱۰^{۴}\ V$$

(ب) به ازای $۲ms<t<۵ms$ داریم

$$\varepsilon = L\frac{\Delta i}{\Delta t} = (۴/۶)\left|\frac{(۵-۷)}{(۵-۰/۲)\times ۱۰^{-۳}}\right| = ۳/۱\times ۱۰^{۳}\ V$$

(پ)

$$\varepsilon = L\frac{\Delta i}{\Delta t} = (۴/۶)\left|\frac{(۰-۵)}{(۶-۵)\times ۱۰^{-۳}}\right| = ۲/۳\times ۱۰^{۴}\ V$$

۴۷●●- *القاگرها بـه صـورت متـوالی.* دو القـاگر $L_۱$ و $L_۲$ بـه صورت متوالی به هم متصل‌اند و در فاصلهٔ زیـادی از هـم قـرار دارند به طوری که میدان مغناطیسی یکی بر دیگری اثـر نـدارد. (الف) نشان دهید القایدگی معادل از این رابطهٔ به دست می‌آید

$$L_{eq} = L_۱ + L_۲$$

(*راهنمایی*: به هم بستن مقاومتها و خازنها به صـورت متـوالی را مرور کنید.) کدام یک مشابه مـورد بالاسـت؟ (ب) رابطـهٔ کلـی قسمت (الف) برای N القاگر متوالی چیست؟

حل: (الف) جریان عبوری از این دو القاگر یکسان است.

$$\varepsilon_۱ = -L_۱\frac{di}{dt} \quad , \quad \varepsilon_۲ = -L_۲\frac{di}{dt}$$

در اتصال متوالی $\varepsilon = \varepsilon_۱ + \varepsilon_۲$ لذا می‌توان نوشت

$$-L_{eq}\frac{di}{dt} = -L_۱\frac{di}{dt} \cdot\cdot L_۲\frac{di}{dt} \Rightarrow L_{eq} = L_۱ + L_۲$$

(ب) اگر N القاگر هم درست مثل مقاومت ها داریم

$$L_{eq} = \sum_{i=۱}^{N} L_i$$

۴۸●●- *القاگرها بـه صـورت مـوازی.* دو القـاگر $L_۱$ و $L_۲$ بـه صورت موازی به هم متصل‌اند و در فاصلهٔ زیـادی از هـم قـرار دارند به طوری که میدان مغناطیس یکی بر دیگـری اثـر نـدارد. (الف) نشان دهید القایدگی معادل از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\frac{۱}{L_{eq}} = \frac{۱}{L_۱} + \frac{۱}{L_۲}$$

(*راهنمایی*: به هم بستن مقاومتها و خازنها به صورت مـوازی را مرور کنید.) کدامیک مـشابه مـورد بالاسـت؟ (ب) رابطـهٔ کلـی قسمت (الف) برای N القاگر موازی چیست؟

حل: (الف)

$$i = i_۱ + i_۲ \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{di_۱}{dt} + \frac{di_۱}{dt}$$

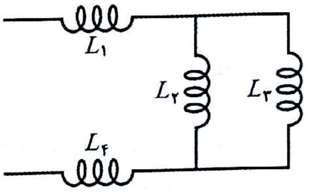
در این حالت داریم $\varepsilon = \varepsilon_۱ = \varepsilon_۲$ لذا

$$-\left(\frac{\varepsilon}{L_{eq}}\right) = -\left(\frac{\varepsilon_۱}{L_۱}\right) - \left(\frac{\varepsilon_۲}{L_۲}\right) \Rightarrow \frac{۱}{L_{eq}} = \frac{۱}{L_۱} + \frac{۱}{L_۲}$$

(ب) مانند مقاومت‌ها خواهیم داشت

$$\frac{۱}{L_{eq}} = \sum_{i=۱}^{N}\frac{۱}{L_i}$$

۴۹●●- آرایشی از القاگرهای شکل ۲۶-۶۵ با $L_۱ = ۳۰/۰mH$، $L_۲ = ۵۰/۰mH$، $L_۳ = ۲۰/۰mH$ و $L_۴ = ۱۵/۰mH$، بـه یـک منبع جریان متغیر متصل‌اند. القایدگی معادل این آرایـش چقـدر است؟ (به مسئله‌های ۴۷ و ۴۸ نگاه کنید.)



شکل ۲۶-۶۵ مسئلهٔ ۴۹

حل: $L_۲$ و $L_۳$ موازی هستند

$$\frac{۱}{L_{۲۳}} = \frac{۱}{L_۲} + \frac{۱}{L_۳} \Rightarrow L_{۲۳} = \frac{L_۲ L_۳}{L_۲ + L_۳} = \frac{(۵۰)(۲۰)}{(۵۰+۲۰)} = ۱۴/۳mH$$

$L_۱$، $L_{۲۳}$ و $L_۴$ متوازی هستند لذا خواهیم داشت

$$L_{eq} = L_۱ + L_{۲۳} + L_۴$$
$$= ۳۰ + ۱۴/۳ + ۱۵ = ۵۹/۳mH$$

بخش ۲۶-۹ مدارهای RL

۵۰●- کلید شکل ۲۶-۲۰ در زمان $t=۰$ روی a بسته می‌شود. نسبت emf خود القای القاگر به emf باتری، $\varepsilon_L/\varepsilon$، (الف) درست پس از $t=۰$ و (ب) در $t=۲/۰۰\tau_L$ چقدر است؟ (پ) در چه مضربی از τ_L مقدار $\varepsilon_L/\varepsilon = ۰/۵۰۰$ است؟

حل: (الف) درست پس از بسته شدن کلید $\varepsilon - \varepsilon_L = iR$ است. ولی دراین لحظه $t=۰$ است لذا $\varepsilon_L = \varepsilon$ و یا $\varepsilon_L/\varepsilon = ۱$ است.

(ب)

$$\varepsilon_L(t) = \varepsilon e^{-t/\tau_L} = \varepsilon e^{-۲\tau/\tau_L} = \varepsilon e^{-۲} = ۰/۱۳۵\,\varepsilon$$

در نتیجه $\varepsilon_L/\varepsilon = ۰/۱۳۵$

Scanned by CamScanner

(پ) با توجه به رابطه $\mathcal{E}_L(t)=\mathcal{E}e^{-t/\tau_L}$ می‌توان نتیجه زیر را نوشت

$$\frac{t}{\tau_L}=\ln\left(\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_L}\right)\Rightarrow t=\tau_L\ln(۲)=۰/۶۹۳\tau_L$$

•۵۱- یک باتری در زمان $t=۰$ به یک مدار RL متوالی متصل می‌شود. در چند ثابت زمانی τ_L جریان به ۰/۱۰۰٪ کمتر از مقدار تعادلش می‌رسد؟ **SSM**

حل: در لحظه بسته شدن کلید یعنی $t=۰$، جریان از مقدار صفر طبق رابطه زیر شروع به افزایش می‌کند

$$i=\frac{\mathcal{E}}{R}\left(۱-e^{-t/\tau_L}\right)$$

$$۰/۹۹۹\frac{\mathcal{E}}{R}=\frac{\mathcal{E}}{R}\left(۱-e^{-t/\tau_L}\right)\Rightarrow ۰/۹۹۹=۱-e^{-t/\tau}$$

$$e^{-t/\tau_L}=۰/۰۰۱\Rightarrow -\frac{t}{\tau_L}=\ln(۰/۰۰۱)=-۶/۹۱$$

$$\Rightarrow t=۶/۹۱\,\tau_L$$

•۵۲- جریانی در یک مدار RL در مدت ۵/۰۰s به یک سوم مقدار حالت پایایش می‌رسد. ثابت زمانی القایی را به دست آورید.

حل: مقدار پایا همان مقدار بیشینه $i_m=\varepsilon/R$ است لذا داریم

$$i=\frac{\varepsilon}{R}\left(۱-e^{-t/\tau_l}\right)\Rightarrow\frac{۱}{۳}i_m=i_m(۱-e^{-۵/\tau_L})$$

$$e^{-۵/\tau_L}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow-\frac{۵}{\tau_L}=\ln\left(\frac{۲}{۳}\right)\Rightarrow\tau_L=۱۲/۲\text{s}$$

•۵۳- پس از خارج کردن باتری از مدار RL، جریان مدار در اولین ثانیه از ۱/۰A به ۱۰mA کاهش می‌یابد. اگر L برابر ۱۰H باشد، مقاومت در مدار را به دست آورید. **ILW**

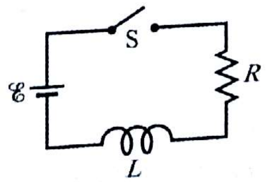
حل: جریان در مدار با رابطه $i=i_۰e^{-t/\tau_L}$ داده می‌شود که $i_۰$ جریان در $t=۰$ است. این معادله را برای τ_L حل می‌کنیم تا سپس با کمک رابطه $\tau_L=L/R$ مقدار R را به دست آوریم.

$$\ln\frac{i}{i_۰}=-\frac{t}{\tau_L}\Rightarrow\ln(۰/۰۱)=-\frac{۱}{\tau_L}\Rightarrow\tau_L=۰/۲۱۷\text{s}$$

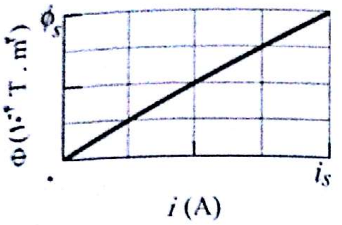
اکنون می‌توان مقاومت R را به دست آورد

$$\tau_L=\frac{L}{R}\Rightarrow۰/۲۱۷=\frac{۱۰}{R}\Rightarrow R=۴۶\Omega$$

•۵۴- در شکل ۲۶-۶۶، القاگر دارای ۲۵ دور و emf باتری آرمانی برابر ۱۶V است. شکل ۳۰-۶۷ شار مغناطیسی Φ که از هر دور می‌گذرد را برحسب جریان i که از القاگر می‌گذرد نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $\phi_s=۴/۰\times۱۰^{-۴}\,\text{T.m}^۲$ و مقیاس محور افقی با $i_s=۲/۰۰\text{A}$ مشخص شده است. اگر کلید S در زمان $t=۰$ بسته شود، در $t=۱/۵\tau_L$ آهنگ تغییر جریان، di/dt چقدر است؟



شکل ۲۶-۶۶ مسئله‌های ۵۴، ۸۳، ۸۷، ۹۴، ۹۹



شکل ۲۶-۶۷ مسئلهٔ ۵۴.

حل: از روی نمودار داریم $\Phi_{B/i}=۲\times۱۰^{-۴}$، بنابراین به ازای $N=۲۵$، داریم:

$$N\Phi_B=Li\Rightarrow L=N\frac{B}{i}=(۲۵)(۲\times۱۰^{-۴})=۵\times۱۰^{-۳}\,H$$

برای به دست آوردن di/dt چنین خواهیم داشت:

$$i=\frac{\varepsilon}{R}(۱-e^{-t/\tau_L})$$

$$\frac{di}{dt}=\frac{\varepsilon R}{RL}e^{-t/\tau_L}=\frac{\varepsilon}{L}e^{-t/\tau_L}=\frac{۱۶}{(۵\times۱۰^{-۳})}(e^{-۱/۵})$$

$$=۷۱۴\,\text{A/s}$$

•۵۵- سیملوله‌ای با القاییدگی ۶/۳۰μH به‌طور متوالی به مقاومت ۱/۲۰kΩ بسته شده است. (الف) اگر یک باتری ۱۴/۰V به دو سر این دو متصل شود، چه مدت طول می‌کشد تا جریان در مقاومت به ۸۰/۰٪ مقدار نهایی‌اش برسد؟ (ب) در زمان $t=۱/۰\tau_L$، جریان در مقاومت چقدر است؟

حل: (الف)

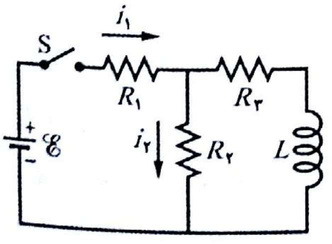
$$i=\frac{\varepsilon}{R}(۱-e^{-t/\tau_L})\Rightarrow۰/۸\frac{\varepsilon}{R}=\frac{\varepsilon}{R}(۱-e^{-\frac{R}{L}t})$$

$$\ln(۰/۲)=-\frac{R}{L}t=-\frac{(۱/۲\times۱۰^{۳})}{(۶/۳\times۱۰^{-۶})}t\Rightarrow t=۸/۴۵\times۱۰^{-۹}\text{ s}$$

(ب) در $t=\tau_L$ جریان در مدار برابر است با:

$$i=\frac{\varepsilon}{R}(۱-e^{-۱})=\frac{(۱۴)}{(۱/۲\times۱۰^{۳})}(۱-e^{-۱})=۷/۳۷\times۱۰^{-۳}\text{ A}$$

•۵۶- در شکل ۲۶-۶۸، $\varepsilon=۱۰۰$V ، $R_۱=۱۰/۰\Omega$، $R_۲=۲۰/۰\Omega$، $R_۳=۳۰/۰\Omega$ و $L=۲/۰۰$H است. مقدارهای (الف) $i_۱$ و (ب) $i_۲$ بلافاصله پس از بستن کلید S. (جریانها را در جهتی که نشان داده شده‌اند دارای مقدارهای مثبت و جریانها در جهت مخالف را منفی در نظر بگیرید.) (پ) $i_۱$ و (ت) $i_۲$ مدتی پس از بستن کلید S و (ث) $i_۱$ و (ج) $i_۲$ بلافاصله پس از بازکردن کلید S (چ) $i_۱$ و (ح) $i_۲$ مدتی پس از بازکردن کلید S چقدرند؟



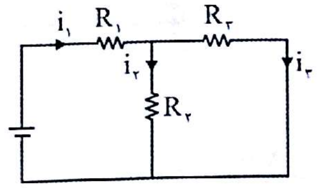
شکل ۲۶-۶۸ مسئلهٔ ۵۶

Scanned by CamScanner

حل: (الف) و (ب) درست پس از بستن کلید القاگر به صورت مدار باز عمل می‌کند و در نتیجه مقاومت $R_۳$ و القاگر از مدار خارج هستند یعنی $i_۳=۰$ و داریم

$$i_۱=i_۲=\frac{\varepsilon}{R_۱+R_۲}=\frac{۱۰۰}{(۱۰+۲۰)}=۳/۳۳\,\text{A}$$

(پ) مدت طولانی پس از بستن کلید جریان به حالت پایا می‌رسد و القاگر به صورت مدار کوتاه عمل می‌کند و در این موقع مدار به شکل زیر در می‌آید



ابتدا مقاومت معادل را حساب می‌کنیم

$$R_{eq}=R_۱+R_{۲۳}=R_۱+\frac{R_۲R_۳}{R_۲+R_۳}=$$
$$=۱۰+\frac{(۲۰)(۳۰)}{(۲۰+۳۰)}=۲۲\Omega$$

اکنون می‌توان $i_۱$ را به دست آورد.

$$i_۱=\frac{\varepsilon}{R_{eq}}=\frac{۱۰۰}{۲۲}=۴/۵۵\,\text{A}$$
$$i_۱=i_۲-i_۳\Rightarrow i_۳=i_۱-i_۲$$

از طرفی داریم $i_۲R_۲=i_۳R_۳$ که با قرار دادن $i_۳$ از معادله بالا داریم:

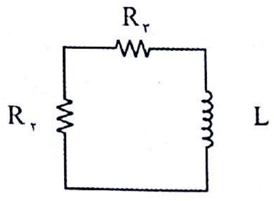
$$i_۲R_۲=(i_۱-i_۲)R_۳\Rightarrow i_۲=\frac{R_۳}{R_۲+R_۳}i_۱$$
$$i_۲=\frac{(۳۰)}{(۲۰+۳۰)}(۴/۵۵)=۲/۷۳\,\text{A}$$

که در نتیجه داریم:

$$i_۳=i_۱-i_۲=۴/۵۵-۲/۷۳=۱/۸۱\text{A}$$

(ث) درست پس از باز کردن کلید، $i_۱=۰$ و سمت چپ از مدار خارج می‌شود.

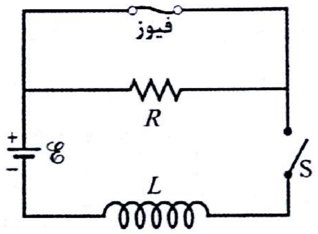
(ج) با حذف سمت چپ، مدار به صورت زیر درمی‌آید



به دلیل حضور القاگر، جریان در $R_۳$ با سرعت کمتری تغییر می‌کند و بلافاصله پس از باز شدن کلید جریان همان جریان عبوری اولیه یعنی $i_۳=۱/۸۲\text{A}$ است. جریان در $R_۲$ دارای همین بزرگی ولی در جهت مخالف است یعنی $i_۲=-۱/۸۲\text{A}$.

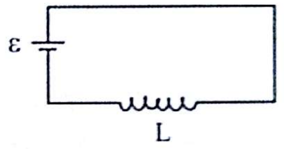
(چ) و (ح) پس از مدتی طولانی از باز شدن مجدد کلید، دیگر هیچ منبع emf در مدار وجود نداشته و سرانجام تمام جریان‌ها به سمت صفر میل می‌کنند یعنی $i_۲=i_۳=۰$.

••۵۷- در شکل ۲۶-۶۹، $R=۱۵\ \Omega$، $L=۵/۰\ \text{H}$، باتری آرمانی با $\varepsilon=۱۰\ \text{V}$ و فیوز آرمانی $۳/۰\ \text{A}$ در شاخه بالایی وجود دارند. فیوز تا وقتی که جریان در آن کمتر از $۳/۰\ \text{A}$ باشد مقاومتش صفر است. اگر جریان به $۳/۰\ \text{A}$ برسد فیوز «می‌سوزد» و پس از آن مقاومتش بینهایت است. کلید S در زمان $t=۰$ بسته می‌شود. (الف) در چه زمانی فیوز می‌سوزد؟ (*راهنمایی:* معادلهٔ ۲۶-۴۱ در اینجا کاربرد ندارد. معادلهٔ ۲۶-۳۹ را بازنگری کنید.) (ب) نمودار جریان i در القاگر را برحسب زمان رسم کنید. زمانی را که فیوز می‌سوزد علامت بگذارید.



شکل ۲۶-۶۹ مسئله ۵۷

حل: (الف) پیش از آنکه جریان فیوز به ۳A رسیده و بسوزد، مقاومت فیوز صفر و بنابراین اتصال کوتاه می‌شود. به این ترتیب مقاومت R از مدار خارج می‌شود و مدار به صورت زیر است



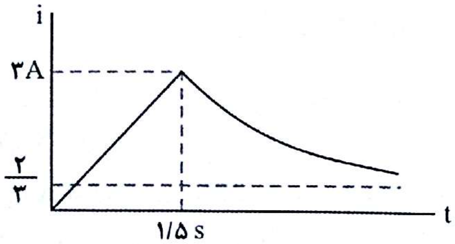
حال با استفاده از قضیه حلقه داریم:

$$\varepsilon-L\frac{di}{dt}=۰\Rightarrow\frac{di}{dt}=\frac{\varepsilon}{L}\Rightarrow i=\frac{\varepsilon}{L}t$$

که زمان سوختن فیوز به دست می‌آید:

$$t=\frac{iL}{\varepsilon}=\frac{(۳)(۵)}{۱۰}=۱/۵s$$

(ب) از روابط فوق می‌بینیم که تا $t=۱/۵s$ رابطه بین جریان در $t_۰=۱/۵s$ برابر با ۳A و با توجه به رابطه جریان برای مدار RL در $t=\infty$، $i=\frac{\varepsilon}{R}=\frac{۲}{۳}$ است لذا نمودار i را می‌توان به صورت زیر رسم کرد.



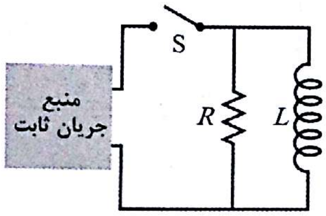
••۵۸- فرض کنید emf باتری در مدار نشان داده در شکل ۲۶-۲۱ به گونه‌ای نسبت به زمان t تغییر می‌کند که جریان از رابطهٔ $i(t)=۳/۰+۵/۰t$ به دست می‌آید که در آن i برحسب آمپر و t برحسب ثانیه است. فرض کنید $R=۴/۰\Omega$ و $L=۶/۰\text{H}$، رابطه‌ای برای emf باتری به صورت تابعی از زمان به دست آورید. (*راهنمایی:* قاعدهٔ حلقه را به کار برید.)

Scanned by CamScanner

حل: از قضیه حلقه برای مدار RL داریم

$$\varepsilon=-Ri-L\frac{di}{dt}=0\Rightarrow\varepsilon=L\frac{di}{dt}+Ri$$
$$\varepsilon=L(5)+R(3+5t)=(6)(5)+(4)(3+5t)$$
$$\varepsilon=42+20t$$

۵۹●●●- در شکل ۲۶-۷۰ پس از بستن کلید در زمان t، emf منبع به طور خودکار تنظیم می‌شود تا جریان ثابت i برقرار بماند. (الف) جریانی که از القاگر می‌گذرد را برحسب تابعی از زمان به دست آورید. (ب) در چه زمانی جریان در مقاومت با جریان در القاگر مساوی می‌شود؟ SSM WWW



شکل ۲۶-۷۰ مسئلهٔ ۵۹

حل: (الف) اختلاف پتانسیل دو سر سیم پیچ و مقاومت با یکدیگر برابر است.

$$Ri_1=L\frac{di_2}{dt}$$

از قاعده اشعاب داریم $i=i_1+i_2$ لذا $\frac{di_2}{dt}=-\frac{di_1}{dt}$ در نتیجه خواهیم داشت. (i جریان منبع ثابت است)

$$Ri_1+L\frac{di_1}{dt}=0\Rightarrow i=i_0e^{-R\frac{t}{L}}$$

که در آن i_0 جریان عبوری از مقاومت در $t=0$ است. در این لحظه القاگر مانع عبور جریان شده و اتصال باز است. بنابراین در این لحظه $i_2=0$ و $i_1=i=i_0$ است و در نتیجه داریم

$$i_1=i_e^{-R\frac{t}{L}}\quad,\quad i_2=(i-i_1)=i(1-e^{-R\frac{t}{R}})$$

(ب) هرگاه $i_1=i_2$ باشد از معادلات بالا داریم

$$e^{-R\frac{t}{L}}=1-e^{-R\frac{t}{L}}\Rightarrow e^{-R\frac{t}{L}}=\frac{1}{2}$$

از طرفین لگاریتم بگیریم داریم

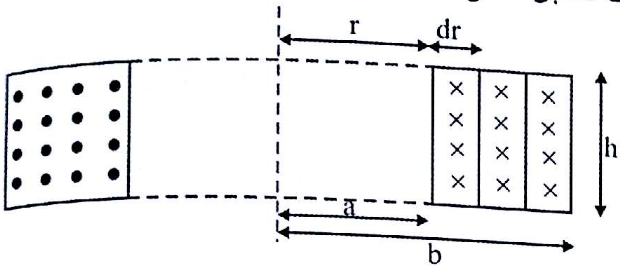
$$-\frac{Rt}{L}=\ln\left(\frac{1}{2}\right)\Rightarrow t=\frac{L}{R}\ln 2$$

۶۰●●●- یک هستهٔ چنبره‌ای چوبی با مقطع مربعی دارای شعاع داخلی ۱۰cm و شعاع خارجی ۱۲cm است. روی هسته یک لایه سیم پیچیده شده است (با قطر ۱/۰mm و مقاومت هر متر برابر ۰/۰۲Ω/m). (الف) القاییدگی و (ب) ثابت زمانی القایی چنبرهٔ حاصل چقدر است؟ از ضخامت عایق روی سیم صرفنظر کنید.

حل: (الف) اگر هر ضلع مقطع چنبره یا ارتفاع را با h و a شعاع داخلی و b شعاع خارجی باشد $h=b-a=0.12-0.1=0.02\,\text{m}$ می‌شود. با محاسبه Φ_B می‌توان L را به دست آورد.

$$\Phi_B=\int B.dA=\int_a^b\left(\frac{\mu_0 Ni}{2\pi r}\right)(hdr)$$

عنصر سطح یک نوار به پهنای dr و ارتفاع h در نظر گرفته شده است مطابق شکل



$$\Phi_B=\frac{\mu_0 nih}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

$$N\Phi_B=Li\Rightarrow L=\frac{N\Phi_B}{i}=\frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

اکنون باید N را به دست آورد. N دور سیم با قطر ۱mm چنبره را پوشانده است. چون محیط داخلی برابر $2\pi a=2\pi(10)=62.8\,\text{cm}$ است. تعداد دور برابر است با $N=62.8/0.1=628$ لذا داریم

$$L=\frac{(4\pi\times10^{-7})(628)^2(0.02)}{2\pi}\ln\left(\frac{12}{10}\right)=2.88\times10^{-4}\ \text{H}$$

(ب) برای محاسبه τ_L، ابتدا باید R را به دست آورد. مقاومت بر یکای طول سیم $0.02\,\Omega/\text{m}$ داده شده است. طول هر ضلع مربع h و پیرامون آن $4h$ است لذا طول سیم برابر است با

$$\ell=N(4H)=(628)(4)(0.02)=50.24\,\text{m}$$
$$R=(5.24)(0.02)=1\,\Omega$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\tau_l=\frac{L}{R}=\frac{2.88\times10^{-4}}{1}=2.88\times10^{-4}\,\text{s}$$

بخش ۲۶-۱۰ انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی

۶۱●- در $t=0$، یک باتری به طور متوالی به یک مقاومت و یک القاگر متصل است. اگر ثابت زمانی القایی برابر با ۳۷/۰ms باشد، در چه زمانی آهنگی که انرژی در مقاومت تلف می‌شود با آهنگی که انرژی در میدان مغناطیسی القاگر ذخیره می‌شود برابر است؟

حل: داریم $U_B=\frac{1}{2}Li^2$ و $i=\frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)$ در نتیجه برای آهنگ ذخیره انرژی در القاگر خواهیم داشت

$$\frac{dU_B}{dt}=Li\frac{di}{dt}=L\frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)\left(\frac{R}{L}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$\frac{\varepsilon^2}{R}e^{-\frac{t}{\tau_L}}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)$$

آهنگ تولید انرژی گرمایی در مقاومت چنین است:

$$P_{th}=Ri^2=R\frac{\varepsilon^2}{R^2}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2=\frac{\varepsilon^2}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2$$

حال می‌توان این را با $dU_{B/dt}$ برابر قرار داده و آن را برای t حل کرد:

Scanned by CamScanner

$$\frac{\varepsilon^۲}{R^۲}e^{-\frac{t}{\tau}}\left(۱-e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)^۲=\frac{\varepsilon^۲}{R}\left(۱-e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)^۲$$

$$e^{-\frac{t}{\tau_L}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow t=\tau_L\ln_۲=(۳\times۱۰^{-۳})\ln_۲=۲۵/۶۵\times۱۰^{-۳}\ \text{s}$$

۶۲●- در $t=۰$، یک باتری به طور متوالی به یک مقاومت و یک القاگر متصل است. در چه مضربی از ثابت زمانی القایی، انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی القاگر ۰/۵۰۰ برابر مقدار حالت پایای آن است؟

حل: $U_B=\frac{۱}{۲}Li^۲\quad,\quad i=\frac{\varepsilon}{R}(۱-e^{-\frac{t}{\tau_L}})$

$$U_B=\frac{۱}{۲}L\frac{\varepsilon^۲}{R^۲}(۱-e^{-\frac{t}{\tau}})^۲$$

در حالت تعادل یعنی $t\to\infty$، $U_۰=\frac{۱}{۲}L\frac{\varepsilon^۲}{R^۲}$، در اینجا به دنبال زمانی هستیم که انرژی نصف این مقدار باشد یعنی

$$U=\frac{۱}{۲}U_۰\Rightarrow\frac{۱}{۲}L\frac{\varepsilon^۲}{R^۲}\left(۱-e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)^۲=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}L\frac{\varepsilon^۲}{R^۲}\right)^۲$$

$$۱-e^{-\frac{t}{\tau_L}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=۰/۷۰۷e^{-\frac{t}{\tau_L}}=۰/۲۹۳\Rightarrow$$

$$t=-\tau_L\ln(۰/۲۹۳)\Rightarrow\quad t=۱/۲۳\tau_L$$

۶۳●- پیچه‌ای به طور متوالی به یک مقاومت ۱۰/۰Ω متصل است. یک باتری آرمانی ۵۰/۰V به دو سر این وسیله اعمال می‌شود و پس از ۵/۰۰ms جریان به مقدار ۲/۰۰mA می‌رسد. (الف) القاییدگی پیچه را به دست آورید. (ب) در همین مدت چقدر انرژی در پیچه ذخیره می‌شود؟ SSM

حل: (الف)

$$i=\frac{\varepsilon}{R}(۱-e^{-\frac{t}{\tau_L}})\Rightarrow ۲\times۱۰^{-۳}=\frac{۵۰}{۱۰\times۱۰^۳}\left(۱-e^{-\frac{۵\times۱۰^{-۳}}{\tau_L}}\right)$$

$$\Rightarrow\tau_L=۹/۷۹\times۱۰^{-۳}\ \text{s}$$

$$\tau_L=\frac{L}{R}\Rightarrow ۹/۷۹\times۱۰^{-۳}=\frac{L}{۱۰\times۱۰^۳}\Rightarrow L=۹۷/۹\text{H}$$

(ب)

$$U_B=\frac{۱}{۲}Li^۲=\frac{۱}{۲}(۹۷/۹)(۲\times۱۰^{-۳})^۲=۱/۹۶\times۱۰^{-۴}\ \text{J}$$

۶۴●- پیچه‌ای با القاییدگی ۲/۰H و مقاومت ۱۰Ω ناگهان به یک باتری آرمانی با ε=۱۰۰V، وصل می‌شود. در ۰/۱۰s پس از آنکه اتصال برقرار شد، با چه آهنگی (الف) انرژی در میدان مغناطیسی ذخیره می‌شود، (ب) انرژی گرمایی در مقاومت ظاهر می‌شود، و (پ) انرژی به وسیلهٔ باتری تأمین می‌شود.

حل: داریم: $i=\frac{\varepsilon}{R}\left(۱-e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)^۲$ و $\tau_L=\frac{L}{R}=\frac{۲}{۱۰}=۰/۱s$.

$$U_B=\frac{۱}{۲}Li^۲=\frac{۱}{۲}L\frac{\varepsilon^۲}{R^۲}\left(۱-e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)^۲$$

$$\frac{dU_B}{dt}=\frac{۱}{۲}L\frac{\varepsilon^۲}{R^۲}\cdot\frac{R}{L}\left(۱-e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)e^{-\frac{t}{\tau_L}}=\frac{\varepsilon^۲}{R}e^{-\frac{t}{\tau_L}}\left(۱-e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)$$

به ازای $t=۰/۱s$ خواهیم داشت $dU_B/dt=۲/۸۳\times۱۰^۲$ W.

(ب) $P_{th}=Ri^۲=R\frac{\varepsilon^۲}{R^۲}\left(۱-e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)^۲=\frac{\varepsilon^۲}{R}\left(۱-e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)^۲$

که به ازای $t=۰/۱s$ خواهیم داشت $P_{th}=۱/۵۴\times۱۰^۲$ W.

(پ) از پایستگی انرژی داریم

$$P_{\text{باتری}}=P_{th}+\frac{dU_B}{dt}=۳/۹۳\times۱۰^۲\text{W}$$

می‌توانستیم از معادله $P=\varepsilon i$ استفاده کنیم.

۶۵●●- برای مدار شکل ۲۶-۲۱، فرض کنید که $\mathscr{E}$=۱۰/۰V، R=۶/۷۰Ω و L=۵/۵۰H است. یک باتری آرمانی در زمان t=۰ به مدار وصل می‌شود. (الف) در طی ۲/۰s اول چقدر انرژی به وسیلهٔ باتری تأمین می‌شود؟ (ب) چه مقدار از این انرژی در میدان مغناطیسی القاگر ذخیره می‌شود؟ (پ) چه مقدار از این انرژی در مقاومت تلف می‌شود؟ GO

حل: داریم: $P_{\text{باتری}}=\varepsilon i$ و $i=\frac{\varepsilon}{R}\left(۱-e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)$.

(الف) $P_{\text{باتری}}=\frac{dU_{\text{باتری}}}{dt}=\varepsilon i\frac{\varepsilon^۲}{R}(۱-e^{-\frac{t}{\tau_L}})$

در نتیجه انرژی تأمین شده توسط باتری چنین می‌شود

$$U_{\text{باتری}}=\int_۰^t\frac{\varepsilon^۲}{R}\left(۱-e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)dt=\frac{\varepsilon^۲}{R}\left[t+\frac{L}{R}(e^{-R\frac{t}{L}}-۱)\right]$$

که به ازای $t=۲s$ خواهیم داشت $U_{\text{باتری}}$=۱۸/۷J.

(ب) انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی از رابطه زیر به دست می‌آید

$$U_B=\frac{۱}{۲}Li^۲=\frac{۱}{۲}L\frac{\varepsilon^۲}{R^۲}(۱-e^{-R\frac{t}{L}})^۲$$

که به ازای $t=۲s$ خواهیم داشت U_B=۵/۱J

(ب) انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی از رابطه زیر به دست می‌آید

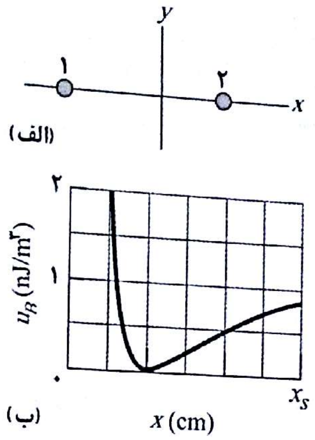
$$U_{th}=\int_۰^t Ri^۲dt$$

که با قرار دادن رابطه I و انتگرال‌گیری به جواب U_{th}=۱۳/۶ می‌رسیم. این نتیجه را می‌توان از پایستگی انرژی نیز به دست آورد. اختلاف دو مقدار انرژی به دست آمده در بالا، انرژی تلف شده در مقاومت را به دست می‌دهد

$$U_{th}=۱۸/۷-۵/۱=۱۳/۶\text{J}$$

۶۶●●- شکل ۲۶-۷۱ الف مقطع دو سیم را نشان می‌دهد که مستقیم، موازی و خیلی درازند. نسبت $i_۱/i_۲$ جریانی که سیم ۱ حمل می‌کند به جریانی که سیم ۲ حمل می‌کند برابر $\frac{۱}{۳}$ است. سیم ۱ ثابت است ولی سیم ۲ می‌تواند در امتداد قسمت مثبت محور x حرکت کند تا اینکه چگالی انرژی مغناطیسی u_B برقرار شده توسط دو جریان در مبدأ را تغییر دهد. شکل ۲۶-۷۱ ب، u_B را برحسب تابعی از مکان x سیم ۲ نشان می‌دهد. وقتی $x\to\infty$، منحنی :ارای مجانب u_B=۱/۹۶nJ/m³ است و مقیاس محور افقی با x_s =۶۰/۰cm مشخص شده است. مقدار (الف) $i_۱$ و (ب) $i_۲$ چندر است؟

Scanned by CamScanner



شکل ۲۶-۷۱ مسئلهٔ ۶۶

حل: (الف) $i_۲ = ۳i_۱$ و از نمودار می‌توان دید که اگر $x = ۲\text{cm}$ باشد چگالی انرژی در مبدأ و در نتیجه میدان مغناطیسی در مبدأ صفر است.

$$B_۱ = \frac{\mu_۰ i_۱}{۲\pi r} \quad , \quad B_۲ = \frac{\mu_۰ i_۲}{۲\pi x}$$

و این دو میدان اثر هم را خنثی کرده‌اند

$$\frac{\mu_۰ i_۱}{۲\pi r} = \frac{\mu_۰ i_۲}{۲\pi x} \Rightarrow \frac{i_۱}{r} = \frac{۳i_۱}{۰/۲} \Rightarrow r = ۰/۰۶۷\,\text{m}$$

در حالتی که $x \to \infty$، اثر آن در مبدأ ناچیز است و چگالی انرژی فقط مربوط به سیم ۱ است.

$$U_{B,۱} = \frac{B_۱^۲}{۲\mu_۰} = \frac{\mu_۰^۲ i_۱^۲}{(۲\mu_۰)(۴\pi^۲ r^۲)} = \frac{\mu_۰ i_۱^۲}{۸\pi^۲ r^۲}$$

$$\Rightarrow ۱/۹۶\times۱۰^{-۹} = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷}) i_۱^۲}{۸\pi^۲(۰/۰۶۷)^۲} \Rightarrow i_۱ = ۲/۳۵\times۱۰^{-۲}\,\text{A}$$

(ب)

$$i_۲ = ۳i_۱ = ۷/۰۵\times۱۰^{-۲}\,\text{A}$$

بخش ۲۶-۱۱ چگالی انرژی میدان مغناطیسی

●۶۷- بزرگی میدان الکتریکی یکنواختی که چگالی انرژی آن با چگالی انرژی مربوطه به میدان مغناطیسی ۰/۵۰T یکسان باشد، چقدر است؟ ILW

حل:

$$\frac{۱}{۲}\varepsilon_۰ E^۲ = \frac{B^۲}{۲\mu_۰} \Rightarrow E^۲ = \frac{B^۲}{\varepsilon_۰\mu_۰}$$

می‌دانیم که $c^۲ = \frac{۱}{\varepsilon_۰\mu_۰}$ و c سرعت سیر نور در خلاء است.

$$E = cB = (۳\times۱۰^۸)(۰/۵) = ۱/۵\times۱۰^۸\,\text{V/m}$$

●۶۸- یک القاگر چنبره‌ای با القاییدگی ۹۰/۰mH، حجم ۰/۰۲۰۰m³ را در بردارد. اگر چگالی انرژی میانگین در چنبره ۷۰/۰J/m³ باشد، جریان عبوری از القاگر چقدر است؟

حل: انرژی ذخیره شده در چنبره برابر است با $U_B = u_B V$، که u_B چگالی انرژی و V حجم است. از طرف دیگر داریم $U_B = (۱/۲)Li^۲$ لذا می‌توان نوشت

$$i = \sqrt{\frac{۲u_B V}{L}} = \sqrt{\frac{۲(۷۰)(۰/۰۲)}{(۹۰\times۱۰^{-۳})}} = ۵/۵۸\,\text{A}$$

●۶۹- سیملوله‌ای به طول ۸۵/۰cm دارای مساحت سطح مقطع ۱۷/۰cm² است. سیملوله تعداد ۹۵۰ دور سیم دارد که حامل جریان ۶/۶۰A است. (الف) چگالی انرژی میدان مغناطیسی داخل سیملوله را حساب کنید. (ب) انرژی کل ذخیره شده در میدان مغناطیسی داخل سیملوله را به دست آورید (از اثرهای انتهایی دو سیملوله صرفنظر کنید.) SSM

حل: (الف) میدان مغناطیسی درون سیملوله برابر است با

$$B = \mu_۰ \frac{N}{\ell} i$$

$$u_B = \frac{B^۲}{۲\mu_۰} = \frac{\mu_۰^۲ \frac{N^۲}{\ell^۲} i^۲}{۲\mu_۰} = \frac{۱}{۲}\mu_۰\frac{N^۲}{\ell^۲}i^۲$$

$$= \frac{۱}{۲}(۴\pi\times۱۰^{-۷})\left(\frac{۹۵۰}{۰/۸۵}\right)^۲(۶/۶)^۲ = ۳۴/۲\,\text{J/m}^۳$$

(ب)

$$U_B = u_B V = u_B A\ell = (۳۴/۲)(۱۷\times۱۰^{-۴})(۰/۸۵) = ۴/۹۴\times۱۰^{-۲}\,\text{J}$$

●۷۰- یک حلقهٔ دایره‌ای از سیم به شعاع ۵۰mm حامل جریان ۱۰۰A است. مطلوب است (الف) بزرگی شدت میدان و (ب) چگالی انرژی در مرکز حلقه.

حل: (الف) بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز حلقه چنین است

$$B = \frac{\mu_۰ i}{۲R} = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۱۰۰A)}{۲(۵۰\times۱۰^{-۳})} = ۱/۲۶\times۱۰^{-۳}\,\text{T}$$

(ب) آنگاه انرژی ذخیره شده در یکای حجم همسایگی مرکز حلقه چنین است

$$u_B = \frac{B^۲}{۲\mu_۰} = \frac{(۱/۲۶\times۱۰^{-۳})^۲}{۲(۴\pi\times۱۰^{-۷})} = ۰/۶۲۸\,\text{J/m}^۳$$

●۷۱- طولی از یک سیم مسی حامل جریان ۱۰A است که به طور یکنواخت روی سطح مقطعش توزیع شده است. مطلوب است چگالی انرژی (الف) میدان مغناطیسی و (ب) میدان الکتریکی در سطح سیم. قطر سیم ۲/۵mm و مقاومت یکای طول آن برابر ۳/۳Ω/km است.

حل: (الف) میدان مغناطیسی روی سطح سیم $B = \frac{\mu_۰ i}{۲R}$ است لذا خواهیم داشت

$$u_B = \frac{B^۲}{۲\mu_۰} = \frac{۱}{۲\mu_۰}\left(\frac{\mu_۰ i}{۲R}\right)^۲ = \frac{\mu_۰ i^۲}{۸R^۲}$$

$$= \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۱۰)^۲}{۸(۲/۵\times۱۰^{-۲})^۲} = ۱/۰۱\,\text{J/m}^۳$$

(ب)

$$u_B = \frac{۱}{۲}\varepsilon_۰ E^۲ = \frac{۱}{۲}\varepsilon_۰(\rho j)^۲$$

که در آن $j = i/A$ و $\rho = \frac{RA}{\rho}$ در نتیجه $\rho j = \frac{Ri}{\ell}$ لذا خواهیم داشت

$$u_B=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{Ri}{\ell}\right)=\frac{1}{2}(8/85\times10^{-12})\left[\frac{(3/3)(10)}{(10^3)}\right]$$
$$=4/48\times10^{-15}\ \text{J/m}^3$$

بخش ۲۶-۱۲ القایش متقابل

●۷۲- دو سیملوله قسمتی از پیچهٔ جرقهٔ یک اتومبیل‌اند. وقتی در ۲/۵ms ، جریان در یک سیملوله از ۶/۰A به صفر کاهش می‌یابد، یک emf برابر ۳۰kV در سیملولهٔ دیگر القا می‌شود. القاییدگی متقابل M سیملوله‌ها چقدر است؟

حل:

$$\varepsilon_2=-M\frac{di_1}{dt}\Rightarrow 30\times10^3=-M\frac{0-6}{2/5\times10^{-3}}$$
$$\Rightarrow M=12/5\text{H}$$

●۷۳- دو پیچه در مکانهای معین قرار دارند. وقتی در پیچهٔ ۱ جریانی برقرار نیست و در پیچهٔ ۲ جریان با آهنگ ۱۵/۰A/s افزایش می‌یابد، نیروی محرکهٔ الکتریکی در پیچهٔ ۱ برابر ۲۵/۰mV است. (الف) القاییدگی متقابل آنها چقدر است؟ (ب) وقتی در پیچهٔ ۲ جریانی برقرار نیست و در پیچهٔ ۱ جریان ۳/۶۰A برقرار است، شار پیوند خورده در پیچهٔ ۲ چقدر است؟ SSM

حل: (الف)

$$\varepsilon_1=\left|M\frac{di_2}{dt}\right|\Rightarrow 25\times10^3=M(15)$$
$$\Rightarrow M=1/67\times10^{-3}\ \text{H}$$

(ب)

$$N_2\Phi_{21}=Mi_1=(1/67\times10^{-3})(3/6)=6\times10^{-3}\ \text{Wb}$$

●۷۴- پیچهٔ ۱ دارای $L_1=25\text{mH}$ و $N_1=100$ دور است. پیچهٔ ۲ دارای $L_2=40\text{mH}$ و $N_2=200$ دور است. وضعیت دو پیچه نسبت به هم ثابت است؛ القاییدگی متقابل آنها ۳/۰mH است. جریان ۶/۰mA در پیچهٔ ۱ با آهنگ ۴/۰A/s تغییر می‌کند. (الف) شار مغناطیسی Φ_{12} که به پیچهٔ ۱ پیوند می‌خورد چقدر است؟ و (ب) emf خود القایی که در آن پیچه ظاهر می‌شود چقدر است؟ (پ) شار مغناطیسی Φ_{21} که به پیچهٔ ۲ پیوند می‌خورد چقدر است؟ و (ت) چه emf القا شدهٔ متقابلی در آن پیچه ظاهر می‌شود؟

حل: (الف) چون صورت مسئله جریان عبوری از پیچه دوم را نداده است. بنابراین شار Φ_{12} که به پیچه اول پیوند خورده است را ناشی از خود القایی پیچه اول می‌گیریم در نتیجه داریم:

$$\Phi_{12}=\Phi_1=\frac{L_1i_1}{N_1}=\frac{(25\times10^{-3})(6\times10^{-3})}{(100)}=1/5\times10^{-6}\ \text{Wb}$$

(ب)

$$|\varepsilon_1|=L_1\frac{di_1}{dt}=(25\times10^{-3})(4)=0/1\ \text{V}$$

(پ) برای پیچه ۲ داریم:

$$\Phi_{21}=\frac{Mi_1}{N_2}=\frac{(3\times10^{-3})(6\times10^{-3})}{(200)}=90\times10^{-9}\ \text{Wb}$$
$$=90n\text{Wb}$$

(ت) بزرگی emf ناشی از القای متقابل چنین است

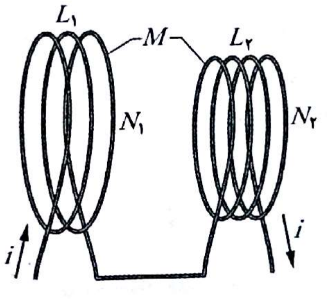
$$\varepsilon_{21}=M\frac{di_1}{dt}=(3\times10^{-3})(4)=1/2\times10^{-2}\ \text{V}$$

●●۷۵- دو پیچه که مطابق شکل ۲۶-۷۲ به هم متصل‌اند، هر یک به طور جداگانه دارای القاییدگی L_1 و L_2 هستند. القاییدگی متقابل M است. (الف) نشان دهید این ترتیب می‌تواند با یک پیچهٔ تنها جایگزین شود که القاییدگی آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$L_{eq}=L_1+L_2+2M$$

(ب) پیچه‌های شکل ۲۶-۷۲ را چگونه می‌توان دوباره به هم بست تا القاییدگی معادل از رابطهٔ زیر به دست آید

$$L_{eq}=L_1+L_2-2M$$



شکل ۲۶-۷۲ مسئلهٔ ۷۵

(این مسئله، تعمیمی از مسئلهٔ ۴۷ است، اما شرط اینکه پیچه‌ها از هم دور باشند، حذف شده است.) SSM

حل: (الف) از قاعده دست راست درمی‌یابیم که وقتی جریان افزایش می‌یابد میدان در هر دو پیچه نیز افزایش می‌یابد و در نتیجه تغییر شار ناشی از این افزایش باعث emfهایی در یک جهت در هر حلقه می‌شود. بنابراین داریم:

$$\varepsilon_1=-(L_1+M)\frac{di}{dt}\ ,\quad \varepsilon_2=-(L_2+M)\frac{di}{dt}$$

لذا، emf کل حاصل از دو حلقه برابر است با:

$$\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2=-(L_1+L_2+2M)\frac{di}{dt}$$

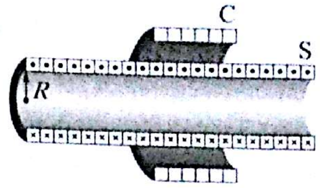
که این می‌تواند emf ناشی از یک تک حلقه با القاییدگی $L_{eq}=L_1+L_2+2M$ در نظر گرفته شود.

(ب) اگر پیچه‌ها در خلاف جهت بسته شوند با همان روش و با استفاده از قاعده دست راست خواهیم داشت:

$$L_{eq}=L_1+L_2-2M$$

●●۷۶- پیچهٔ C با N دور سیم، مطابق شکل ۲۶-۷۳، دور سیملولهٔ درازی به شعاع R و n دور سیم در یکای طول قرار داده شده است. (الف) نشان دهید که القاییدگی متقابل ترکیب پیچه - سیملوله با رابطهٔ $M=\mu_0\pi R^2nN$ داده می‌شود. (ب) توضیح دهید که چرا M به شکل، اندازه یا امکان اینکه پیچه به طور فشرده سیم پیچی نشده باشد بستگی ندارد.

Scanned by CamScanner



شکل ۲۶-۷۳ مسئلهٔ ۷۶

حل: (الف) شار سیملوله برای هر حلقه برابر است با

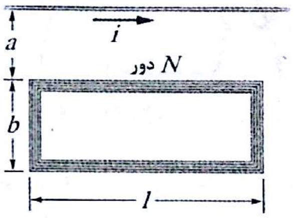
$B_1=\mu_0 n_1 i_1$

Φ_{21} شاری که در نتیجه میدان ۱ از پیچه ۲ می‌گذرد برابر است با:

$\Phi_{21}=B_1 N_2 A_1=\mu_0 n_1 i_1 N_2 \pi R^2 = M i_1 \Rightarrow M=\mu_0 \pi R^2 n N$

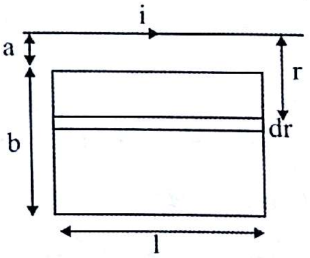
(ب) M به شکل و اندازه شعاع پیچه بستگی ندارد زیرا شار فقط از ناحیه درون سیملوله عبور می‌کند و بقیه مساحت پیچه تأثیری در آن ندارد.

••۷۷- حلقهٔ مستطیل شکلی با N دور سیم پیچ فشرده مطابق شکل ۲۶-۷۴ در کنار یک سیم مستقیم دراز قرار دارد. اگر $N=$ ۱۰۰، $a=$ ۱/۰ cm، $b=$ ۸/۰ cm و $l=$ ۳۰ cm باشد، القاییدگی متقابل M برای ترکیب حلقه - سیم چقدر است؟



شکل ۲۶-۷۴ مسئلهٔ ۷۷

حل: یک نوار مستطیلی از حلقه را انتخاب و شار عبوری از آن را حساب می‌کنیم



$$\Phi_B=\int \vec{B}_{\text{سیم}}\cdot d\vec{A}=\int_a^{a+b}\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\ell\, dr=\frac{\mu_0 i \ell}{2\pi}\ln\left(\frac{a+b}{a}\right)$$

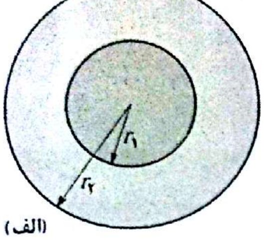
اکنون می‌توان M را از رابطه زیر به دست آورد.

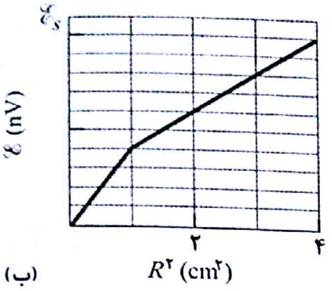
$$M=\frac{N\Phi_B}{i}=\frac{N\mu_0 \ell}{2\pi}\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت $M=$ ۱/۳۱×۱۰$^{-5}$ H.

مسئله‌های اضافی

۷۸- شکل ۲۶-۷۵ الف دو ناحیهٔ دایره‌ای هم مرکز را نشان می‌دهد که میدانهای مغناطیسی یکنواختی می‌توانند در آنها تغییر کنند. ناحیهٔ ۱، با شعاع $r_1=$ ۱/۰cm دارای میدان مغناطیسی به سمت خارج $\vec{B}_1$ است که بزرگی آن افزایش می‌یابد. ناحیهٔ ۲ با





شکل ۲۶-۷۵ مسئلهٔ ۷۸

شعاع $r_2=$ ۲/۰cm ، دارای میدان مغناطیسی به سمت خارج $\vec{B}_2$ است که آن نیز می‌تواند تغییر کند. فرض کنید یک حلقهٔ رسانا به شعاع R در مرکز این دو ناحیه باشد و بخواهیم emf، ε، را دور این حلقه حساب کنیم. شکل ۲۶-۷۵ ب emf، ε، را به عنوان تابعی از مجذور شعاع R^2 حلقه تا لبهٔ بیرونی ناحیهٔ ۲ نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $\varepsilon_s=$ ۲۰/۰nV مشخص شده است. آهنگ (الف) dB_1/dt و (ب) dB_2/dt چقدر است؟ (پ) آیا بزرگی $\vec{B}_2$ افزایش می‌یابد یا کاهش یا ثابت می‌ماند؟

حل: بزرگی emf القایی را می‌توان برای یک تک حلقه دور به شعاع R از رابطه زیر به دست آورد.

$$|\varepsilon|=\frac{d\Phi_B}{dt}=\pi R^2\frac{dB}{dt}$$

حال با تقسیم این رابطه بر R^2، آن را می‌توان به شیب منحنی شکل (ب) مربوط کرد.

(الف) برای ناحیه ۱، $r_1^2=$ ۱ cm^2 است و بنابراین باید از شیب قسمت اول منحنی استفاده کنیم. شیب قسمت اول منحنی برابر است با $\varepsilon/R^2=$ ۴۰×۱۰$^{-6}$ V/m است و لذا داریم

$$\frac{dB_2}{dt}=(\text{۸۰}\times\text{۱۰}^{-6})/\pi=\text{۲۵/۴۷}\times\text{۱۰}^{-6}\ \text{T/s}$$

(ب) برای ناحیه ۲، $r_2^2=$ ۴ cm^2 است و بنابراین باید از شیب قسمت دوم منحنی استفاده کنیم. شیب قسمت دوم منحنی برابر است با $\varepsilon/R^2=$ ۴۰×۱۰$^{-6}$ V/m است و لذا داریم:

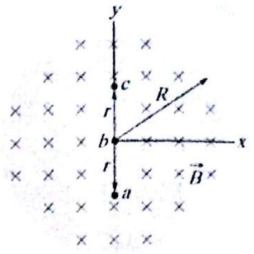
$$\frac{dB_2}{dt}=(\text{۴۰}\times\text{۱۰}^{-6})/\pi=\text{۱۲/۷۳}\times\text{۱۰}^{-6}\ \text{T/s}$$

(پ) با توجه به قانون لنز درمی‌یابیم که B_2 در حال افزایش است.

۷۹- شکل ۲۶-۷۶ میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ را که محدود به یک حجم استوانه‌ای به شعاع R است نشان می‌دهد. بزرگی $\vec{B}$ با آهنگ ثابت ۱۰mT/s کاهش می‌یابد. برحسب نماد بردار

Scanned by CamScanner

بکه، شتاب اولیهٔ الکترونی که در (الف) نقطهٔ a (فاصلهٔ شعاعی $r=۵/۰\,cm$) (ب) نقطهٔ b $(r=۰)$ و (پ) نقطهٔ c، $(r=۵/۰\,cm)$ رها شود چقدر است؟



شکل ۲۶-۷۶ مسئلهٔ ۷۹

حل: (الف) میدان الکتریکی القایی را در $r<a$ از شکل انتگرالی قانون فارادی (بدون در نظر گرفتن علامت منفی آن) به دست می‌آوریم

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{ds}=\frac{d\Phi_B}{dt}\Rightarrow E=\frac{r}{۲}\frac{dB}{dt}$$

حال می‌توان شتاب الکترون رها شده را در نقطه a به دست می‌آوریم

$$\vec{a}_a=\frac{eE}{m}\hat{i}=\frac{er}{۲m}\left(\frac{dB}{dt}\right)\hat{i}$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت $\vec{a}=(۴/۴\times۱۰^{۷}\ m/s^{۲})\hat{i}$.

(ب) دیدیم که $E\propto r$ ست و در نقطه b، $r=۰$ لذا $a_b=۰$ است.

(پ) شتاب الکترون رها شده در نقطه C، همان شتاب در نقطه a ولی در جهت مخالف آن است

$$\vec{a}_c=-\vec{a}_a=-(۴/۴\times۱۰^{۷}\ m/s^{۲})\hat{i}$$

۸۰- القاییدگی یک پیچه که به طور فشرده پیچیده شده به گونه‌ای است که وقتی جریان با آهنگ $۵/۰۰\,A/s$ تغییر کند یک emf برابر $۳/۰۰\,mV$ القا می‌شود. جریان پایای $۸/۰۰\,A$ شار مغناطیسی $۴۰/۰\,\mu Wb$ را در هر حلقه ایجاد می‌کند. (الف) القاییدگی پیچه را حساب کنید. (ب) پیچه چند دور دارد؟

حل: (الف)

$$\varepsilon=L\left|\frac{di}{dt}\right|\Rightarrow ۳\times۱۰^{-۳}=L(۵)\Rightarrow L=۰/۶\times۱۰^{-۳}\ H$$

(ب)

$$N\Phi_B=Li\Rightarrow N(۴۰\times۱۰^{-۶})=(۰/۶\times۱۰^{-۳})(۸)\Rightarrow N=۱۲۰$$

۸۱- صفحهٔ یک حلقهٔ سیمی مربعی به ضلع $۲۰\,cm$ و مقاومت $۲۰\,m\Omega$ بر میدان مغناطیسی یکنواخت $B=۰/۲\,T$ عمود است. اگر دو ضلع مقابل حلقه از هم دور کنید دو ضلع دیگر به هم نزدیک می‌شوند و مساحت محصور در حلقه کاهش می‌یابد. اگر مساحت محصور شده در زمان $\Delta t=۰/۲۰\,s$ به صفر کاهش یابد، مطلوب است (الف) emf میانگین و (ب) میانگین جریان القایی در حلقه در مدت Δt.

حل: (الف) بزرگی میانگین emf القا شده برابر است با:

$$\varepsilon_{ave}=\left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right|=\left|\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}\right|=\frac{B\Delta A}{\Delta t}=\frac{(۲)(۰/۲)^{۲}}{۰/۲}=۰/۴\,V$$

(ب) میانگین جریان القایی برابر است با:

$$i_{ave}=\frac{\varepsilon_{ave}}{R}=\frac{۰/۴}{۲۰\times۱۰^{-۳}}=۲۰\,A$$

۸۲- یک حلقهٔ سیمی مربعی در میدان مغناطیسی یکنواخت $۰/۲۴\,T$ که عمود بر صفحه حلقه است، قرار دارد. طول هر ضلع مربع با آهنگ ثابت $۵/۰\,cm/s$ کاهش می‌یابد. وقتی طول $۱۲\,cm$ است، emf القا شده در حلقه چقدر است؟

حل:

$$\Phi_B=BA=Ba^{۲}$$

وقتی اضلاع مربع تغییر می‌کند، اندازه emf القایی نیز تغییر می‌کند.

$$\varepsilon=\left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right|=۲Ba\frac{da}{dt}=$$
$$=(۲)(۰/۲۴)(۰/۱۲)(۵\times۱۰^{-۲})=۲/۹\times۱۰^{-۳}\ V$$

۸۳- در شکل ۲۶-۶۶ یک باتری آرمانی $۱۲/۰\,V$ با بستن کلید در زمان $t=۰$ به یک مقاومت $۲۰/۰\,\Omega$ و یک القاگر متصل می‌شود. با چه آهنگی در زمان $t=۱/۶۱\,\tau_L$ باتری انرژی را به میدان القاگر منتقل می‌کند؟

حل: انرژی ذخیره شده از $U_B=\frac{۱}{۲}Li^{۲}$ به دست می‌آید. بنابراین داریم:

$$d\frac{U_B}{dt}=Li\frac{di}{dt}$$

که در آن $i=\frac{\varepsilon}{R}(۱-e^{-\frac{t}{\tau_L}})$ و di/dt مشتق آن و $\tau_L=\frac{L}{R}$ است.

لذا خواهیم داشت:

$$\frac{dU_B}{dt}=L\frac{\varepsilon}{R}\left(۱-e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)\left(\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)=\frac{\varepsilon^{۲}}{R}\left(۱-e^{-\frac{t}{R}}\right)e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$
$$=\frac{(۱۲)^{۲}}{(۲۰)}(۱-e^{-۱/۶۱})e^{-۱/۶۱}=۱/۱۵\,W$$

۸۴- پس از برداشتن باتری از یک مدار RL (با $L=۲/۰۰\,H$ و $R=۳/۰۰\,\Omega$) چه مدت طول می‌کشد تا اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت در مدار به ٪۱۰/۰ مقدار اولیه‌اش کاهش یابد؟

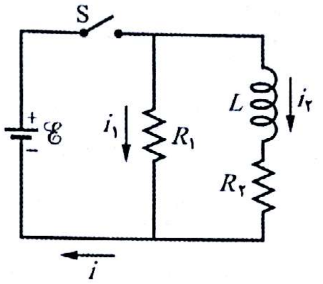
حل: برای کاهش جریان داریم $i=i_{\circ}e^{-\frac{t}{\tau_L}}$ که در اینجا $i=\%۱۰i_{\circ}$ است. معادله را برای t حل می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\ln\left(\frac{i}{i_{\circ}}\right)=-\frac{t}{\tau_L}=-\frac{L}{R}t\Rightarrow\ln(۰/۱)=-\frac{۲}{۳}t\Rightarrow t=۱/۵۴\,s$$

۸۵- در شکل ۲۶-۷۷، یک باتری آرمانی، $\mathcal{E}=۱۰\,V$، $R_۱=۵۰\,\Omega$، $R_۲=۱۰\,\Omega$ و $L=۵/۰\,H$ وجود دارد. کلید S در زمان $t=۰$ بسته می‌شود. درست پس از بستن، مطلوب است

Scanned by CamScanner

محاسبهٔ (الف) i_1، (ب) i_2، (پ) جریان i_S در کلید، (ت) اختلاف پتانسیل V_2 دو سر مقاومت R_2، (ث) اختلاف پتانسیل V_L دو سر القاگر، و (ج) آهنگ تغییر di_2/dt. پس از زمانی طولانی، مطلوب است (چ) i_1، (ح) i_2، (خ) i_S، (د) V_2، (ذ) L_L، و (ر) di_2/dt. SSM.



شکل ۲۶-۷۷ مسئلهٔ ۸۵

حل: (الف) و (ب) درست پس از بستن کلید، جریانی از القاگر نمی‌گذرد و القاگر به صورت مدار باز عمل می‌کند. بنابراین $i_2=0$ و برای i_1 داریم

$$i_1=\frac{\varepsilon}{R_1}=\frac{10}{5}=2A$$

(پ) از قاعده انشعاب جریان‌ها داریم:

$$i_s=i_1+i_2=2A$$

(ت)

$$V_2=R_2 i_2=0$$

(ث) با توجه به اینکه $V_2=0$ داریم:

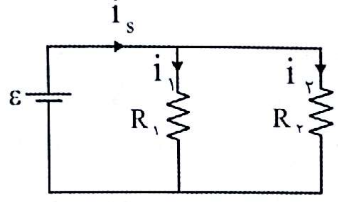
$$\varepsilon_L=\varepsilon=10V$$

(ج)

$$\varepsilon_L=L\left|\frac{di_2}{dt}\right|\Rightarrow\left|\frac{di_2}{dt}\right|=\frac{\varepsilon_L}{L}=\frac{\varepsilon}{L}$$

$$\frac{di_2}{dt}=\frac{10}{5}=2A/s$$

(چ) بعد از گذشتن زمان طولانی از بستن کلید، القاگر اتصال کوتاه می‌شود و آن را می‌توان با یک سیم جایگزین کرد. در این حالت مدار به صورت زیر درمی‌آید.



بنابراین داریم

$$i_1=\frac{V_1}{R_1}=\frac{\varepsilon}{R_1}=\frac{10}{5}=2A$$

(ح) همانطور که گفته شد $V_L=0$ و بنابراین پتانسیل دو سر R_2 همان پتانسیل دو سر باتری می‌شود و داریم:

$$i_2=\frac{V_2}{R_2}=\frac{\varepsilon}{R_2}=\frac{10}{10}=1A$$

(خ) از قاعده انشعاب جریان‌ها داریم:

$$i_s=i_1+i_2=2+1=3A$$

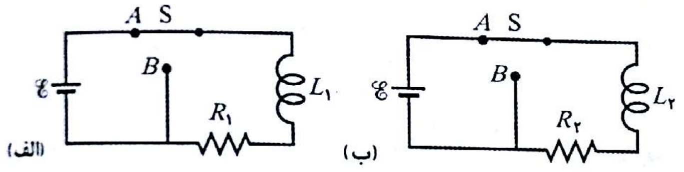
(د) همانطور که در قسمت (ح) گفته شد $V_L=0$ و در نتیجه $V_2=10V$ می‌شود.

(ذ) همانطور که گفته $V_L=0$

(ر)

$$V_L=L\frac{di_2}{dt}=0\Rightarrow\frac{di_2}{dt}=0$$

۸۶- در شکل ۲۶-۷۸ الف کلید S به قدر کافی روی A بسته است به طوری که جریانی پایا در القاگری با القایندگی $L_1=5/00mH$ و در مقاومت $R_1=25/0\Omega$، برقرار شده است. همچنین، در شکل ۲۶-۷۸ ب کلید S به قدر کافی روی A بسته است به طوری که جریانی پایا در القاگری با القایندگی $L_2=3/00mH$ و مقاومت $L_2=30/0mH$، برقرار شده است. نسبت Φ_{02}/Φ_{01}، شار مغناطیسی گذشته از یک دور القاگر ۲ به شار مغناطیسی گذشته از یک دور القاگر ۱ برابر ۱/۵ است. در زمان $t=0$ هر دو کلید روی B بسته می‌شوند. در چه زمان t شار گذشته از یک دور در دو القاگر مساوی است؟



شکل ۲۶-۷۸ مسئلهٔ ۸۶

حل: چون پس از برداشتن باتری، کاهش جریان از معادله $i=i_0e^{-\frac{t}{\tau_L}}$ پیروی می‌کند. بنابراین پس از بسته شدن کلیدها روی B، شار در القاگرهای ۱ و ۲ با معادله زیر کاهش می‌یابند

$$\Phi_1=\Phi_{10}e^{-\frac{t}{\tau_{L_1}}}\quad,\quad\Phi_2=\Phi_{20}e^{-\frac{t}{\tau_{L_2}}}$$

که در آن $\tau_{L_1}=\frac{L_1}{R_1}$ و $\tau_{L_2}=\frac{L_2}{R_2}$ است این شارها را با هم برابر قرار داده و معادله را برای t حل کنیم چنین خواهیم داشت

$$t=\frac{\ln\left(\frac{\Phi_{20}}{\Phi_{10}}\right)}{\frac{R_2}{L_2}+\frac{R_1}{L_1}}=\frac{\ln(1/5)}{\frac{3}{0/003}+\frac{25}{0/005}}=8/11\times10^{-5}\ s$$

۸۷- کلید S در شکل ۲۶-۶۶ در زمان $t=0$ بسته می‌شود، در آغاز جریانی از القاگر $15/0mH$ و مقاومت $20/0\Omega$ می‌گذرد. در چه زمانی emf دو سر القاگر با اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت یکسان است؟

حل:

$$i=\frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)=\frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$$

$$\frac{di}{dt}=\frac{\varepsilon}{L}e^{-\frac{Rt}{L}}$$

از طرف دیگر داریم:

$$Ri=L\frac{di}{dt}\Rightarrow R\frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{Rt}{L}}\right)=L\frac{\varepsilon}{L}e^{-\frac{Rt}{L}}$$

Scanned by CamScanner

$$e^{-\frac{Rt}{L}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow -\frac{R}{L}t = \ln\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

$$t = +\frac{L}{R}\ln(۲) = \frac{۱۵\times۱۰^{-۳}}{۲۰}\ln(۲) = ۵/۲\times۱۰^{-۴}\ s = ۰/۵۲ms$$

۸۸- در زمان $t=۰$ یک اختلاف پتانسیل ۱۲/۰V به طور ناگهانی به دو سر پیچه‌ای با القایدگی ۲۳/۰mH و مقاومت R اعمال می‌شود. در زمان $t=۰/۱۵۰ms$ ، جریان در القاگر با آهنگ ۲۸۰A/s تغییر می‌کند. مقدار R را محاسبه کنید.

حل:

$$i = \frac{\varepsilon}{R}\left(۱-e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right) \qquad \frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon}{L}e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

$$\Rightarrow ۲۸۰ = \frac{۱۲}{۲۳\times۱۰^{-۳}}e^{-\frac{t}{\tau_L}} \Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau_L}} = ۰/۵۳۷$$

$$-\frac{t}{\tau_L} = \ln(۰/۵۳۷) = -۰/۶۲۲$$

$$\Rightarrow \tau_L = \frac{۰/۱۵\times۱۰^{-۳}}{۰/۶۲۲} = ۲/۴۱\times۱۰^{-۴}\ s$$

$$\tau_L = \frac{L}{R} \Rightarrow R = \frac{L}{\tau_L} = \frac{۲۳\times۱۰^{-۳}}{۲/۴۱\times۱۰^{-۴}} = ۹۵/۴۴\Omega$$

۸۹- در زمان $t=۰$ ، یک اختلاف پتانسیل ۴۵V به طور ناگهانی به دو سر پیچه‌ای با القایدگی $L=۵۰mH$ و مقاومت $R=۱۸۰\Omega$ ، برقرار می‌شود. جریان در $t=۱/۲ms$ با چه آهنگی در پیچه افزایش می‌یابد.

حل:

$$\tau_L = \frac{L}{R} = \frac{۵۰\times۱۰^{-۳}}{۱۸۰} = ۲/۷۸\times۱۰^{-۴}\ s = ۰/۲۷۸ms$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\varepsilon}{R}\left(۱-e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)\right] = \frac{\varepsilon}{L}e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده داریم

$$\frac{di}{dt} = ۱۲A/s$$

۹۰- پیچه‌ای با ۱۵۰ دور، وقتی جریان ۲/۰۰mA از آن می‌گذرد، دارای شار مغناطیسی ۵۰/۰nT.m^۲ از هر دور است. (الف) القایدگی در پیچه چقدر است؟ مطلوب است محاسبهٔ (ب) القایدگی و (پ) شار عبوری از هر دور وقتی که جریان به ۴/۰۰mA افزایش یابد. (ت) وقتی جریان در پیچه با رابطهٔ $i=(۳/۰۰mA)\cos(۳۷۷t)$ داده شود، بیشینهٔ emf ، ε ، دو سر پیچه چقدر است؟

حل: (الف)

$$N\Phi_B = Li \Rightarrow L = \frac{N\Phi_B}{i}$$

$$L = \frac{(۱۵)(۵\times۱۰^{-۹})}{(۰/۰۰۲)} = ۳/۷۵\times۱۰^{-۳}\ H = ۳/۷۵mH$$

(ب) با تغییر شار، جریان تند تغییر می‌کند به طوری که L ثابت می‌ماند. می‌توان گفت L یک ضریب متناسب است. L در واقع به ساختمان داخل سیم‌پیچ بستگی دارد نه به مشخصات مدار. در نتیجه $L = ۳/۷۵mH$.

(پ) بدیهی است که اگر جریان دو برابر شود، میدان مغناطیسی و در نتیجه شار میدان مغناطیسی نیز دو برابر می‌شود. پس داریم $\Phi_{B_۲} = ۲(۵۰) = ۱۰۰\ nWb$.

(ت)

$$\varepsilon = -L\frac{di}{dt} = +(۳/۷۵\times۱۰^{-۳})(۳\times۱۰^{-۳})(۳۷۷)\sin(۳۷۷t)$$

$$\varepsilon_{max} = ۴/۲۴\times۱۰^{-۳}\ V$$

برای حالت بیشینه $\sin(۳۳۷t) = ۱$ منظور شده است.

۹۱- پیچه‌ای با القایدگی ۲/۰H و مقاومت ۱۰Ω به طور ناگهانی به یک باتری آرمانی با $\varepsilon=۱۰۰V$ متصل می‌شود. (الف) جریان تعادل چقدر است؟ (ب) وقتی این جریان در پیچه برقرار است، چقدر انرژی در میدان مغناطیسی ذخیره می‌شود؟

حل: (الف) جریان تعادل به ازای $t \to \infty$ به دست می‌آید، لذا داریم:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{۱۰۰}{۱۰} = ۱۰A$$

(ب) مقدار انرژی ذخیره شده برابر است با:

$$U_B = \frac{۱}{۲}Li^۲ = \frac{۱}{۲}(۲)(۱۰)^۲ = ۱۰۰\ J$$

۹۲- یک سیملولهٔ استوانه‌ای دراز با ۱۰۰ دور بر سانتی‌متر دارای شعاع ۱/۶ cm است. فرض کنید که میدان مغناطیسی ایجاد شده در داخل سیملوله موازی محور آن و یکنواخت است. (الف) القایدگی به ازای یک متر از طول آن چقدر است؟ (ب) اگر جریان با آهنگ ۱۳ A/s تغییر کند، emf القا شده در هر متر چقدر است؟

حل:

$$B = \mu_۰ ni \quad , \quad \Phi_B = BA = \mu_۰ niA = \mu_۰ ni\pi r^۲$$

$$N\Phi_B = n\ell\Phi_B = Li \Rightarrow \frac{L}{\ell} = \frac{n\Phi_B}{i}$$

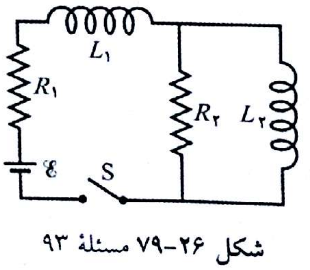
$$\frac{L}{\ell} = \mu_۰\pi^۲\pi r^۲ = (۴\pi\times۱۰^{-۷})(۱۰۰)^۲\pi(۱/۶\times۱۰^{-۲})$$

$$= ۰/۱H/m$$

(ب)

$$\varepsilon = L\left|\frac{di}{dt}\right| \Rightarrow \frac{\varepsilon}{\ell} = \frac{L}{\ell}\left|\frac{di}{dt}\right| = (۰/۱)(۱۳) = ۱۱/۳\ V/m$$

۹۳- در شکل ۲۶-۷۹ ، $R_۱=۸/۰\Omega$ ، $R_۲=۱۰\Omega$ ، $L_۱=۰/۳۰H$ ، $L_۲=۰/۲۰$ و باتری آرمانی دارای $\varepsilon=۶/۰V$ است. (الف) درست پس از بستن کلید جریان با چه آهنگی در القاگر ۱ تغییر می‌کند؟ (ب) وقتی مدار در حالت پایا است، جریان در القاگر ۱ چقدر است؟



شکل ۲۶-۷۹ مسئلهٔ ۹۳

Scanned by CamScanner

حل: (الف) درست پس از بسته شدن کلید، القاگرها مانند اتصال باز عمل می‌کنند و در نتیجه داریم $\varepsilon_L = \varepsilon_{\text{باتری}}$ و می‌توان نوشت:

$$\frac{di}{dt} = \frac{|\varepsilon_L|}{L_۱} = \frac{\varepsilon_{\text{باتری}}}{L_۱} = \frac{۶}{۰/۳} = ۲۰\,\text{A/s}$$

(ب) در $t \to \infty$ القاگرها اتصال کوتاه شده و مانند یک سیم عمل می‌کنند. چون $R_۲$ با یک سیم موازی بسته شود از مدار خارجی می‌شود و داریم

$$i = \frac{\varepsilon}{R_۱} = \frac{۶}{۸} = ۰/۷۵\,\text{A}$$

۹۴- در شکل ۲۶-۶۶، $R = ۴/۰\ \text{k}\Omega$ ، $L = ۸/۰\,\mu\text{H}$ و باتری آرمانی دارای $\varepsilon = ۲۰\text{V}$ است. چه مدت پس از بستن کلید، جریان $۲/۰\text{mA}$ است؟

حل:

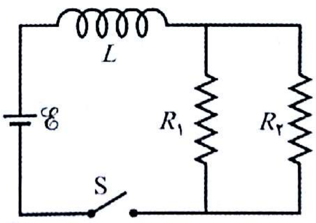
$$\tau_L = \frac{L}{R} = \frac{۸\times۱۰^{-۶}}{۴\times۱۰^{۳}} = ۲\times۱۰^{-۹}\ \text{s}$$

$$i = \frac{\varepsilon}{R}\left(۱-e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right) \Rightarrow ۲\times۱۰^{-۳} = \frac{۲۰}{۴\times۱۰^{۳}}\left(۱-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$e^{-\frac{t}{\tau_L}} = ۰/۶ \Rightarrow -\frac{t}{\tau_L} = \ln(۰/۶) = -۰/۵۱ \Rightarrow$$

$$t = (۰/۵۱)(۲\times۱۰^{-۹}) = ۱/۰۲\times۱۰^{-۹}\ s = ۱/۰۲\,ns$$

۹۵- در مدار شکل ۲۶-۸۰، $R_۱ = ۲۰\ \text{k}\Omega$ ، $R_۲ = ۲۰\text{k}\Omega$ ، $L = ۵۰\text{mH}$ و باتری آرمانی $\varepsilon = ۴۰\text{V}$ قرار دارند. کلید S که برای مدت طولانی باز بوده است در زمان $t = ۰$ بسته می‌شود. درست پس از بستن کلید، (الف) جریان i_{bat} در باتری و (ب) آهنگ di_{bat}/dt چقدر است؟ در $t = ۳/۰\,\mu\text{s}$ (پ) جریان i_{bat} و (ت) آهنگ di_{bat}/dt چقدر است؟ پس از مدتی طولانی، (ث) جریان i_{bat} و (ج) آهنگ di_{bat}/dt چقدر است؟ SSM



شکل ۲۶-۸۰ مسئلهٔ ۹۵

حل: (الف) وقتی کلید در $t = ۰$ بسته می‌شود، القاگر با عبور جریان مخالفت می‌کند و جریان عبوری از آن صفر و در نتیجه جریان عبوری از باتری نیز صفر است.

(ب) برای جریان داریم:

$$i = \frac{\varepsilon}{R}\left(۱-e^{-R\frac{t}{L}}\right) \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon}{L}e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

در $t = ۰$ داریم:

$$\frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon_{bat}}{L} = \frac{۴۰}{۰/۰۵} = ۸\times۱۰^{۲}\ \text{A/s}$$

(پ) در اینجا ابتدا مقاومت معادل برای $R_۱$ و $R_۲$ را به دست می‌آوریم سپس یک RL خواهیم داشت که در متن کتاب مورد بحث قرار گرفته است.

$$R_{۱۲} = \frac{R_۱R_۲}{R_۱+R_۲} = \frac{(۲۰)(۲۰)}{۲۰+۲۰} = ۱۰\ \text{k}\Omega$$

$$\tau_L = \frac{L}{R_{۱۲}} = \frac{۵\times۱۰^{-۲}}{۱۰\times۱۰^{۳}} = ۵\times۱۰^{-۶}\ \text{s}$$

$$i_{bat} = \frac{\varepsilon}{R_{۱۲}}\left(۱-e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right) = \frac{۴۰}{۱۰\times۱۰^{۳}}\left(۱-e^{-\frac{۳}{۵}}\right)$$

$$= ۱/۸\times۱۰^{-۳}\ A = ۱/۸\text{mA}$$

$$\frac{di_{bat}}{dt} = \frac{\varepsilon}{L}e^{-\frac{t}{\tau_L}} = \frac{۴۰}{۰/۰۵}e^{-\frac{۳}{۵}} = ۴۳۹\ \text{A/s}$$

(ث) در $t \to \infty$، القاگر اتصال کوتاه می‌شود و می‌توان آن را با یک سیم جایگزین کرد در این صورت یک مدار ساده R داریم با مقاومت معادل $R_{۱۲}$.

$$i_{bat} = \frac{\varepsilon}{R_{۱۲}} = \frac{۴۰}{۱۰^{۴}} = ۴\times۱۰^{-۳}\ \text{A}$$

(ج) در $t = ۰$ داریم $\frac{di}{dt} = ۰$

۹۶- شار پیوند شده در یک پیچهٔ معین با مقاومت $۰/۷۵\Omega$، اگر جریان $۵/۵\text{A}$ از آن بگذرد، برابر ۲۶m Wb است. (الف) القایدگی پیچه را حساب کنید. (ب) اگر یک باتری آرمانی $۶/۰\text{V}$ به طور ناگهانی به دو سر پیچه متصل شود، چقدر طول می‌کشد تا جریان از ۰ تا $۲/۵\text{A}$ افزایش یابد؟

حل: (الف)

$$\Phi = Li \Rightarrow ۲۶\times۱۰^{-۳} = L(۵/۵) \Rightarrow L = ۴/۷۳\times۱۰^{-۳}\ \text{H}$$

(ب)

$$\tau_L = \frac{L}{R} = \frac{۴/۷۳\times۱۰^{-۳}}{۰/۷۵} = ۶/۳\times۱۰^{-۳}\ \text{s}$$

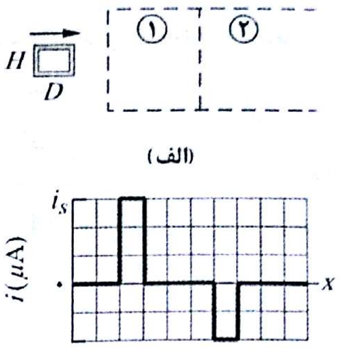
$$i = \frac{\varepsilon}{R}\left(۱-e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right) \Rightarrow ۲/۵ = \frac{۶}{۰/۷۵}\left(۱-e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)$$

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = ۰/۶۸۸ \ \frac{t}{\tau_L} = \ln(۰/۶۸۸) = -۰/۳۷۴$$

$$t = \tau_L(۰/۳۷۴) = (۶/۳\times۱۰^{-۳})(۰/۳۷۴) = ۲/۳۶\times۱۰^{-۳}\ \text{s}$$

۹۷- شکل ۲۶-۸۱ الف یک حلقهٔ رسانای مستطیلی را با مقاومت $R = ۰/۰۲۰\ \Omega$، ارتفاع $H = ۱/۵\ \text{cm}$ و طول $D = ۲/۵\ \text{cm}$ نشان می‌دهد که با تندی ثابت $v = ۴۰\ \text{cm/s}$ از میان دو ناحیهٔ میدان مغناطیسی یکنواخت کشیده می‌شود. شکل ۲۶-۸۱ ب جریان i القایی در حلقه را برحسب تابعی از مکان x برای ضلع سمت راست حلقه نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $i_s = ۳/۰\,\mu\text{A}$ مشخص شده است. برای مثال، وقتی حلقه وارد ناحیهٔ ۱ می‌شود یک جریان $۳/۰\ \mu\text{A}$ القایی ساعتگرد در حلقه برقرار می‌شود. مطلوب است (الف) بزرگی و (ب) جهت (به سمت داخل یا خارج صفحه) میدان مغناطیسی در ناحیهٔ ۱. مطلوب است (پ) بزرگی و (ت) جهت میدان مغناطیسی در ناحیهٔ ۲. SSM

Scanned by CamScanner



(الف)

(ب)

شکل ۲۶-۸۱ مسئله ۹۷

حل: (الف) در زمان ورود حلقه به ناحیه (۱) جریان $i=3\mu A$ و با توجه به معادله $\varepsilon = B\ell U$ داریم که در اینجا $\ell = H$ است

$$\varepsilon = BHV = iR \Rightarrow B=\frac{iR}{HV}$$

$$B=\frac{(3\times10^{-6})(0/02)}{(1/5\times10^{-2})(0/4)}=1\times10^{-5}\ \mathrm{T}$$

(ب) چون حلقه در حال ورود به میدان است لذا شار درحال افزایش است و جریان القایی طوری است که می‌خواهد مانع رفتن حلقه به درون میدان شود و میدانی ایجاد کند که اثر میدان B_1 را حنثی کند. جهت جریان القایی درون سو و بنابراین جهت میدان B_1 برونسو یعنی رو به سمت خارج صفحه است.
(پ) و (ت) در ناحیه (۲) جهت جریان القایی برعکس است پس میدان القایی در این حالت خلاف حالت قبل و برونسو است، و چون حلقه از میدان (۱) وارد میدان (۲) شده است میدان (۲) ضعیف‌تر از میدان (۱) بوده است.

۹۸- وقتی جریان در یک القاگر معین $60/0\mathrm{mA}$ است پتانسیل مغناطیسی ذخیره شده در آن $25/0\mathrm{mJ}$ است. القاییدگی را حساب کنید. (ب) جریان باید چقدر باشد تا ذخیره شده $100\mathrm{mJ}$ شود؟

حل: (الف) $i^2 \Rightarrow 25\times10^{3}=\left(\frac{1}{2}\right)L(60\times10^{-3})^2$

(ب) $^{3}=\frac{1}{2}(13/9)i^2 \Rightarrow i=0/12\mathrm{A}$

۹۹- وقتی کلید S در شکل ۲۶-۶۶ بسته شود، زمان اینکه جریان به یک مقدار دست‌یافتنی برسد بخشی ب مقاومت R دارد. فرض کنید که ε، emf، باتری آرم $12\mathrm{V}$ و القاییدگی القاگر آرمانی (بدون مقاوم $18\ \mathrm{mH}$ باشد. اگر R برابر (الف) $1/00\ \Omega$، (ب) $00/$ Ω $6/00\ \Omega$ باشد، زمان لازم برای اینکه جریان به $00/\ A$ چقدر است؟ (ت) برای چه مقدار R زمان لازم برای رس $2/00\ A$ کمترین است؟ (ث) کمترین زمان چقدر است؟ (را معادلهٔ ۲۶-۳۹ را بازنگری کنید.)

حل: (الف) جریان از رابطه زیر به دست می‌آید

$$i_1=\frac{\varepsilon}{R_1}\left(1-e^{-R_1\frac{t}{L}}\right)$$

با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت $t=0/328ms$.
(ب)

$$i_2=\frac{\varepsilon}{R_2}\left(1-e^{-R_2\frac{t}{L}}\right)$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت $t=6/44\mathrm{ms}$.
(پ) به ازای $R_3=6$ و با روشی مشابه داریم

$$e^{-\frac{t}{\tau_L}}=0 \Rightarrow t\to\infty$$

(ت) و (ث) داریم $\frac{di}{dt}=\frac{\varepsilon}{L}e^{-\frac{t}{\tau_L}}$. مشاهده می‌شود که هر چه R کمتر باشد آهنگ رشد جریان سریع‌تر است.
به ازای $R=0$، di/dt ثابت است بنابراین داریم

$$\frac{di}{dt}=\frac{\Delta i}{t}=\frac{\varepsilon}{L}\Rightarrow\frac{2-0}{t}=\frac{12}{0/018}\Rightarrow t=3\times10^{-3}\ s$$

۱۰۰- میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ بر صفحهٔ یک حلقه سیم دایره‌ای به شعاع r عمود است. بزرگی میدان با رابطهٔ $B=B_0e^{-t/\tau}$ ... که در آن ...

Scanned by CamScanner

(الف) در $t=۰$ القاگر مانند اتصال باز عمل می‌کند و لذا جریان باتری برابر است با:

$$i=\frac{\varepsilon}{R_۱+R_۲}=\frac{۱۲}{۱۰+۲۰}=۰/۴\text{A}$$

$$V_{ab}=Ri_۱=(۱۰)(۰/۴)=۴\text{V}$$

از طرفی داریم $V_{ab}=\varepsilon_L$ لذا می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_L=L\left|\frac{di_۲}{dt}\right|\Rightarrow V_{ab}=L\left|\frac{di_۲}{dt}\right|\Rightarrow$$

$$\left|\frac{di_۲}{dt}\right|=\frac{V_{ab}}{L}=\frac{۴}{۱۰\times۱۰^{-۳}}=۴۰۰\text{A/s}$$

(ب)

$$V_{ab}=L\left|\frac{di_۲}{dt}\right|=\varepsilon-R_۲i\Rightarrow ۰/۰۱\left|\frac{di_۲}{dt}\right|=۱۲-(۲۰)(۰/۵)$$

$$\left|\frac{di_۲}{dt}\right|=۲۰۰\text{ A/s}$$

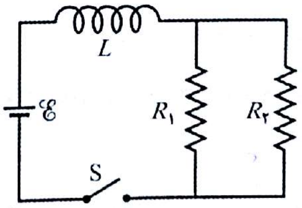
(پ) درحالت پایا $t\to\infty$ القاگر مانند اتصال کوتاه عمل می‌کند

$$i=\frac{\varepsilon}{\ }=\frac{۱۲}{\ }=۰/۶\text{A}$$

$$e^{-\frac{t}{\tau_L}}=۰/۶\Rightarrow-\frac{t}{\tau_L}=\ln(۰/۶)=-۰/۵۱\Rightarrow$$

$$t=(۰/۵۱)(۲\times۱۰^{-۹})=۱/۰۲\times۱۰^{-۹}\ s=۱/۰۲\,ns$$

۹۵- در مدار شکل ۲۶-۸۰، $R_۱=۲۰\,k\Omega$، $R_۲=۲۰\,k\Omega$، $L=۵۰\text{mH}$ و باتری آرمانی $\varepsilon=۴۰\text{V}$ قرار دارند. کلید S که برای مدت طولانی باز بوده است در زمان $t=۰$ بسته می‌شود. درست پس از بستن کلید، (الف) جریان i_{bat} در باتری و (ب) آهنگ di_{bat}/dt چقدر است؟ در $t=۳/۰\mu s$ (پ) جریان i_{bat} و (ت) آهنگ di_{bat}/dt چقدر است؟ پس از مدتی طولانی، (ث) جریان i_{bat} و (ج) آهنگ di_{bat}/dt چقدر است؟ SSM



شکل ۲۶-۸۰ مسئلهٔ ۹۵

حل: (الف) وقتی کلید در $t=۰$ بسته می‌شود، القاگر با عبور جریان مخالفت می‌کند و جریان عبوری از آن صفر و در نتیجه جریان عبوری از باتری نیز صفر است.

(ب) برای جریان داریم:

$$i=\frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-R\frac{t}{L}}\right)\Rightarrow\frac{di}{dt}=\frac{\varepsilon}{L}e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

در $t=۰$ داریم:

$$\frac{di}{dt}=\frac{\varepsilon_{bat}}{L}=\frac{۴۰}{۰/۰۵}=۸\times۱۰^{۲}\text{ A/s}$$

(پ) در اینجا ابتدا مقاومت معادل برای $R_۱$ و $R_۲$ را به دست می‌آوریم سپس یک RL خواهیم داشت که در متن کتاب مورد بحث قرار گرفته است.

۱۰۳- یک حلقهٔ دایره‌ای (شعاع = ۱۴cm) سیمی در میدان مغناطیسی که با عمود بر صفحهٔ حلقه زاویه ۳۰° می‌سازد، قرار داده می‌شود. بزرگی این میدان با آهنگ ثابت از ۳۰mT به ۶۰mT افزایش می‌یابد. اگر مقاومت حلقهٔ ۵/۰Ω باشد، وقتی که بزرگی میدان ۵۰mT است، بزرگی جریان القایی در حلقه چقدر است؟

حل:

$$\Phi_B=BA\cos\theta$$

$$|\varepsilon|=\frac{d\Phi_B}{dt}=a\cos\frac{dB}{dt}=\pi r^۲\cos\theta\left|\frac{dB}{dt}\right|$$

$$i=\frac{\varepsilon}{R}=\frac{\pi r^۲}{R}\cos\theta\frac{dB}{dt}=\left[\frac{\pi(۰/۱۴)^۲}{۵}\right]\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)\left(\frac{۰/۰۳}{۰/۰۱۵}\right)$$

$$=۰/۰۲۱\text{A}=۲۱\text{mA}$$

۱۰۴- یک پیچهٔ دایره‌ای ۵۰ دوری (شعاع = ۱۵cm) با مقاومت کل ۴/۰Ω در یک میدان مغناطیسی یکنواخت که عمود بر صفحه پیچه است قرار دارد. بزرگی این میدان با رابطهٔ $B=A\sin(\omega t)$ که در آن $A=۸۰\mu T$ و $\omega=۵۰\pi$ rad/s است، نسبت به زمان تغییر می‌کند. بزرگی جریان القایی در پیچه در $t=۲۰$ms، چقدر است؟

حل:

$$\Phi_B=NA\sin\omega t=N\pi r^۲\sin\omega t$$

(ب

$$|\varepsilon|=\frac{d\Phi_B}{dt}=N\pi r^۲\omega\cos\omega t$$

ـه با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم

ت $\varepsilon=(۴/۴۴\times۱۰^{-۲})\cos(۵۰\pi t)$ و در نتیجه داریم

$$i=\frac{\varepsilon}{R}=\frac{۴/۴۴\times۱۰^{-۲}\cos(۵۰\pi)}{۴}=۰/۰۱۱\text{A}$$

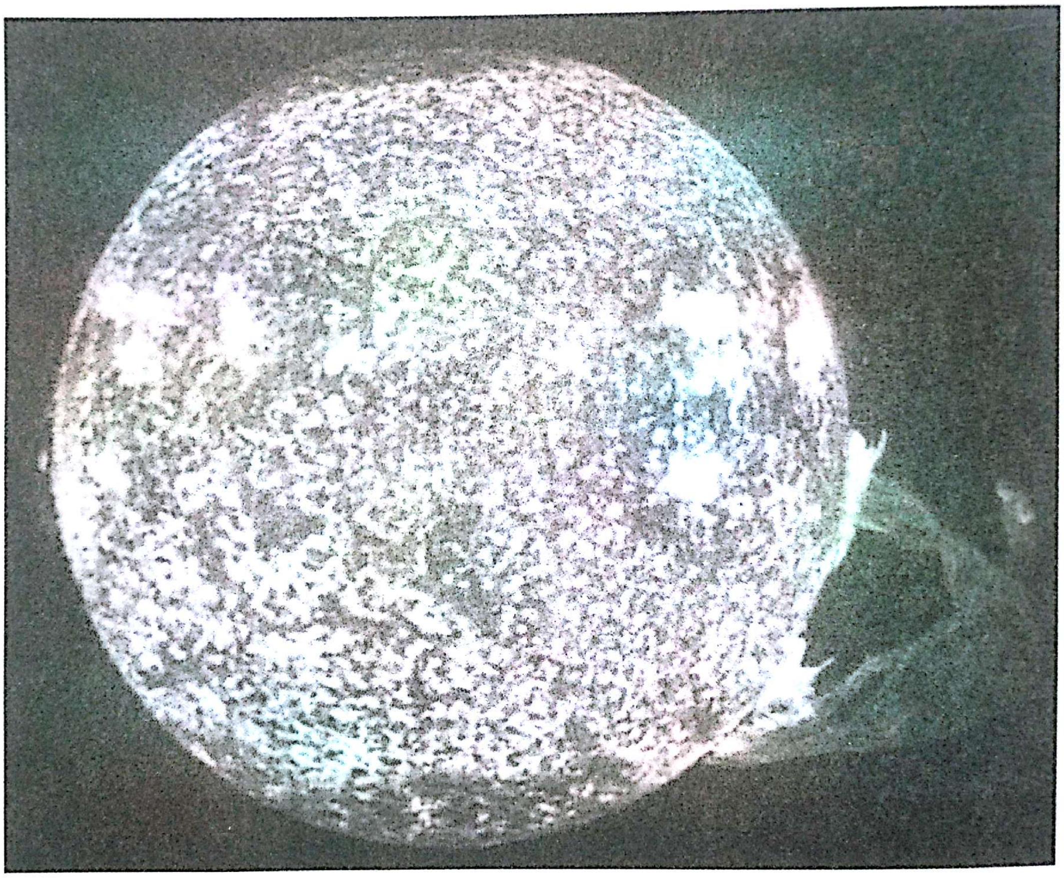
s

۹۷- شکل
مقاومت
= ۲/۵ cm
میان دو ناحیه
۲۶-۸۱ ب ج
برای ضلع سم
$=۳/۰\mu A$ با
وارد ناحیهٔ ۱ م
حلقه برقرار م
(به سمت دا
مطلوب است
ناحیهٔ ۲. SM

Scanned by CamScanner

۲۷

نوسان‌های الکترومغناطیسی و جریان متناوب



Scanned by CamScanner

بخش ۲۷-۲ نوسان‌های LC، بررسی کیفی

●۱- در یک مدار LC نوسانی معین، انرژی کل در ۱/۵۰μs از انرژی الکتریکی در خازن به انرژی مغناطیسی در القاگر تبدیل می‌شود. (الف) دورهٔ تناوب نوسان چقدر است؟ (ب) بسامد نوسان چقدر است؟ (پ) وقتی انرژی مغناطیسی بیشینه است، پس از چه مدت مجدداً بیشینه خواهد بود؟

حل: (الف) $T=۴(۱/۵\times۱۰^{-۶})=۶\times۱۰^{-۶}\ s=۶\mu s$

(ب) $f=\frac{۱}{T}=\frac{۱}{۶\times۱۰^{-۶}}=۱/۶۷\times۱۰^{۵}\ Hz$

(پ) چون $U_B\propto I^۲$ است، انرژی مغناطیسی به جهت جریان بستگی ندارد و همانطور که از شکل ۲۷-۱ کتاب در می‌یابیم، پس از نیم دوره یعنی $T=۳\mu s$ ، انرژی مغناطیسی بیشنیه می‌شود.

●۲- ظرفیت یک مدار LC نوسانی در صورتی که بار بیشینهٔ روی خازن ۱/۶μC و انرژی کل ۱۴۰μJ باشد، چقدر است؟

حل:

$$C=\frac{q^۲}{۲U}=\frac{(۱/۶\times۱۰^{-۶})^۲}{۲(۱/۴\times۱۰^{-۶})}=۹/۱۴\times۱۰^{-۹}\ F$$

●۳- در یک مدار LC نوسانی، $L=۱/۱۰mH$ و $C=۴/۰۰\mu F$ است. بار بیشینهٔ روی خازن ۳/۰۰μC است. جریان بیشینه را به دست آورید.

حل:

$$U=\frac{۱}{۲}LI^۲=\frac{۱}{۲}\frac{q^۲}{C}\Rightarrow I=\frac{q}{\sqrt{LC}}$$

$$I=\frac{۳\times۱۰^{-۶}}{\sqrt{(۱/۱\times۱۰^{-۳})(۴\times۱۰^{-۶})}}=۴/۵۲\times۱۰^{-۲}\ A$$

●۴- بسامد نوسان یک مدار LC معین ۲۰۰kHz است. در زمان $t=۰$ ، صفحهٔ A خازن بیشترین بار مثبت را دارد. در چه کوچکترین زمان $t>۰$ ، (الف) صفحهٔ A مجدداً بیشترین بار مثبت را خواهد داشت؛ (ب) صفحهٔ دیگر خازن بیشترین بار مثبت را خواهد داشت و (پ) القاگر بیشترین میدان مغناطیسی را خواهد داشت؟

حل: (الف) در مضربهایی از دورهٔ تناوب دارای بار مثبت بیشینه هستیم لذا

$$t_A=nT=\frac{n}{f}=\frac{n}{۲\times۱۰^۳}=n(۵\mu s)$$

که در آن نزدیکترین زمان به ازای $n=۱$ به دست می‌آید و لذا: $t_A=۵\mu s$

(ب) $t=\frac{T}{۲}=۲/۵\mu s$

(پ) $t=\frac{T}{۴}=۱/۲۵\mu s$

●۵- یک مدار LC نوسانی شامل یک القاگر ۷۵/۰mH و یک خازن ۳/۶۰μF است. اگر بار بیشینه روی خازن ۲/۹۰μC باشد (الف) انرژی کل در مدار چقدر است؟ (ب) جریان بیشینه چقدر است؟

حل: (الف) وقتی که خازن دارای بار بیشینه است تمام انرژی مدار در خازن ذخیره می‌شود.

$$U=\frac{q^۲}{۲C}=\frac{(۲/۹\times۱۰^{-۶})^۲}{۲(۳/۶\times۱۰^{-۶})}=۱/۱۷\times۱۰^{-۶}\ J$$

(ب) وقتی خازن به طور کامل تخلیه شده باشد جریان بیشینه است و تمام انرژی در القاگر ذخیره می‌شود.

$$U=\frac{۱}{۲}LI^۲\Rightarrow ۱/۱۷\times۱۰^{-۶}=\left(\frac{۱}{۲}\right)\left[۷۵\times۱۰^{-۳}\right)I^۲$$

$$\Rightarrow I=۵/۵۸\times۱۰^{-۳}A$$

بخش ۲۷-۳ قیاس الکتریکی- مکانیکی

●۶- وقتی یک جسم ۰/۵kg متصل به فنر ۲/۰mm از وضعیت تعادل کشیده و رها شود؛ با نیروی بازگردانندهٔ ۸/۰N حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. (الف) بسامد زاویه‌ای نوسان چقدراست؟ (ب) دورهٔ تناوب نوسان چقدر است؟ (پ) ظرفیت یک مدار LC با همان دورهٔ تناوب اگر L برابر ۵/۰H باشد چقدر است؟

حل: (الف) $F=kx\Rightarrow ۸=k(۲\times۱۰^{-۳})\Rightarrow k=۴۰۰۰\ N/m$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{۴۰۰۰}{۰/۵}}۸۹/۴۴\ rad/s$$

(ب) $T=\frac{۲\pi}{\omega}=\frac{۲\pi}{۸۹/۴۴}=۷/۰۲\times۱۰^{-۲}\ s$

(پ) $\omega=\frac{۱}{\sqrt{LC}}\Rightarrow C=\frac{۱}{L\omega^۲}=\frac{۱}{(۵)(۸۹/۴۴)^۲}$

$=۲/۵\times۱۰^{-۵}\ F$

●●۷- انرژی در یک مدار LC نوسانی شامل القاگر ۱/۲۵H برابر ۵/۷۰μJ است. بیشترین بار روی خازن ۱۷۵μC است. مطلوب است (الف) جرم، (ب) ثابت فنر، (پ) بیشترین جابه‌جایی و (ت) بیشترین تندی برای یک دستگاه مکانیکی با همان دورهٔ تناوب.

حل: (الف) معادلهٔ دیفرانسیلی مدار LC عبارت است از و معادله متناظر آن برای فنر آرمانی عبارت است از:

$$L\frac{d^۲q}{dt^۲}+\frac{۱}{C}q=۰$$

$$m\frac{d^۲x}{dt^۲}+kx=۰$$

مشاهده می‌کنیم که القایدگی L متناظر جرم است لذا:

$m=۱/۲۵\ kg$

(ب) می‌بینیم که واورن ظرفیت C متناظر k است لذا ابتدا C را محاسبه می‌کنیم.

Scanned by CamScanner

$$C=\frac{q^۲}{۲U}=\frac{(۱۷۵\times۱۰^{-۶})^۲}{۲(۵/۷\times۱۰^{-۶})}=۲/۶۹\times۱۰^{-۳}\ \text{F}$$

و از آنجا داریم:

$$k=\frac{۱}{C}=\frac{۱}{۲/۶۹\times۱۰^{-۳}}=۳۷۲\ \text{N/m}$$

(پ)

$$U_{max}=\frac{۱}{۲}kx_{max}$$

$$۵/۷\times۱۰^{-۶}=\frac{۱}{۲}(۳۷۲)x_{max}^۲\Rightarrow x_{max}=۱/۷۵\times۱۰^{-۴}\ \text{m}$$

(ت) انرژی کل یک نوسانگر متناظر با بیشینهٔ انـرژی پتانـسیل و یا بیشینه انرژی جنبشی دستگاه قطعه- فلز است.

$$U_{max}=\frac{۱}{۲}mv_{max}^۲\Rightarrow ۵/۷\times۱۰^{-۶}=\frac{۱}{۲}(۱/۲۵)v_{max}^۲$$

$$\Rightarrow v_{max}=۳/۰۲\times۱۰^{-۳}\ \text{m/s}$$

بخش ۲۷-۴ نوسان‌های LC، بررسی کمی

•۸- نوسانگرهای LC در مدارهای متصل به بلندگوها به کار برده می‌شوند تا برخی از صداهای موسیقی الکترونیکی را ایجاد کنند. با یک خازن $۶/۷\mu F$ ، چه القاگری باید به کار برده شود تا بسامد $۱۰kHz$ را که وسط محدودهٔ بسامدهای صوتی است ایجاد کند؟

حل:

$$\omega=۲\pi f=\frac{۱}{\sqrt{LC}}\Rightarrow L=\frac{۱}{۴\pi^۲f^۲C}$$

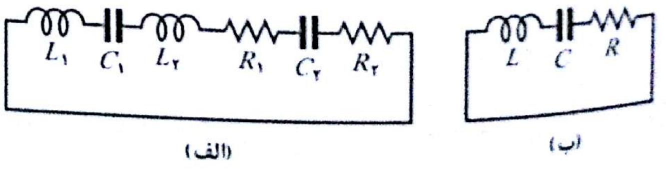
$$L=\frac{۱}{۴\pi^۲(۱۰\times۱۰^۳)(۶/۷\times۱۰^{-۶})}=۳/۸\times۱۰^{-۵}\ \text{H}$$

•۹- در یک مدار LC با $L=۵۰mH$ و $C=۴/۰\mu F$ جریان در ابتدا بیشینه است. چه مدت طول می‌کشد؛ تا خازن برای اولین بار به طور کامل پر شود؟ ILW

حل: در مدار LC فاصلهٔ زمانی بـین پـر شـدن کامـل $t=T/۴$ است که در آن T دورهٔ تناوب $T=۲\pi/w=۲\pi\sqrt{LC}$ اسـت و در نتیجه داریم:

$$t=\frac{T}{۴}=\frac{۲\pi\sqrt{LC}}{۴}=\frac{\pi\sqrt{(۰/۰۵)(۴\times۱۰^{-۶})}}{۲}=۷\times۱۰^{-۴}\ \text{s}$$

•۱۰- یک تک حلقه شامل چندین القاگر $(L_۱,L_۲,...)$ ، چندین خازن $(C_۱,C_۲,...)$ و چندین مقاومت $(R_۱,R_۲,...)$ است که به ترتیب نشان داده شده در شکل ۲۷-۲۷ الف به طور متوالی به هم متصل‌اند. نشان دهید که بدون توجه به ترتیب این عنصرهای مدار در حلقه، رفتار این مدار با رفتار مدار LC ساده نشان داده شده در شکل ۲۷-۲۷ ب یکسان است. (*راهنمایی:* قاعدهٔ حلقه را بررسی و به مسئلهٔ ۴۷ در فصل ۲۶ نگاه کنید.)



شکل ۲۷-۲۷ مسئلهٔ ۱۰

حل: قاعده حلقه برای کل مدار را در نظر می‌گیریم

$$\varepsilon=\sum_j(\varepsilon_{Lj}+\varepsilon_{Cj}+\varepsilon_{Rj})=\sum_j\left(L_j\frac{di}{dt}+\frac{q}{C_j}+iR_j\right)=۰$$

با در نظر گرفتن روابط زیر:

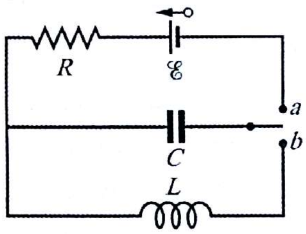
$$L=\sum_j L_j\ ,\ \frac{۱}{C}=\sum_j C_j\ ,\ R=\sum_j R_j$$

داریم:

$$\varepsilon=L\frac{di}{dt}+\frac{q}{c}+iR=L\frac{d^۲q}{dt^۲}+\frac{q}{c}+R\frac{dq}{dt}=۰$$

که همان معادل یک مدار ساده RLC نشان داده در شکل (ب) است.

••۱۱- در شـــکل ۲۷-۲۸ ، $R=۱۴/۰\Omega$ ، $C=۶/۲۰\mu F$ و $L=۵۴/۰mH$ و باتری آرمانی با emf برابـر $\varepsilon=۳۴/۰V$ اسـت. کلید را برای مدتی طولانی در وضعیت a و سپس در وضعیت b قرارمی‌دهیم. (الف) بسامد و (ب) دامنهٔ جریان نوسـانی حاصل چقدر است؟



شکل ۲۷-۲۸ مسئلهٔ ۱۱

حل: (الف) وقتی کلید به مدت طولانی روی a باشـد بـار روی خازن به مقدار بیشینه‌اش می‌رسد و خازن اتصال باز می‌شـود و هیچ جریانی را از خودش عبور نمی‌دهد.

$$Q=C\varepsilon=(۶/۲\times۱۰^{-۶})(۳۴)=۲/۱۱\times۱۰^{-۴}\ \text{C}$$

وقتی که کلید به نقطهٔ b وصل می‌شود یک مدار سادهٔ LC داریم.

$$f=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{LC}}=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{(۵۴\times۱۰^{-۳})(۶/۲\times۱۰^{-۶})}}=۲۷۵\ \text{Hz}$$

(ب) دامنهٔ جریان را می‌توان از رابطهٔ $I=\omega Q$ به دست آورد.

$$I=\omega Q=۲\pi fQ=۲\pi(۲۷۵)(۲/۱۱\times۱۰^{-۴})=۰/۳۶۵\ \text{A}$$

••۱۲- برای ساخت یک دستگاه LC نوسانی، می‌توانید یک القاگر $۱۰mH$ ، یک خازن $۵/۰\mu F$ و یک خازن $۲/۰\mu F$ را انتخاب کنید. (الف) کوچکترین، (ب) دومین کوچکترین، (پ) دومین بزرگترین و (ت) بزرگترین بسامد نوسانی که می‌توان با این عنصرها در ترکیبهای مختلف برقرار کرد، چقدر است؟

حل: (الف) کمترین بسامد مربوط به ظرفیت بزرگتر است، و در اینجا بیشترین ظرفیت موقعی است که دو خازن مـوازی باشـند که کمترین بسامد توسان به دست می‌آید.

$$f=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{LC_{eq}}}=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{L(C_۱+C_۲)}}$$

$$=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{(۱۰\times۱۰^{-۳})(۵+۲)\times۱۰^{-۶}}}=۶۰۱/۸\ \text{Hz}$$

Scanned by CamScanner

(ب) دومین کمترین بسامد نوسان از اتصال فقط خازن $C_۱$ به دست می‌آید.

$$f_۲=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{LC_۱}}=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{(۱۰\times۱۰^{-۳})(۵\times۱۰^{-۶})}}=۷۱۱\,\text{Hz}$$

(پ) دومین بیشترین بسامد نوسان از اتصال فقط $C_۲$ به دست می‌آید.

$$f_۳=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{LC_۲}}=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{(۱\times۱۰^{-۲})(۲\times۱۰^{-۶})}}=۱/۱۲\times۱۰^{۳}\ \text{Hz}$$

(ت) بیشترین بسامد نوسان از اتصال متوالی خازنها به دست می‌آید.

$$f_۴=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{LC_{eq}}}=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{L[C_۱C_۲/(C_۱+C_۲)]}}$$
$$=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{۵\times۱۰^{-۶}+۲\times۱۰^{-۶}}{(۱\times۱۰^{-۲})(۵\times۱۰^{-۶})(۲\times۱۰^{-۶})}}$$
$$=۱/۳۳\times۱۰^{۳}\ \text{Hz}$$

۱۳●●- یک مدار LC نوسانی شامل یک خازن $۱/۰\text{nF}$ و یک پیچهٔ $۳/۰\text{mH}$ دارای بیشترین ولتاژ $۳/۰\text{V}$ است. مطلوب است تعیین (الف) بیشترین بار روی خازن، (ب) بیشترین جریانی که از مدار می‌گذرد و (پ) بیشترین انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی پیچه. **ILW**

حل: (الف) برای بار بیشینه داریم:

$$q_{\max}=CV_{\max}=(۱\times۱۰^{-۹})(۳)=۳\times۱۰^{-۹}\ \text{C}$$

(ب) از رابطه انرژی ذخیره شده چنین داریم:

$$U=\frac{۱}{۲}LI^۲=\frac{q^۲}{۲C}\Rightarrow I=\frac{q}{\sqrt{LC}}$$

$$I_{\max}=\frac{۳\times۱۰^{-۹}}{\sqrt{(۳\times۱۰^{-۳})(۱\times۱۰^{-۹})}}=۱/۷۳\times۱۰^{-۳}\ \text{A}$$

(پ)

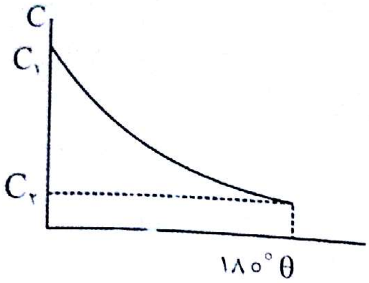
$$U_{B,\max}=\frac{۱}{۲}LI_{\max}^۲=\frac{۱}{۲}(۳\times۱۰^{-۳})(۱/۷۳\times۱۰^{-۹})$$
$$=۴/۵\times۱۰^{-۹}\ \text{J}$$

۱۴●●- القاگری به دوسر خازنی که ظرفیت آن می‌توانند با چرخاندن دگمه‌ای تغییر کند، متصل است. می‌خواهیم کاری کنیم که بسامد نوسانهای این مدار LC به طور خطی با زاویهٔ چرخش دگمه متناسب باشد و وقتی دگمه ۱۸۰° می‌چرخد بسامد از $۲\times۱۰^۵\ \text{Hz}$ به $۴\times۱۰^۵\ \text{Hz}$ تغییر کند. اگر $L=۱/۰\,\text{mH}$ باشد، ظرفیت C مورد نیاز را برحسب تابعی از زاویهٔ چرخش دگمه رسم کنید.

حل:

$$f=a\theta+b$$

a و b اعداد ثابت هستند



$$f=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{LC}}=a\theta+b$$
$$\theta=۰\Rightarrow f_۱=b=۲\times۱۰^۵\ \text{Hz}$$
$$\theta=\pi\Rightarrow f_۲=۴\times۱۰^۵=a(۳/۱۴)+۲\times۱۰^۵$$
$$\Rightarrow a=۶/۳۷\times۱۰^۴\ \text{Hz/rad}$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{۴\pi^۲(LC)}=(a\theta+b)^۲\Rightarrow C=\frac{۱}{۴\pi^۲L(a\theta+b)^۲}$$
$$\theta=۰\Rightarrow C_۱=۱/۲۷\times۱۰^{-۴}\ \text{F}$$
$$\theta=\pi\Rightarrow C_۲=۱/۲۷\times۱۰^{-۵}\ \text{F}$$

۱۵●●- خازن متغیری با گسترهٔ از ۱۰ تا ۳۶۵pF با یک پیچه برای تشکیل یک مدار نوسانگر LC با بسامد متغیر به کار می‌رود تا با آن بتوان ورودی یک رادیو را تنظیم کرد. (الف) با چنین خازنی چه نسبتی از بسامد بیشینه به کمینه را می‌توان به دست آورد؟ اگر این مدار برای به دست آوردن بسامدهایی از $۰/۵۴\text{MHz}$ تا $۱/۶۰\text{MHz}$ به کار رود، نسبت محاسبه شده در (الف) خیلی بزرگ می‌شود. با افزودن خازنی به طور موازی با خازن متغیر، این گستره را می‌توان تنظیم کرد. برای به دست آوردن گسترهٔ بسامد دلخواه، (ب) چه خازنی باید افزود و (پ) و القایدگی پیچه باید چقدر باشد؟ **SSM WWW**

حل: (الف)

$$f_{\max}=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{LC_{\min}}}\ ,\ f_{\min}=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{LC_{\max}}}$$

لذا خواهیم داشت:

$$\frac{f_{\max}}{f_{\min}}=\frac{\sqrt{C_{\max}}}{\sqrt{C_{\min}}}=\frac{\sqrt{۳۶۵}}{\sqrt{۱۰}}=۶/۰۴$$

(ب) خازن اضافی C به گونه‌ای است انتخاب شده که نسبت بسامدها چنین باشد

$$\text{نسبت}=\frac{۱/۶}{۰/۵۴}=۲/۹۶$$

چون خازن اضافی موازی بسته شده در نتیجه می‌توان نوشت

$$\frac{\sqrt{C+۳۶۵}}{\sqrt{C+۱۰}}=۲/۹۶\Rightarrow C=۳۵/۶۳\ \text{pF}$$

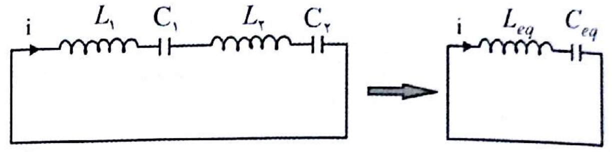
(پ)

$$f_{\min}^۲=\frac{۱}{۴\pi^۲LC'^۲}\Rightarrow$$
$$(۰/۵۴\times۱۰^۶)^۲=\frac{۱}{۴\pi^۲L(۳۶۵+۳۵/۶۳)}\Rightarrow L=۲/۱۷\times۱۰^{-۴}\ \text{H}$$

Scanned by CamScanner

۱۶●●- یک مدار متوالی که شامل القاییدگی L_1 و ظرفیت C_1 است در بسامد زاویه‌ای ω نوسان می‌کند. مدار متوالی دیگری شامل القاییدگی L_2 و ظرفیت C_2 در همان بسامد زاویه‌ای نوسان می‌کند. بسامد زاویه‌ای نوسان مداری متوالی شامل هر چهار عنصر، برحسب ω چقدر است؟ از مقاومت چشمپوشی کنید. (*راهنمایی:* فرمولهای ظرفیت معادل و القاییدگی معادل را به کار برید؛ بخش ۲۱-۴ و مسئلهٔ ۴۵ در فصل ۲۶ را نگاه کنید.)

حل: مدار مورد نظر و مدار معادل آن به شکل زیر است



$$l_{eq}=L_1+L_2 \qquad C_{eq}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$$

$$\omega_{eq}=\frac{1}{\sqrt{L_{eq}C_{eq}}}=\frac{1}{\sqrt{(L_1+L_2)\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}}}=\sqrt{\frac{C_1+C_2}{(L_1+L_2)C_1C_2}}$$

از طرفی $\omega_1=\omega_1 \Rightarrow L_1C_1=L_2C_2$ لذا خواهیم داشت:

$$\omega_{eq}=\sqrt{\frac{C_1+C_2}{(L_1C_1C_2+L_2C_2C_1}}=\sqrt{\frac{C_1+C_2}{L_2C_2C_2+L_2C_2C_1}}=\sqrt{\frac{C_1+C_2}{L_2C_2(C_2+C_1)}}=\frac{1}{\sqrt{L_2C_2}}=\omega$$

۱۷●●- در یک مدار نوسانگر LC با $C=64.0\,\mu F$ جریان با رابطهٔ $i=(1.60)\sin(2500t+0.680)$ داده می‌شود که در آن t برحسب ثانیه، i برحسب آمپر و ثابت فاز برحسب رادیان است. (الف) پس از $t=0$ جریان طی چه مدتی به مقدار بیشینه‌اش می‌رسد؟ (ب) القاییدگی و (پ) انرژی کل چقدر است؟ **ILW**

حل: (الف) با مقایسه با رابطه $i=i_{max}\sin(\omega t+\theta_0)$ و با قرار دادن $\omega t+\theta_0=2500t+0.68=\frac{\pi}{2}$ خواهیم داشت $t=3.56\times10^{-4}\,s$.

(ب)

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}\Rightarrow L=\frac{1}{\omega^2C}=\frac{1}{(2500)^2(64\times10^{-6})}=2.5\times10^{-3}\,H$$

(پ)

$$U_{B,max}=\frac{1}{2}Li_{max}=\frac{1}{2}(2.5\times10^{-3})(1.6)^2=3.2\times10^{-3}\,J$$

۱۸●●- در یک مدار نوسانگر LC وقتی ۷۵٪ انرژی کل در میدان مغناطیسی القاگر ذخیره شده است، (الف) چه مضربی از بار بیشینه روی خازن است و (ب) چه مضربی از جریان بیشینه در القاگر برقرار است؟

حل: (الف) چون ۷۵٪ انرژی در میدان مغناطیسی ذخیره شده لذا در می‌یابیم که ۲۵٪ بقیه در میدان الکتریکی ذخیره شده است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{U_E}{U_{E,max}}=\frac{q^2/2C}{q^2{}_{m,max}/2C}=0.25$$

در نتیجه $q=0.5q_{max}$.

(ب)

$$\frac{U_B}{U_{B,max}}=\frac{Li^2/2}{Li^2{}_{max}/2}=0.75$$

در نتیجه $i=0.866i_{max}$.

۱۹●●- در یک مدار نوسانگر LC، $L=25.0\,mH$ و $C=7.80\,\mu F$ است. در زمان $t=0$، جریان $9.2\,mA$، بار روی خازن $3.80\,\mu C$ و خازن در حال پرشدن است. (الف) انرژی کل در مدار، (ب) بیشترین بار خازن و (پ) بیشترین جریان چقدر است؟ (ت) اگر بار روی خازن با رابطهٔ $q=Q\cos(\omega t-\phi)$ داده شود، ثابت فاز ϕ چقدر است؟ (ث) فرض کنید همهٔ داده‌ها یکسان بمانند به جز اینکه خازن در $t=0$ در حال تخلیه شدن است، آنوقت ϕ چقدر است؟

حل: (الف)

$$U=U_E+U_B=\frac{q^2}{2C}+\frac{1}{2}Li^2=\frac{(3.8\times10^{-6})^2}{2(7.8\times10^{-6})}+\frac{(25\times10^{-3})(9.2\times10^{-3})^2}{2}=1.98\times10^{-6}\,J$$

(ب) داریم $U_{max}=q^2{}_{max}/2C$

$$q_{max}=\sqrt{2CU_{max}}=\sqrt{2(7.8\times10^{-6})(1.98\times10^{-6})^2}=5.56\times10^{-6}\,C$$

(پ) از طرف دیگر داریم: $U_{max}=\frac{1}{2}Li^2{}_{max}$

$$i_{max}=\sqrt{\frac{2U_{max}}{L}}=\sqrt{\frac{2(1.98\times10^{-6})}{25\times10^{-3}}}=1.26\times10^{-2}\,A$$

(ت) اگر بار در زمان $t=0$ برابر q_0 باشد آنگاه در $q=q_{max}\cos(\omega t+\phi)$ در $t=0$ چنین خواهد بود.

$$\phi=\cos^{-1}\left(\frac{q_0}{q_{max}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{3.8\times10^{-6}}{5.56\times10^{-6}}\right)=\pm46.89°$$

۲۰●●- یک مدار نوسانگر LC دارای دامنهٔ جریان $7.50\,mA$، دامنهٔ ولتاژ $250\,mV$ و ظرفیت $220\,nF$ است. مطلوب است محاسبهٔ (الف) دورهٔ تناوب نوسان، (ب) بیشینهٔ انرژی ذخیره شده در خازن، (پ) بیشینهٔ انرژی ذخیره شده در القاگر، (ت) آهنگ بیشینه‌ای که با آن جریان تغییر می‌کند و (ث) آهنگ بیشینه‌ای که با آن القاگر انرژی می‌گیرد.

حل: (الف) ابتدا L را محاسبه می‌کنیم.

$$U_{max}=\frac{1}{2}CV^2_{max}=\frac{1}{2}Li^2_{max}\Rightarrow L=\frac{CV^2_{max}}{i^2_{max}}$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow L=\frac{(۲۲۰\times ۱۰^{-۹})(۰/۲۵)^{۲}}{(۷/۵\times ۱۰^{-۳})^{۲}}=۲/۴۴\times ۱۰^{-۴}\ \text{H}$$

حال می‌توان دورهٔ تناوب را محاسبه کرد

$$T=۲\pi\sqrt{LC}=۲\pi\sqrt{(۲/۴۴\times ۱۰^{-۴})(۲۲۰\times ۱۰^{-۹})}=۴/۶\times ۱۰^{-۵}\ \text{s}$$

(ب)

$$U_{max}=\frac{۱}{۲}CV_{max}^{۲}=\frac{۱}{۲}(۲۲۰\times ۱۰^{-۹})(۰/۲۵)^{۲}=۶/۸۸\times ۱۰^{-۹}\ \text{J}$$

(پ) بدیهی است که پاسخ دوباره برابر $۶/۸۸\times ۱۰^{-۹}\ \text{J}$ می‌شود.

(ت)

$$V_{max}=L\left(\frac{di}{dt}\right)_{max}\Rightarrow\left(\frac{di}{dt}\right)_{max}=\frac{V_{max}}{L}=\frac{۰/۲۵}{۲/۴۴\times ۱۰^{-۴}}=۱/۰۲\times ۱۰^{۳}\ \text{A/s}$$

(ث)

$$i=i_{max}\sin\left(\frac{۲\pi}{T}t+\phi_{۰}\right)\Rightarrow\frac{di}{dt}=i_{max}\frac{۲\pi}{T}\cos\left(\frac{۲\pi}{T}t+\phi_{۰}\right)$$

$$U=\frac{۱}{۲}Li^{۲}\Rightarrow\frac{du}{dt}=Li\frac{di}{dt}$$

$$=Li_{max}^{۲}\frac{۲\pi}{T}\sin\left(\frac{۲\pi}{T}t+\phi_{۰}\right)\cos\left(\frac{۲\pi}{T}t+\phi_{۰}\right)$$

$$\frac{dU}{dt}=\frac{۱}{۲}Li_{max}^{۲}\frac{۲\pi}{T}\sin ۲\left(\frac{۲\pi}{T}t+\phi_{۰}\right)$$

موقعی که $\frac{dU}{dt}$ بیشینه است مقدار سینوس برابر یک است و داریم

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)_{max}=\frac{۱}{۲}(۲/۴۴\times ۱۰^{-۴})(۷/۵\times ۱۰^{-۳})^{۲}\left(\frac{۲\pi}{۴/۶\times ۱۰^{-۵}}\right)=۹/۳۷\times ۱۰^{-۴}\ \text{J/s}$$

۲۱۰۰●●- در یک مدار نوسانگر LC، $L=۳/۰۰\text{mH}$ و $C=۲/۷۰\mu\text{F}$ است. در $t=۰$ بار روی خازن صفر و جریان $۲/۰۰\text{A}$ است. (الف) بیشترین باری که روی خازن ظاهر می‌شود چقدر است؟ (ب) کمترین زمان $t>۰$ که در طی آن آهنگ ذخیره انرژی در خازن بیشترین مقدار را دارد چقدر است و (پ) این آهنگ بیشترین چقدر است؟ SSM

حل: (الف)

$$U_{B}=\frac{۱}{۲}Li_{max}^{۲}=\frac{۱}{۲}(۳\times ۱۰^{-۳})(۲)^{۲}=۶\times ۱۰^{-۳}\ \text{J}$$

و از پایستگی داریم:

$$U_{E}=\frac{q_{max}^{۲}}{۲C}=U_{B}\Rightarrow q_{max}=\sqrt{۲CU_{B}}$$

$$q_{max}=\sqrt{۲(۲/۷\times ۱۰^{-۶})(۶\times ۱۰^{-۳})}=۱/۸\times ۱۰^{-۴}\ \text{C}$$

(ب)

$$q=q_{max}\sin(\omega t)$$

$$U_{E}\frac{q^{۲}}{۲C}=\frac{q_{max}^{۲}w\sin^{۲}(\omega t)}{۲C}$$

$$\frac{dU_{E}}{dt}=\frac{q_{max}^{۲}\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t)}{C}=\frac{q_{max}^{۲}\omega}{۲C}\sin(۲\omega t)$$

بیشترین آهنگ تغییر ذخیرهٔ انرژی در خازن وقتی رخ می‌دهد که $\sin(۲\omega t)=۱$ باشد یعنی $۲\omega t=\pi/۲$ ، لذا خواهیم داشت:

$$t=\frac{\pi}{۴\omega}=\frac{\pi}{۴}\sqrt{LC}=\frac{\pi}{۴}\sqrt{(۳\times ۱۰^{-۳})(۲/۷\times ۱۰^{-۶})}=۷/۰۷\times ۱۰^{-۵}\ \text{s}$$

(پ) با قرار دادن $\omega=۲\pi/T$ و $\sin(۲\omega t)=۱$ در رابطه du_{E}/dt خواهیم داشت:

$$\left(\frac{dU_{E}}{dt}\right)=\frac{۲\pi q_{max}^{۲}}{۲TC}=\frac{\pi q_{max}^{۲}}{TC}$$

از طرفی داریم:

$$T=۲\pi\sqrt{LC}=۲\pi\sqrt{(۳\times ۱۰^{-۳})(۲/۷\times ۱۰^{-۶})}=۵/۶۵\times ۱۰^{-۴}\ \text{s}$$

لذا خواهیم داشت:

$$\left(\frac{dU_{E}}{dt}\right)_{max}=\frac{\pi(۱/۸\times ۱۰^{-۴})^{۲}}{(۵/۶۵\times ۱۰^{-۴})(۲/۷\times ۱۰^{-۶})}=۶۶/۷\ \text{W}$$

۲۲۰۰●●- در یک مدار LC نوسانی که در آن $C=۴/۰۰\mu\text{F}$ است، بیشینهٔ اختلاف پتانسیل دو سرخازن در حین نوسانها $۱/۵۰۰\text{V}$ و بیشینهٔ جریان عبوری از القاگر $۵۰/۰\text{mA}$ است. (الف) القاییدگی و (ب) بسامد نوسانها چقدر است؟ (پ) برای اینکه بار روی خازن از صفر به مقدار بیشینه‌اش برسد چه مدت زمان مورد نیاز است؟ GO

حل: (الف)

$$U_{max}=\frac{۱}{۲}CV_{max}^{۲}=\frac{۱}{۲}(۴\times ۱۰^{-۶})(۱/۵)^{۲}=۴/۵\times ۱۰^{-۶}\ \text{J}$$

$$U_{max}=\frac{۱}{۲}Li_{max}^{۲}\Rightarrow(۴/۵\times ۱۰^{-۶})=\left(\frac{۱}{۲}\right)L(۵۰\times ۱۰^{-۳})^{۲}$$

$$\Rightarrow L=۳/۶\times ۱۰^{-۳}\ \text{H}$$

(ب)

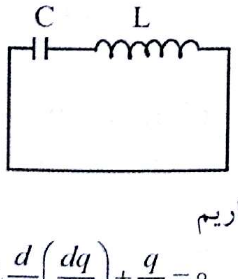
$$f=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{LC}}=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{(۳/۶\times ۱۰^{-۳})(۴\times ۱۰^{-۶})}}=۱۳۲۷\ \text{Hz}$$

(پ) این زمان برابر $T/۴$ است.

$$T=\frac{۱}{f}=۷/۵\times ۱۰^{-۴}\ \text{s}$$

$$t=\frac{T}{۴}=۱/۸۹\times ۱۰^{-۴}\ \text{s}$$

۲۳۰۰●●- با به کاربردن قاعدهٔ حلقه، برای مدار LC معادلهٔ دیفرانسیلی به دست آورید (معادلهٔ ۲۷-۱۱ را ببینید).



حل: از قانون حلقه داریم

$$+L\frac{di}{dt}+\frac{q}{C}=۰\Rightarrow L\frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{dt}\right)+\frac{q}{C}=۰$$

$$\Rightarrow L\frac{d^{۲}q}{dt^{۲}}+\frac{q}{C}=۰$$

Scanned by CamScanner

بخش ۲۷-۵ نوسان‌های میرا در مدار RLC

•۲۴۰۰- در یک مدار RLC متوالی نوسانی، زمان لازم را برای اینکه انرژی بیشینهٔ موجود در طی یک نوسان به نصف مقدار اولیه‌اش کاهش یابد، به دست آورید. فرض کنید که در $t=0$، $q=Q$ است.

حل: انرژی بیشینه در خازن برابر است با $q_{max}^2/2C$ و می‌خواهیم زمانی را به دست آوریم که در آن

$$\frac{q_{max}^2}{2C}=\frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{2C}\right)\Rightarrow q_{max}=\frac{Q}{\sqrt{2}}$$

بار بیشینهٔ در خازن طبق رابطه $q_{max}=Qe^{-Rt/2L}$ کاهش می‌یابد و از آنجا داریم

$$\ln\left(\frac{q_{max}}{Q}\right)=-\frac{Rt}{2L}\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{Rt}{2L}$$

$$t=-\frac{2L}{L}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{L}{R}\ln 2$$

••۲۵۰۰- چه مقاومت R باید به طور متوالی به القایندگی $L=220\,\text{mH}$ و ظرفیت $C=12/0\,\mu\text{F}$ بسته شود تا اینکه بار بیشینهٔ روی خازن در ۵۰/۰ چرخه به ۹۹/۰٪ مقدار اولیه‌اش کاهش یابد؟ (فرض کنید که $\omega'\approx\omega$ است.) ILW

حل: بار بیشینهٔ روی خازن طبق رابطهٔ $q_{max}=Qe^{-Rt/2L}$ افت می‌کند که در اینجا t زمان لازم برای ۵۰ چرخه است.

$$t=50T=50\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)=50(2\pi)\sqrt{LC}$$

$$=(50)(2\pi)\sqrt{(220\times10^{-3})(12\times10^{-6})}=0/51\,\text{s}$$

حال طرفین را بر Q تقسیم و سپس انتگرال طبیعی می‌گیریم

$$\ln\left(\frac{q_{max}}{Q}\right)=-\frac{Rt}{2L}$$

$$R=-\frac{2L}{t}\ln\left(\frac{q_{max}}{Q}\right)=-\frac{2(220\times10^{-3})}{0/51\,\text{s}}\ln 0/99$$

$$=8/66\times10^{-3}\,\Omega$$

•••۲۶۰۰- یک مدار تک حلقه شامل مقاومت $7/20\,\Omega$، القاگر $12/0\,\text{H}$ و خازن $3/20\,\mu\text{C}$ است. در ابتدا خازن دارای بار $6/2\,\mu\text{C}$ و جریان صفر است. بار روی خازن را برای N چرخهٔ کامل بعدی برای (الف) $N=5$، (ب) $N=10$ و (پ) $N=100$ حساب کنید.

حل: بار q پس از N چرخهٔ کامل با قرار دادن $t=NT=2\pi N/\omega'$ در معادلهٔ زیر بدست می‌آید.

$$q=Qe^{-Rt/2L}\cos(\omega' t+\phi)=Qe^{-RNT/2L}\cos[\omega'(2\pi N/\omega')+\phi]$$

$$=Qe^{-RN(2\pi\sqrt{LC}/2L}\cos(2\pi N/+\phi)$$

$$=Qe^{-R\pi N\sqrt{C/L}}\cos\phi$$

توجه داریم که مقدار بار اولیه ($N=0$ در معادلهٔ بالا قرار دهیم) برابر $q_0 Q\cos\phi$ است که $q_0=6/2\,\mu\text{C}$ داده شده است.

بنابراین می‌توانیم نتیجه بالا را به صورت $q_N=q_0 e^{-R\pi N\sqrt{C/L}}$ نوشت. برای مقادیر داده شدهٔ $R=7/2\Omega$، $C=3/2\times10^{-6}\,\text{F}$ و $L=12\,\text{H}$

(الف) به ازای $N=5$ خواهیم داشت $q_5=5/85\times10^{-6}\,\text{C}$

(ب) به ازای $N=10$ داریم $q_{10}=5/52\times10^{-6}\,\text{C}$

(پ) به ازای $N=100$ داریم $q_{100}=1/93\times10^{-6}\,\text{C}$

•••۲۷۰۰- در یک مدار RLC متوالی نوسانی، نشان دهید که کسر اتلاف انرژی در هر چرخهٔ نوسان، $\Delta U/U$، با تقریب خوبی با $2\pi R/\omega L$ داده می‌شود. کمیت $\omega L/R$ اغلب Q مدار نامیده می‌شود (**کیفیت**). مداری که در آن Q بالا باشد دارای مقاومت پایین و کسر اتلاف انرژی پایین در هر چرخه $(=2\pi/Q)$ است. SSM

حل: انرژی الکترومغناطیسی از زیر به دست می‌آید

$$U(t)-=\frac{Q}{2C}e^{-Rt/L}\cos^2(\omega' t+\phi)=U_{max}e^{-Rt/L}$$

که U_{max}، انرژی بیشینه مربوط به حالتی است که کسینوس برابر یک است. بعد از گذشت یک دوره انرژی برابر است با

$$U(t+T)=\frac{Q}{2C}e^{-R(t+T)/L}$$

$$\frac{|\Delta U|}{U}=\frac{|U(t+T)-U(t)|}{U(t)}=\frac{U_{max}e^{-Rt/L}-U_{max}e^{-R(t+T)/L}}{U_{max}e^{-Rt/L}}$$

با فرض $\frac{RT}{L}<<1$ با استفاده از بسط e^{-x} خواهیم

$$e^{-RT/L}\cong 1-\frac{RT}{L}$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\frac{|\Delta U|}{U}\cong 1-(1-\frac{RT}{L}+\ldots)\cong\frac{RT}{L}=\frac{2\pi R}{L\omega}$$

بخش ۲۷-۸ سه مدار ساده

•۲۸۰- یک مقاومت $50\,\Omega$ مطابق شکل ۲۷-۸ به یک مولد ac با $\varepsilon_m=30/0\,\text{V}$ متصل شده است. اگر بسامد emf برابر باشد با (الف) $1/00\,\text{kHz}$ و (ب) $8/00\,\text{kHz}$، دامنهٔ جریان متناوب حاصل چقدر است؟

حل: (الف) جریان عبوری از مقاومت برابر است با

$$i_m=\frac{\varepsilon_m}{R}=\frac{30}{50}=0/6\ \text{A}$$

(ب) جریان عبوری از مقاومت ربطی به بسامد مولد ندارد و بنابراین دامنهٔ جریان همان $i_m=0/6\text{A}$ است.

•۲۹۰- (الف) در چه بسامدی، القاگر $6/0\,\text{mH}$ و خازن $10\,\mu\text{F}$ دارای واکنایی یکسان هستند؟ (ب) واکنایی چقدر خواهد بود؟ (پ) نشان دهید که این بسامد، بسامد طبیعی مدار نوسانی با L و C یکسان است.

Scanned by CamScanner

حل: (الف) واکنایی القایی برابر $X_L=\omega_d L$ و واکنایی خازنی $X_C=1/\omega_d C$ است. وقتی این دو با هم برابر شوند داریم $\omega_d=1/\sqrt{LC}$ و در نتیجه خواهیم داشت

$$f_d=\frac{\omega_d}{۲\pi}=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{LC}}=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{(۶\times۱۰^{-۳})(۱۰\times۱۰^{-۶})}}=۶۵۰\,\text{Hz}$$

(ب) واکنایی القایی و خازنی در این بسامد با هم برابرند و داریم

$$X_c=X_L=\omega_d L=۲\pi f_d L=۲\pi(۶۵۰)(۶\times۱۰^{-۳})=۶۵۰\,\Omega$$

(پ) بسامد طبیعی نوسانهای LC با رابطهٔ $f=\frac{\omega}{۲\pi}=1/۲\pi\sqrt{LC}$ داده می‌شود کدام قسمت (الف) محاسبه شد.

•۳۰- یک خازن $۱/۵۰\mu F$ مطابق شکل ۲۷-۱۰ به یک مولد ac با $\varepsilon_m=۳۰/۰V$ متصل شده است. اگر بسامد emf برابر باشد با (الف) ۱/۰۰kHz و (ب) ۸/۰۰kHz ، دامنهٔ جریان متناوب حاصل چقدر است؟

حل: (الف)

$$i=\frac{V_C}{X_C}=\frac{\varepsilon_m}{1/\omega_d C}=\varepsilon_m\omega_d C=۲\pi\varepsilon_m f_d C$$
$$=۲\pi(۳۰)(۱\times۱۰^{۳})(۱/۵\times۱۰^{-۶})=۰/۲۸۳\,\text{A}$$

(ب) به ازای $f_d=۸\times۱۰^{۳}$ Hz داریم

$$i=۲\pi(۳۰)(۸\times۱۰^{۳})(۱/۵\times۱۰^{-۶})=۲/۲۶\,\text{A}$$

•۳۱- یک القاگر ۵۰/۰mH مطابق شکل ۲۷-۱۲ به یک مولد ac با $\varepsilon_m=۳۰/۰V$ متصل شده است. اگر بسامد emf برابر باشد با (الف) ۱/۰۰kHz و (ب) ۸/۰۰kHz، دامنهٔ جریان متناوب حاصل چقدر است؟ **ILW**

حل: (الف)

$$i=\frac{V_L}{X_L}=\frac{\varepsilon_m}{\omega_d L}=\frac{\varepsilon_m}{۲\pi f_d L}$$
$$=\frac{۳۰}{۲\pi(۱\times۱۰^{۳})(۵۰\times۱۰^{-۳})}=۰/۰۹۵\,\text{A}$$

(ب) به ازای $f_d=۸\times۱۰^{۳}$ Hz

$$i=\frac{(۳۰)}{۲\pi(۸\times۱۰^{۳})(۵۰\times۱۰^{-۳})}=۰/۰۱۱۹\,\text{A}$$

••۳۲- یک مولد ac با نیروی محرکهٔ الکتریکی $\varepsilon=\varepsilon_m\sin\omega_d t$ که در آن $\varepsilon_m=۲۵/۰V$ و $\omega_d=۳۷۷$rad/s به یک خازن $۴/۱۵\mu F$ متصل شده است. (الف) مقدار بیشینهٔ جریان چقدر است؟ (ب) وقتی جریان بیشینه است، emf مولد چقدر است؟ (پ) وقتی emf مولد برابر ۱۲/۵V- است و بزرگی آن افزایش می‌یابد، جریان چقدر است؟

حل: (الف) چون مدار فقط شامل خازن است لذا اختلاف پتانسیل دو سر آن باید با نیروی محرکهٔ الکتریکی مولد برابر باشد. لذا خواهیم داشت:

$$i_{max}=\frac{V_C}{X_C}=\frac{\varepsilon_{max}}{1/\omega_d C}=\varepsilon_{max}\omega_d C$$
$$=(۲۵)(۳۷۷)(۴/۱۵\times۱۰^{-۶})=(۳/۹۱\times۱۰^{-۲})\,\text{A}$$

(ب) چون جریان به اندازهٔ $\pi/۲$ نسبت به نیروی محرکه جلوتر است، هنگامی که جریان بیشینه است، نیروی محرکه صفر است.

$$\varepsilon=۲۵\sin ۳۷۷t$$

(پ)

$$-۱۲/۵=۲۵\sin ۳۷۷t\Rightarrow \sin ۳۷۷t=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow \cos ۳۷۷t=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$i=۳۹/۱\sin\left(۳۷۷t+\frac{\pi}{۲}\right)=۳۹/۱\cos ۳۷۷t$$

چون نیروی محرکه در حال افزایش است، $\frac{d\varepsilon}{dt}>۰$ می‌باشد. بنابراین می‌توان نوشت

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=(۲۵)(۳۷۷)\cos ۳۷۷t$$

شرط مثبت بودن $\frac{d\varepsilon}{dt}$ این است که $\cos ۳۷۷t>۰$ باشد،پس

$$i=(۰/۰۳۹۱)\left(+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)=۳/۳۸۶\times۱۰^{-۲}\,\text{A}$$

••۳۳- نیروی محرکهٔ الکتریکی یک مولد ac برابر است با $\varepsilon=\varepsilon_m\sin(\omega_d t-\pi/۴)$ که در آن $\mathcal{E}_m=۳۰/۰V$ و $\omega_d=۳۵۰$rad/s. جریان ایجاد شده در مدار متصل به آن برابر است با $i(t)=I\sin(\omega_d t-\pi/۴)$ که در آن $I=۶۲۰$mA. در چه زمانی پس از $t=۰$ ، (الف) emf مولد برای باراول به بیشینه می‌رسد و (ب) جریان برای بار اول به بیشینه می‌رسد؟ (پ) مدار شامل فقط یک تک عنصر دیگر به جز مولد است. این عنصر خازن است یا القاگر یا مقاومت؟ پاسخ خود را توجیه کنید. (ت) در هر حالت، مقدار ظرفیت، القایدگی یا مقاومت چقدر است؟ **SSM**

حل: (الف) نیروی محرکه الکتریکی مولد وقتی بیشینه است که $\varepsilon=\varepsilon_m$ باشد از آنجا داریم

$$\varepsilon=\varepsilon_m\sin\left(\omega_d t-\frac{\pi}{۴}\right)\Rightarrow \varepsilon=۳۰\sin\left(۳۵۰t-\frac{\pi}{۴}\right)$$
$$\sin\left(۳۵۰t-\frac{\pi}{۴}\right)=۱\Rightarrow ۳۵۰t-\frac{\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}\pm۲\pi n$$

که در آن n یک عدد صحیح است. برای اینکه نخستین بار پس از $t=۰$ ، نیروی محرکهٔ الکتریکی بیشینه باشد باید $n=۰$ را قرار دهیم در نتیجه داریم:

$$۳۵۰t-\frac{\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow t=۶/۷۳\times۱۰^{-۳}\,\text{s}$$

(ب) جریان وقتی بیشینه باشد که $i=I_m$ باشد و ضمناً جریان به اندازه $\pi/۲$ نسبت به نیروی محرکهٔ الکتریکی عقب‌تر است در نتیجه داریم:

$$i=I_m\sin\left(۳۵۰t-\frac{۳\pi}{۴}\right)$$
$$\sin\left(۳۵۰t-\frac{۳\pi}{۴}\right)=۱\Rightarrow ۳۵۰t-\frac{۳\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}\pm۲\pi n$$

که به ازای $n=۰$ خواهیم داشت:

$$t=۱/۱۲\times۱۰^{-۲}\,\text{s}$$

Scanned by CamScanner

(پ) چون جریان نسبت به ولتاژ تاخیر فاز دارد بنابراین عنصر دیگر مدار باید یک القاگر باشد

(ت) مدار فقط شامل یک القاگر است لذا باید فقط القایدگی آن را محاسبه کنیم

$$X_L = \frac{V_L}{L} = \frac{\varepsilon_m}{L} = \frac{۳۰}{۰/۶۲} = ۴۸/۴\Omega$$

$$X_L = L\omega_d \Rightarrow ۴۸/۴ = L(۳۵۰) \Rightarrow L = ۰/۱۳۸\text{H}$$

۳۴●●- نیروی محرکهٔ الکتریکی یک مولد ac برابر است با $\varepsilon = \varepsilon_m \sin\omega_d t$ که در آن $\varepsilon_m = ۲۵/۰\text{V}$ و $\omega_d = ۳۷۷\text{rad/s}$ است. این مولد به یک القاگر $۱۲/۷\text{ H}$ متصل است. (الف) مقدار بیشینهٔ جریان چقدر است؟ (ب) وقتی جریان بیشینه است، emf مولد چقدر است؟ (پ) وقتی emf مولد برابر $-۱۲/۵\text{V}$ است و بزرگی آن افزایش می‌یابد، جریان چقدر است؟

حل: (الف) در اینجا $\varepsilon_m = V_L$ لذا می‌توان نوشت

$$L = \frac{V_L}{X_L} = \frac{\varepsilon_m}{L\omega_d} = \frac{۲۵}{(۱۲/۷)(۳۷۷)} = ۵/۲۲ \times ۱۰^{-۳}\text{ A}$$

(ب) اختلاف فاز بین جریان و نیروی محرکه $\pi/۲$ است. بنابراین وقتی جریان بیشینه است، نیروی محرکه صفر است.

(پ) $$\varepsilon = \varepsilon_m \sin\omega_d t \Rightarrow -۱۲/۵ = ۲۵\sin\omega_d t$$

$$\sin\omega_d t = -۰/۵ \Rightarrow |\cos\omega_d t| = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$i = I_m \sin\left(\omega_d t - \frac{\pi}{۲}\right) = I\,|\cos\omega_d t|$$

$$i = (۵/۲۲ \times ۱۰^{-۳})\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = ۴/۵۲ \times ۱۰^{-۳}\text{ A}$$

بخش ۲۷-۹ مدار RLC متوالی

۳۵●- در شکل ۲۷-۷، القاگر را از مدار برمی‌داریم و مقدارهای $R=۲۰۰\Omega$ ، $C=۱۵۰\mu\text{F}$ ، $f_d = ۶۰/۰\text{ Hz}$ و $\varepsilon_m = ۳۶/۰\text{ V}$ را در نظر می‌گیریم. (الف) Z ، (ب) ϕ و (پ) I چقدرند؟ (ت) نمودار بردار فاز را رسم کنید.

حل: (الف) در اینجا $X_L = ۰$ ، در حالیکه $R = ۲۰۰\Omega$ و

$$X_C = \frac{۱}{\omega_d C} = \frac{۱}{۲\pi f_d C} = \frac{۱}{۲\pi(۶۰)(۱۵ \times ۱۰^{-۶})} = ۱۷۷\Omega$$

باقی می‌ماند و مقاومت ظاهری چنین است

$$Z = \sqrt{R^۲ + X_C^۲} = \sqrt{(۲۰۰)^۲ + (۱۷۷)^۲} = ۲۶۷\Omega$$

(ب) زاویهٔ فاز برابر است با

$$\phi = \tan^{-۱}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) = \tan^{-۱}\left(\frac{-۱۷۷}{۲۰۰}\right) = -۴۱/۵^\circ$$

(پ) دامنهٔ جریان برابر است با

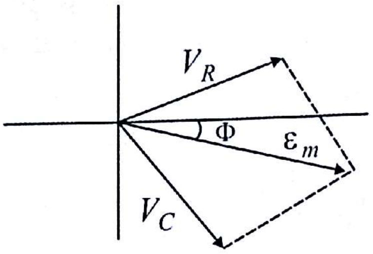
$$I = \frac{\varepsilon_m}{Z} = \frac{۳۶}{۲۶۷} = ۰/۱۳۵\text{ A}$$

(ت) نخست دامنه‌های ولتاژ دو سر عنصرهای مدار را به دست می‌آوریم

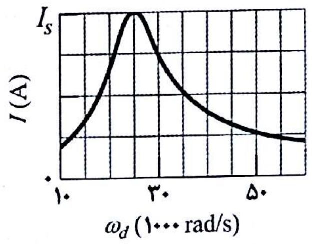
$$V_R = IR = (۰/۱۳۵)(۲۰۰) = ۲۷\text{ V}$$

$$V_C = IX_C = (۰/۱۳۵)(۱۷۷) = ۲۳/۹\text{ V}$$

مدار، خازنی است و در نتیجه I از ε_m جلو می‌افتد. نمودار بردار فاز چنین خواهد بود.



۳۶●- دامنهٔ جریان I برحسب بسامد زاویه‌ای محرک ω_d برای یک مدار RLC در شکل ۲۷-۲۹ داده شده که در آن مقیاس محور قائم با $I_s = ۴/۰۰\text{A}$ مشخص شده است. القایدگی برابر $۲۰۰\mu\text{H}$ و دامنهٔ emf برابر $۸/۰\text{V}$ است. (الف) C و (ب) R چقدرند؟



شکل ۲۷-۲۹ مسئلهٔ ۳۶

حل: (الف) با توجه به نمودار، بسامد زاویه‌ای تشدید برابر ۲۵۰۰۰rad/s است اذا خواهیم داشت

$$\omega = \frac{۱}{\sqrt{LC}} \Rightarrow C = \frac{۱}{L\omega^۲} = \frac{۱}{(۲۰۰ \times ۱۰^{-۶})(۲۵۰۰۰)^۲}$$

$$C = ۸ \times ۱۰^{-۶}\text{ F}$$

(ب) همچنین از نمودار می‌توان دریافت که دامنهٔ جریان در تشدید برابر ۴ A است. ضمناً در تشدید مقاومت ظاهری Z کاملاً برابر با R می‌شود، لذا می‌توان نوشت

$$R = Z = \frac{\varepsilon_m}{I_m} = \frac{۸}{۴} = ۲\Omega$$

۳۷●- در شکل ۲۷-۷، خازن را از مدار برمی‌داریم و مقدارهای $R=۲۰۰\Omega$ ، $L=۲۳۰\text{mH}$ ، $f_d=۶۰/۰\text{Hz}$ و $\varepsilon_m=۳۶/۰\text{V}$ را در نظر می‌گیریم. (الف) Z ، (ب) ϕ و (پ) I چقدرند؟ (ت) نمودار فاز را رسم کنید.

حل: (الف) در اینجا $X_C = ۰$ و داریم

$$X_L = \omega L = ۲\pi f_d L = ۲\pi(۶۰۰)(۰/۲۳) = ۸۶/۷\Omega$$

$$Z = \sqrt{R^۲ + X_L^۲} = \sqrt{(۲۰۰)^۲ + (۸۶/۷)^۲} = ۲۱۸\Omega$$

(ب) $$\phi = \tan^{-۱}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) = \left(\frac{۸۶/۷ - ۰}{۲۰۰}\right) = ۲۳/۴^\circ$$

(پ) $$I_m = \frac{\varepsilon_m}{Z} = \frac{۳۶}{۲۱۸} = ۰/۱۶۵\text{ A}$$

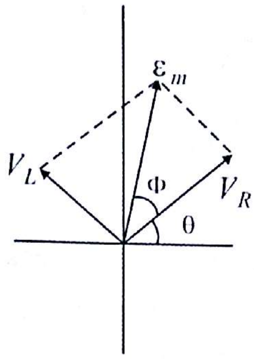
(ت) ابتدا دامنه‌های ولتاژ دو سر عنصرهای مدار را به دست می‌آوریم

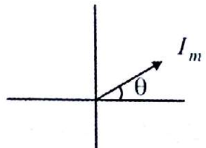
Scanned by CamScanner

$V_R = I_m R = (۰/۱۶۵)(۲۰۰) = ۳۳\,V$

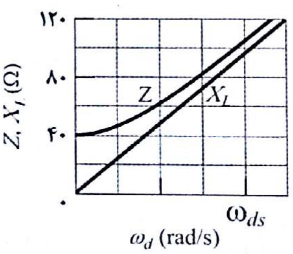
$I_m = \frac{\varepsilon_m}{Z} = \frac{۳۶}{۲۱۸} = ۰/۱۶۵\,A$

یک مدار القایی داریم لذا ε_m از I_m جلو می‌افتد و نمودار بردار فاز چنین می‌شود.





●۳۸– یک منبع متناوب با بسامد متغیر، یک القاگر با القایدگی L و یک مقاومت R به طور متوالی به هم متصل‌اند. شکل ۲۷–۳۰ مقاومت ظاهری Z مدار را برحسب بسامد زاویه‌ای محرک ω_d به دست می‌دهد. مقیاس محور افقی با $\omega_{ds} = ۱۶۰۰\,rad/s$ مشخص شده است. شکل همچنین واکنایی X_L را برای القاگر برحسب ω_d به دست می‌دهد. (الف) R و (ب) L چقدرند؟



شکل ۲۷–۳۰ مسئلهٔ ۳۸

حل: (الف) در $\omega_d = ۰$، $X_L = \omega_d L = ۰$، در نتیجه $Z = R = ۴۰$

(ب) در بسامدهای بالا $X_L = \omega_d L >> R$ و $Z \cong X_L$ می‌گردد به ازای $\omega_d = ۲۰۰۰\,rad/s$ از منحنی داریم $X_L = ۱۲۰\Omega$ لذا خواهیم داشت

$$L = \frac{X_L}{\omega_d} = \frac{۱۲۰}{۲۰۰۰} = ۰/۰۶H$$

●۳۹– در شکل ۲۷–۷، مقدارهای $R = ۲۰۰\Omega$، $C = ۷۰/۰\mu F$، $L = ۲۳۰\,mH$، $f_d = ۶۰/۰\,Hz$ و $\varepsilon_m = ۳۶/۰\,V$ را در نظر می‌گیریم. (الف) Z، (ب) ϕ و (پ) I، چقدرند؟ نمودار بردار فاز را رسم کنید. **SSM**

حل: (الف)

$$X_L = \omega_d L = ۲\pi f_d L = ۲\pi(۶۰)(۲۳۰\times۱۰^{-۳}) = ۸۶/۷\Omega$$

$$X_C = \frac{۱}{\omega_d C} = \frac{۱}{۲\pi f_d C} = \frac{۱}{۲\pi(۶۰)(۷۰\times۱۰^{-۶})} = ۳۷/۹\Omega$$

$$Z = \sqrt{R^۲ + (X_L - X_c)^۲} = \sqrt{(۲۰۰)^۲ + (۸۶/۷ - ۳۷/۹)^۲} = ۲۰۶\Omega$$

(ب)

$$\phi = \tan^{-۱} = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{۸۶/۷ - ۳۷/۹}{۲۰۰} = ۱۳/۷^\circ$$

(پ)

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{Z} = \frac{۳۶}{۲۰۶} = ۰/۱۷۵A$$

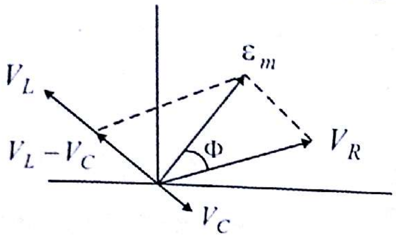
(ت)

$$V_R = I_m R = (۰/۱۷۵) = ۳۵V$$

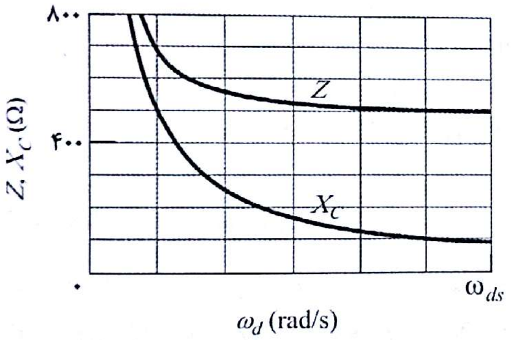
$$V_L = I_m X_L = (۰/۱۷۵)(۸۶/۷) = ۱۵/۲V$$

$$V_C = I_m X_C = (۰/۱۷۵)(۳۷/۹) = ۶/۶۲V$$

ضمناً چون $X_L > X_C$ است لذا ε_m جلوتر از I_m می‌افتد و نمودار فاز چنین می‌شود.



●۴۰– یک منبع متناوب با بسامد متغیر، یک خازن با ظرفیت C و یک مقاومت با مقاومت R به طور متوالی به هم متصل‌اند. شکل ۲۷–۳۱ مقاومت ظاهری Z مدار را برحسب بسامد زاویه‌ای محرک ω_d به دست می‌دهد؛ منحنی در ۵۰۰Ω به مجانب می‌رسد. مقیاس محور افقی با $\omega_{ds} = ۳۰۰\,rad/s$ مشخص شده است. شکل همچنین واکنایی X_C را برای خازن برحسب ω_d به دست می‌دهد. (الف) R و (ب) C چقدرند؟



شکل ۲۷–۳۱ مسئلهٔ ۴۰

حل: (الف) در مدار القاگر وجود ندارد و فقط مقاومت و خازن داریم و چون مقاومت خازنی با بسامد زاویه‌ای کاهش می‌یابد در نتیجه مقدار مجانبی Z باید برابر با مقاومت باشد یعنی $R = ۵۰۰\Omega$.

(ب)

$$C = \frac{۱}{\omega_d X_c} = \frac{۱}{(۵۰)(۵۰۰)} = ۴۰\times۱۰^{-۶}\,F$$

●۴۱– یک موتور الکتریکی وقتی با بار کار می‌کند دارای مقاومت مؤثر $۳۲/۰\Omega$ و واکنایی القایی $۴۵/۰\Omega$ است. ولتاژ rms دو سر منبع تناوبی $۴۲۰\,V$ است. جریان rms را حساب کنید.

حل:

$$I_{rms} = \frac{\varepsilon_{rms}}{Z} = \frac{\varepsilon_{rms}}{\sqrt{R^۲ + X_L^۲}} = \frac{۴۲۰}{\sqrt{(۴۵)^۲ + (۳۲)^۲}} = ۷/۶A$$

Scanned by CamScanner

۴۲•- یک منبع متناوب یک مدار RLC متوالی را با دامنهٔ emf ۶/۰۰V در ثابت فاز °۳۰/۰+ به کار می‌اندازد. وقتی اختلاف پتانسیل دو سر خازن به بیشینهٔ مقدار مثبت خود برابر ۵/۰۰V+ می‌رسد، اختلاف پتانسیل دو سر القاگر چقدر است (شامل علامت آن)؟

حل:

$$\cos\phi = \frac{V_R}{\varepsilon_m} \qquad \sin\phi = \frac{V_L - V_C}{\varepsilon_m}$$

$$\sin ۳۰ = \frac{V_L - ۵}{۶} \Rightarrow V_L = ۸\ \text{V}$$

۴۳•- پیچه‌ای با القایدگی ۸۸mH و مقاومت نامعلوم و یک خازن ۰/۹۴μF به طور متوالی به یک emf متناوب با بسامد ۹۳۰Hz متصل‌اند. اگر ثابت فاز بین ولتاژ اعمال شده و جریان برابر °۷۵ باشد، مقاومت پیچه چقدر است؟ ILW

حل:

$$\omega_d = ۲\pi f_d = ۲\pi(۹۳۰) = ۵۸۴۰/۴\ \text{rad/s}$$

$$X_L = \omega_d L = (۵۸۴۰/۴)(۸۸\times۱۰^{-۳}) = ۵۱۴\Omega$$

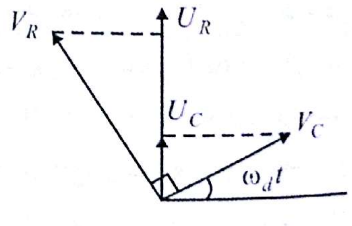
$$X_C = \frac{۱}{\omega_d C} = \frac{۱}{(۵۸۴۰/۴)(۰/۹۴\times۱۰^{-۶})} = ۱۸۲/۲\Omega$$

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} \Rightarrow \tan ۷۵^\circ = \frac{۵۱۴ - ۱۸۲/۲}{R}$$

$$\Rightarrow R = ۸۹\Omega$$

۴۴••- یک منبع emf تناوبی با بسامد متغیر f_d به طور متوالی به مقاومت ۵۰/۰Ω و خازن ۲۰/۰μF بسته شده است. دامنهٔ emf برابر ۱۲/۰V است. (الف) نمودار بردار فاز را برای بردار فاز V_R (پتانسیل دو سر مقاومت) و بردار فاز V_C (پتانسیل دو سر خازن) رسم کنید. (ب) در کدام بسامد محرک f_d دو بردار فاز دارای طول یکسان هستند؟ در این بسامد محرک، (پ) زاویهٔ فاز برحسب درجه، (ت) تندی زاویه‌ای که بردارهای فاز با آن می‌چرخند و (ث) دامنهٔ جریان، چقدرند؟

حل: (الف)



(ب)

$$R = X_C = \frac{۱}{\omega_d C} \Rightarrow ۵۰ = \frac{۱}{\omega_d(۲۰\times۱۰^{-۶})} \Rightarrow \omega_d = ۱۰۰۰\ \text{rad/s}$$

$$\omega_d = ۲\pi f_d \Rightarrow ۱۰۰۰ = ۲\pi f_d \Rightarrow f_d = ۱۵۹/۲\ \text{Hz}$$

(پ)

$$\phi = \tan^{-۱}\left(-\frac{V_C}{V_R}\right) = \tan^{-۱}(-۱) = -۴۵^\circ$$

(ت) در قسمت (ب) به دست آمد $\omega_d = ۱۰۰۰\ \text{rad/s}$

(ث)

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{Z} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^۲ + X_C^۲}} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{۲}R} = \frac{۱۲}{\sqrt{۲}(۵۰)} = ۰/۱۷۸\text{A}$$

۴۵••- یک مدار RLC همانند مدار شکل ۲۷-۷ دارای $R = ۵/۰۰\Omega$ ، $C = ۲۰/۰\mu\text{F}$ ، $L = ۱/۰۰\text{H}$ و $\varepsilon_m = ۳۰/۰\ \text{V}$ است. (الف) در کدام بسامد زاویه‌ای ω_d دامنهٔ جریان مقدار بیشینهٔ خود را همانند منحنیهای تشدید شکل ۲۷-۱۶ خواهد داشت؟ (ب) مقدار این بیشینه چقدر است؟ در کدام (پ) بسامد زاویه‌ای پایینتر $\omega_{d۱}$ و (ت) بسامد زاویه‌ای بالاتر $\omega_{d۲}$، دامنهٔ جریان نصف این مقدار بیشینه خواهد بود؟ (ث) کسر نیم پهنای $[=(\omega_{d۱}-\omega_{d۲})/\omega]$ منحنی تشدید برای این مدار چقدر است؟ SSM WWW

حل: (الف) در بسامد زاویه‌ای تشدید، دامنهٔ در مدار بیشینه است.

$$\omega_d = \omega = \frac{۱}{\sqrt{LC}} = \frac{۱}{\sqrt{(۱)(۲۰\times۱۰^{-۶})}} = ۲۲۴\ \text{rad/s}$$

(ب) وقتی $\omega_d = \omega$ است $Z = R$ و در نتیجه دامنهٔ جریان برابر است با

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{R} = \frac{۳۰}{۵} = ۶\text{A}$$

(پ) و (ت) می‌خواهیم مقادیر مثبت ω_d را به گونه‌ای به دست آوریم که $I_m = \frac{\varepsilon_m}{۲R}$ باشد.

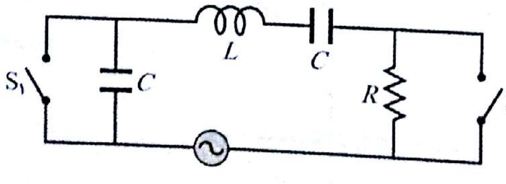
$$\frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^۲ + \left(\omega_d L - \frac{۱}{\omega_d c}\right)^۲}} = \frac{\varepsilon_m}{۲R}$$

طرفین را مجذور کرده و معادله درجه دو برای ω_d حل کنیم خواهیم داشت $\omega_{d,۱} = ۲۱۹/۳\ \text{rad/s}$ و $\omega_{d,۲} = ۲۲۷/۹\ \text{rad/s}$.

(ث) کسر نیم- پهنای تشدید چنین می‌شود

$$\frac{\omega_{d,۲} - \omega_{d,۱}}{\omega} = \frac{۲۲۷/۹ - ۲۱۹/۳}{۲۲۳/۶} = ۰/۰۳۴$$

۴۶••- شکل ۲۷-۳۲ یک مدار RLC را نشان می‌دهد که شامل دو خازن مشابه و دو کلید است. دامنهٔ emf در ۱۲/۰ V و بسامد محرک در ۶۰/۰Hz تنظیم شده‌اند. وقتی دو کلید باز هستند، جریان به اندازهٔ °۳۰/۹ از emf جلو می‌افتد. وقتی کلید $S_۱$ بسته شود ولی کلید $S_۱$ هنوز باز باشد، emf به اندازهٔ °۱۵/۰ از جریان جلو می‌افتد. وقتی دو کلید بسته شوند، دامنهٔ جریان برابر ۴۴۷mA است. (الف) R ، (ب) C و (پ) L چقدرند؟



شکل ۲۷-۳۲ مسئلهٔ ۴۶

حل: (الف) وقتی دو کلید باز هستند مدار RLC داریم:

$$\omega = ۲\pi f = ۲\pi(۶۰) = ۳۷۶/۸\ \text{rad/s}$$

Scanned by CamScanner

$\phi_1 = -۳۰/۹°$ $\qquad X_C > X_L$

$\tan(-۳۰/۹°) = \frac{X_L - X_C}{R} \Rightarrow X_C - X_L = ۰/۵۹۸R \qquad (۱)$

وقتی S_1 بسته و S_2 باز است خازن از مدار خارج می‌شود

$\phi_2 = ۱۵°$

$\tan(۱۵°) = \frac{X_L}{R} \Rightarrow X_L = ۰/۲۶۸R \qquad (۲)$

وقتی هر دو کلید بسته شدند، مقاومت و خازن هر دو از مدار خارج می‌شوند.

$$X_L = \frac{\mathcal{E}_m}{I_m} = \frac{۱۲}{۰/۴۴۷} = ۲۶/۸\Omega$$

از رابطهٔ (۲)

$$R = \frac{X_L}{۰/۲۶۸} = \frac{۲۶/۸}{۰/۲۶۸} = ۱۰۰\Omega$$

(ب) از رابطهٔ (۱)

$$X_C - ۲۶/۸ = (۰/۵۹۸)(۱۰۰) \Rightarrow X_C = ۳/۱\times ۱۰^{-۵}\ F$$

(پ) $L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{۲۶/۸}{۳۷۶/۸} = ۰/۰۷۱H$

۴۷●●- (الف) در یک مدار RLC، آیا دامنهٔ ولتاژ دو سرالقاگر می‌تواند بزرگتر از دامنهٔ مولد emf باشد؟ (ب) یک مدار RLC را با $\mathcal{E}_m = ۱۰\ V$، $R = ۱۰\Omega$، $L = ۱/۰\ H$ و $C = ۱/۰\ \mu F$ در نظر بگیرید. دامنهٔ ولتاژ دو سر القاگر در تشدید چقدر است؟

حل: (الف) بله، دامنهٔ ولتاژ دو سر القاگر می‌تواند بزرگتر از دامنهٔ مولد $\mathcal{E}_m f$ باشد.

(ب) در حالت تشدید داریم

$$\omega_d = \omega = \frac{۱}{\sqrt{LC}} = \frac{۱}{\sqrt{(۱)(۱\times۱۰^{۹})}} = ۱۰۰۰\ rad/s$$

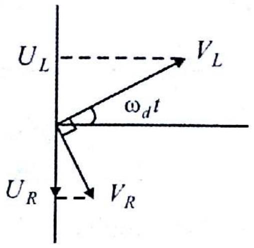
$$Z = R \Rightarrow I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{R} = ۱\ A$$

$$X_L = \omega_d L = (۱۰۰۰)(۱) = ۱۰۰۰\Omega$$

$$V_L = I_m X_L = (۱)(۱۰۰۰) = ۱۰۰۰\ V$$

۴۸●●- یک منبع emf متناوب با بسامد متغیر f_d به طور متوالی به یک مقاومت $۸۰/۰\Omega$ و القاگر $۴۰/۰\ mH$ متصل است. دامنهٔ emf برابر $۶/۰۰\ V$ است. (الف) نمودار بردار فاز را برای بردار فاز V_R (پتانسیل دو سر مقاومت) و بردار فاز V_L (پتانسیل دو سرالقاگر) رسم کنید. (ب) در کدام بسامد محرک f_d دو بردار فاز طول یکسانی دارند؛ در این بسامد محرک، مطلوب است (پ) زاویهٔ فاز برحسب درجه، (ت) تندی زاویه‌ای که بردارهای فاز با آن می‌چرخند و (ث) دامنهٔ جریان.

حل: (الف)



(ب) $V_R = V_L \Rightarrow IR = IX_L \Rightarrow R = \omega_d L = ۲\pi f_d L$

$$\Rightarrow f_d = \frac{R}{۲\pi L} = \frac{۸۰}{۲\pi(۴۰\times۱۰^{-۳})} = ۳۱۸/۳Hz$$

(پ) $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{V_L}{V_R}\right) = \tan^{-1}(۱) = ۴۵°$

(ت) تندی زاویه‌ای چرخش فاز و رها برابر است با

$$\omega_d = \frac{R}{L} = \frac{۸۰}{۴۰\times۱۰^{-۳}} = ۲\times۱۰^{۳}\ rad/s$$

(ث) $R = X_L \Rightarrow I_m \frac{\varepsilon_m}{Z} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^۲+X_L^۲}} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{۲}R} = \frac{۶}{\sqrt{۲}(۸۰)}$

$= ۰/۰۵۳A$

۴۹●●- کسر نیم - پهنای $\Delta\omega_d$ منحنی تشدید همانند شکل ۲۷-۱۶، برابر پهنای منحنی در نصف مقدار بیشینهٔ I است. نشان دهید که $\Delta\omega_d / \omega = R\ (۳C/L)^{۱/۲}$، که در آن ω بسامد زاویه‌ای در تشدید است. توجه کنید که نسبت $\Delta\omega_d / \omega$، همان‌طور که شکل ۲۷-۱۳ می‌دهد، با R افزایش می‌یابد. **SSM**

حل: به حل مسئله ۴۵ مراجعه نمایید.

$$\omega = \frac{۱}{\sqrt{LC}}$$

$$\frac{\varepsilon_m}{Z} = \frac{۱}{۲}\frac{\varepsilon_m}{R} \Rightarrow Z = ۲R$$

$$R^۲ + (X_L - X_C)^۲ = ۴R^۲ \Rightarrow X_L - X_C = \pm\sqrt{۳}R$$

$$L\omega_d - \frac{۱}{Cw_d} = \sqrt{۳}R \Rightarrow CL\omega_d^۲ \pm \sqrt{۳}\,RC\omega_d - ۱ = ۰$$

$$\omega_{d,۱} = \frac{-\sqrt{۳}Rc + \sqrt{۳R^۲C^۲ - ۴LC}}{۲LC},$$

$$\omega_{d,۲}\frac{-\sqrt{۳}Rc + \sqrt{۳R^۲C^۲ - ۴LC}}{۲LC}$$

$$\frac{\Delta\omega_d}{\omega} = \frac{\omega_{d,۲} - \omega_{d,۱}}{\omega} = \frac{۲\sqrt{۳}Rc\sqrt{LC}}{۲LC} = R\sqrt{\frac{۳C}{L}}$$

که با استفاده از داده‌های مسئله ۴۵ خواهیم داشت.

$$\frac{\Delta\omega_d}{\omega} = (۵)\sqrt{\frac{۳(۲۰\times۱۰^{-۶})}{۱}} = ۳/۸۷\times۱۰^{-۲}$$

۵۰●●- یک مولد ac با $\varepsilon_m = ۲۲۰V$ که در $۴۰۰Hz$ کار می‌کند، نوسانهایی در مدار RLC متوالی با $R = ۲۲۰\Omega$، $L = ۱۵۰\ mH$ و $C = ۲۴/۰\ \mu F$ به وجود می‌آورد. مطلوب است (الف) واکنایی خازنی X_C، (ب) مقاومت ظاهری Z و (پ) دامنهٔ جریان i. سپس خازن دیگری را با ظرفیت یکسان به طور متوالی به سایر اجزا می‌بندیم. معین کنید که آیا (ت) X_C، (ث) Z و (ج) I افزایش می‌یابند یا کاهش یا یکسان باقی می‌مانند؟ GO

حل: (الف)

$$X_C = \frac{۱}{\omega_d C} = \frac{۱}{۲\pi f_d L} = \frac{۱}{۲\pi(۴۰۰)(۲۴\times۱۰^{-۶})} = ۱۶/۵۹\Omega$$

Scanned by CamScanner

$$X_L=\omega_d L=۲\pi f_d L=۲\pi(۴۰۰)(۰/۱۵)=۳۷۶/۸\Omega$$

(ب)

$$Z=\sqrt{R^۲+(X_L-X_C)^۲}=\sqrt{(۲۲۰)^۲-(۳۷۶/۸-۱۶/۵۹)^۲}$$
$$=۴۲۲/۱\Omega$$

(پ)
$$I_m=\frac{\varepsilon_m}{Z}=\frac{۲۲۰}{۴۲۲/۱}=۰/۵۲۱\ \text{A}$$

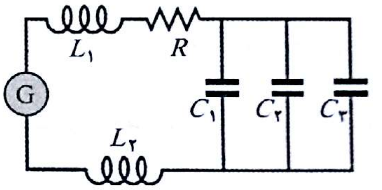
(ت) اگر خازن دیگری معادل خازن اول به مدار اضافه شود، ظرفیت کل مدار نصف و X_C دو برابر می‌شود،

(ث)

$$Z=\sqrt{(۲۰۰)^۲+[۳۷۶/۸-۲\times(۱۶/۵۹)]^۲}=۴۰۸\Omega<۴۲۲\Omega$$

(ج) چون Z کاهش یافته است، I افزایش می‌یابد.

۵۱••- در شکل ۲۷-۳۳، مولدی با بسامد نوسان قابل تنظیم به مقاومت $R=۱۰۰\Omega$ و القاگرهای $L_۱=۱/۷۰\text{mH}$ و $L_۲=۲/۳۰\text{mH}$ و خازن‌های $C_۱=۴۰۰\mu\text{F}$ و $C_۲=۲/۵۰\mu\text{F}$ و $C_۳=۳/۵۰\mu\text{F}$ بسته شده است. (الف) بسامد تشدید مدار چقدر است؟ (*راهنمایی:* به مسئله ۴۷ فصل ۲۶ نگاه کنید.) اگر (ب) مقدار R افزایش یابد، (پ) مقدار $L_۱$ افزایش یابد و (ت) خازن $C_۳$ از مدار خارج شود، چه اتفاقی برای بسامد تشدید رخ می‌دهد؟



شکل ۲۷-۳۳ مسئلهٔ ۵۱

حل:

$$L_{eq}=L_۱+L_۲=۱/۷+۲/۳=۴\text{mH}$$
$$C_{eq}=C_۱+C_۲+C_۳=۴+۲/۵+۳/۵=۱۰\mu\text{F}$$

(الف)

$$f_d=\frac{\omega_d}{۲\pi}=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{L_{eq}C_{eq}}}=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{(۴\times۱۰^{-۳})(۱۰\times۱۰^{-۶})}}=۷۹۶\text{Hz}$$

(ب) با تغییر R، بسامد تشدید f_d تغییری نمی‌کند.

(پ) اگر $f_۱$ افزایش یابد L_{eq} افزایش می‌یابد و در نتیجه f_d کم می‌شود.

(ت) اگر $C_۳$ از مدار خارج شود، C_eq کاهش می‌یابد و در نتیجه f_d افزایش می‌یابد.

بخش ۲۷-۱۰ توان در مدارهای جریان متناوب

۵۲•- مقدار بیشینهٔ یک ولتاژ ac که مقدار rms آن ۱۰۰V است، چقدر است؟

حل:
$$V_{max}=\sqrt{۲}V_{max}=\sqrt{۲}(۱۰۰)=۱۴۱/۴\ \text{V}$$

۵۳•- چه مقدار جریان مستقیم در یک مقاومت معین مقدار گرمایی یکسان با جریان متناوبی با مقدار بیشینهٔ $۲/۶۰\text{A}$، تولید می‌کند؟

حل:

$$i_{rms}=\frac{i_{max}}{\sqrt{۲}}=\frac{۲/۶}{\sqrt{۲}}=۱/۸۴\ \text{A}$$

۵۴•- یک ولت سنج ac با مقاومت ظاهری بزرگ به نوبت به دو سر القاگر، خازن و مقاومت در یک مدار متوالی که دارای emf متناوب ۱۰۰V(rms) است بسته می‌شود؛ در هر نوبت ولت سنج عدد یکسانی را نشان می‌دهد. این عدد چقدر است؟

حل:

$$V_R=V_L=V_C$$

با توجه به اینکه $V_L=V_C$ است، مدار در حالت تشدید است در این حالت داریم

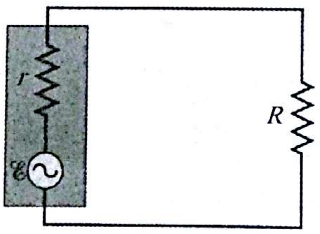
$$V_R=\varepsilon=۱۰۰\ \text{V}$$
$$V_L=V_C=V_R=۱۰۰\ \text{V}$$

۵۵•- یک دستگاه تهویهٔ مطبوع که به یک خط ac با ولتاژ rms برابر ۱۲۰V متصل است معادل با یک مقاومت $۱۲/۰\Omega$ و یک واکنایی القایی $۱/۳۰\Omega$ است که به طور متوالی بسته شده باشند. مطلوب است محاسبهٔ (الف) مقاومت ظاهری دستگاه تهویه و (ب) آهنگ میانگینی که با آن انرژی به این دستگاه داده می‌شود.

حل: (الف)
$$Z=\sqrt{(۱۲)^۲+(۱/۳)^۲}=۱۲/۱\Omega$$

(ب)
$$P=RI_{rms}^۲=R\frac{V^۲}{Z^۲}=(۱۲)\frac{(۱۲۰)^۲}{(۱۲/۱)^۲}=۱۱۹۰\text{W}$$

۵۶••- برای شکل ۲۷-۳۴، نشان دهید که وقتی مقاومت R با مقاومت داخلی r مولد ac برابر باشد، آهنگ میانگینی که با آن انرژی در مقاومت R تلف می‌شود بیشینه است.



شکل ۲۷-۳۴ مسئله‌های ۵۶ و ۸۸

حل:

$$\varepsilon_m=I_{rms}R_{eq}\Rightarrow I_{rms}=\frac{\varepsilon_m}{R+r}$$
$$P=RI_{rms}^۲=R\frac{\varepsilon_m^۲}{(R+r)^۲}$$

وقتی توان نسبت به R بیشینه می‌شود که $\frac{dP}{dR}=۰$ باشد.

$$\frac{dP}{dR}=\frac{\varepsilon_m[(R+r)^۲-۲(R+r)]}{(R+r)^۴}=\frac{\varepsilon_m^۲(r-R)}{(R+r)^۴}=۰\Rightarrow r=R$$

Scanned by CamScanner

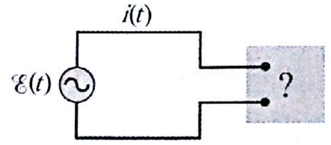
••۵۷- شکل ۲۷-۳۵ یک مولد ac را نشان می‌دهد که از طریق یک زوج پایانه به یک «جعبهٔ سیاه» متصل است. جعبه شامل یک مدار RLC است، که حتی ممکن است مداری چند حلقه‌ای باشد که اجزای آن و چگونگی اتصال آنها را نمی‌دانیم. اندازه‌گیرهای خارج جعبه رابطه‌های زیر را به دست می‌دهند

$$\varepsilon(t) = (۷۵/۰\ \mathrm{V})\sin\omega_d t$$

و

$$i(t) = (۱/۲۰\ \mathrm{A})\sin(\omega_d t + ۴۲/۰°)$$

(الف) ضریب توان چقدر است؟ (ب) آیا جریان نسبت به emf جلو می‌افتد یا عقب می‌ماند؟ (پ) آیا مدار داخل جعبه بیشتر القایی است یا خازنی؟ (ت) آیا جریان در جعبه در تشدید است؟ (ث) آیا باید در جعبه خازن، (ج) القاگر یا (چ) مقاومت وجود داشته باشد؟ (ح) با چه آهنگ میانگینی انرژی به وسیلهٔ مولد به جعبه داده می‌شود؟ (خ) چرا برای پاسخ این پرسشها نیاز به دانستن ω_d ندارید؟ SSM WWW



شکل ۲۷-۳۵ مسئله ۵۷

حل: (الف) ضریب توان $\cos\phi$ است که در آن ϕ ثابت فاز است که با رابطهٔ $i = I\sin(\omega t + \phi)$ تعریف می‌شود. بنابراین $\phi = -۴۲/۰°$ و داریم $\cos\phi = \cos(-۴۲°) = ۰/۷۴۳$

(ب) چون $\phi < ۰$ است جریان از نیروی محرکه جلو می‌افتد.

(پ) چون جریان جلوتر از نیروی محرکه است، مدار در مجموع خازنی است.

(ت) در حالت تشدید $\phi = ۰$ است و چون در اینجا $\phi \neq ۰$ است لذا مدار در حالت تشدید نیست .

(ث) بله د رمدار حتماً خازن وجود دارد.

(ج) ممکن است القاگر وجود داشته باشد.

(چ) حتماً مقاومت در مدار وجود دارد.

(ح) $P_{ave} = \frac{۱}{۲}\varepsilon_m I\cos\phi = \frac{۱}{۲}(۷۵)(۱/۲)(۰/۷۴۳) = ۳۳/۴۴\ \mathrm{W}$

(خ) پاسخ‌های بالا از طریق ثابت فاز ϕ به بسامد زاویه‌ای مربوطند بنابراین با دانستن ϕ دیگر نیازی به دانستن W_d نیست.

••۵۸- در یک مدار RLC نوسانی متوالی، $R = ۱۶/۰\ \Omega$، $C = ۳۱/۲\ \mu\mathrm{F}$، $L = ۹/۲۰\ \mathrm{mH}$ و $\varepsilon = \varepsilon_m \sin\omega_d t$ با $\varepsilon_m = ۴۵/۰\ \mathrm{V}$ و $\omega_d = ۳۰۰۰\ \mathrm{rad/s}$ است. برای زمان $t = ۰/۴۴۲\ \mathrm{ms}$، مطلوب است (الف) آهنگ P_g که با آن انرژی به وسیلهٔ مولد تأمین می‌شود، (ب) آهنگ P_C که با آن انرژی در خازن تغییر می‌کند و (پ) آهنگ P_L که با آن انرژی در القاگر تغییر می‌کند و (ت) آهنگ P_R که با آن انرژی در مقاومت تلف می‌شود. (ث) آیا جمع P_C، P_L و P_R بزرگتر از P_g است یا کوچکتر یا برابر با آن است؟

حل: جریان در مدار از رابطه $i(t) = I\sin(\omega_d t - \phi)$ پیروی می‌کند که در آن

$$I = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^۲ + (\omega_d L - ۱/\omega_d C)^۲}}$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت $I = ۱/۹۳\ A$ و

$$\phi = \tan^{-۱}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) = \tan^{-۱}\left(\frac{\omega_d L - ۱/\omega_d c}{R}\right)$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت $\phi = ۴۶/۵°$

(الف) توان تامین شده توسط مولد برابر است با

$$P_g = i(t)\varepsilon(t) = I\sin(\omega_d t - \phi)\varepsilon_m \sin\omega_d t$$
$$= (۱/۹۳)(۴۵)\sin[(۳۰۰)(۰/۴۴۲) - ۴۶/۵]\ \sin[(۳۰۰۰)(۰/۴۴۲)]$$
$$= ۴۱/۴\ \mathrm{W}$$

(ب) آهنگی که با آن انرژی در خازن تغییر می‌کند برابر است با

$$V_C = X_c i$$

$$U_C = \frac{۱}{۲}CV_C^۲ = \frac{۱}{۲}CX_C^۲ I^۲ \sin^۲(\omega_d t - \phi)$$

$$P_C = -\frac{dU_C}{dt} = -\frac{۱}{۲}CX_C^۲ I^۲\, ۲\,\omega_d \sin(\omega_d t - \phi)\cos(\omega_d t - \phi)$$

$$= -C\frac{۱}{C^۲\omega_d^۲} I^۲ \omega_d \sin(\omega_d t - \phi)\cos(\omega_d - \phi)$$

که پس از جاگذاری مقادیر داده شده خواهیم داشت

$$P_C = -۱۷\ \mathrm{W}$$

(پ) آهنگی که با آن انرژی در القاگر تغییر می‌کند برابر است با

$$U_L = \frac{۱}{۲}Li^۲ = \frac{۱}{۲}LI^۲ \sin^۲(\omega_d t - \phi)$$

$$P_L = -\frac{dU_L}{dt} = LI^۲\omega \sin(\omega_d t - \phi)\cos(\omega_d t - \phi)$$

که پس از جاگذاری مقادیر داده شده خواهیم داشت

$$P_L = ۴۴\ \mathrm{W}$$

(ت) آهنگی که با آن انرژی در مقاومت تلف می‌شود برابر است با

$$P_R = Ri^۲ = RI^۲ \sin^۲(\omega_d t - \phi)$$
$$= (۱۶)(۱/۹۳)^۲ \sin^۲[(۳۰۰۰)(۰/۴۴۲) - ۴۶/۵] = ۱۴/۴\ \mathrm{W}$$

(ث)

$$P_C + P_L + P_R = -۱۷ + ۴۴ + ۱۴/۴ = ۴۱/۴\mathrm{W}$$

که برابر P_g است.

••۵۹- در یک مدار RLC مانند مدار شکل ۲۷-۷، فرض کنید که $R = ۵۰۰\Omega$، $L = ۶۰/۰\ \mathrm{mH}$، $f_d = ۶۰/۰\ \mathrm{Hz}$ و $\varepsilon_m = ۳۰/۰\ \mathrm{V}$ است. برای چه مقدارهایی از ظرفیت، آهنگ متوسط اتلاف انرژی در مقاومت (الف) بیشینه و (ب) کمینه

Scanned by CamScanner

خواهد بود؟ (پ) بیشینهٔ آهنگ اتلاف و (ت) زاویهٔ فاز و (ث) ضریب توان مربوط چقدر است؟ (ج) کمینهٔ آهنگ اتلاف و (چ) زاویهٔ فاز و (ح) ضریب توان مربوط چقدر است؟ SSM

حل:

$$P_{ave} = \varepsilon_{rms} I_{rms} \frac{R}{Z}$$
$$= \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{۲}} \frac{\varepsilon_m/\sqrt{۲}}{\sqrt{R^۲+(X_L-X_C)}} \frac{R}{\sqrt{R^۲+(X_L-X_C)^۲}}$$
$$= \frac{\varepsilon^۲{}_m R}{۲[R^۲+(X_L-X_C)^۲]}$$

(الف) از رابطهٔ بالا در می‌یابیم که بیشترین آهنگ اتلاف انرژی به ازای کمترین مقدار مخرج که از $X_L = X_C$ به دست می‌آید، حاصل می‌شود. این همان شرط تشدید است و بنابراین داریم:

$$L\omega_d = \frac{۱}{c\omega_d} \Rightarrow C = \frac{۱}{L\omega_d^۲} - = \frac{۱}{۴\pi^۲ L f_d^۲}$$
$$C = \frac{۱}{۴\pi^۲(۶۰\times۱۰^{-۳})(۶۰)} = ۱/۱۷\times۱۰^{-۴}\ \text{F}$$

(ب) توان در جایی کمینه است که Z بیشترین مقدار خود را داشته باشد. بدیهی است هر چه اختلاف X_C و X_L بیشتر باشد مخرج بزرگتر می‌شود. بیشترین اختلاف این وقتی است که $X_C \to \infty$ و یا $C \to ۰$ میل کند.

(پ) وقتی $X_L = X_C$ باشد داریم

$$P_{ave} = \frac{\varepsilon_m^۲}{۲R} = \frac{(۳۰)^۲}{۲(۵)} = ۹۰\ \text{W}$$

(ت) در توان بیشینه $X_L = X_C$ است لذا داریم

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = ۰ \qquad \phi = ۰$$

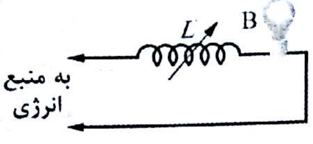
(ث) در توان بیشینه ضریب توان $\cos\phi = \cos ۰ = ۱$ می‌شود.

(ج) کمینه توان میانگین به ازای $X_C \to \infty$ به دست می‌آید و از آنجا $P_{ave} = ۰$ می‌شود.

(چ) چون $\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R}$ است لذا وقتی میل کند $X_C \to \infty$ و در نتیجه $\tan\phi = -\infty$ و در نتیجه می‌شود.

(ح) در توان کمینه، ضریب توان $\cos\phi = \cos(-۹۰°) = ۰$ می‌شود.

••۶۰- یک «کم کنندهٔ نور» نوعی که برای کم کردن نور صحنهٔ تئاتر به کار می‌رود شامل یک القاگر متغیر L است (که القایدگی آن بین صفر و L_{max} قابل تنظیم است) و به طور متوالی مطابق شکل ۲۷-۳۶ به لامپ B بسته شده است. منبع الکتریکی ۱۲۰V(rms) در ۶۰/۰Hz است؛ لامپ در ۱۲۰V و ۱۰۰۰W کار می‌کند. (الف) اگر آهنگ اتلاف انرژی در لامپ با ضریب ۵ از حد بالای ۱۰۰۰W تغییر کند، L_{max} مورد نیاز چقدر است؟ فرض کنید مقاومت لامپ مستقل از دمای آن است. (ب) آیا می‌توان به جای القاگر از مقاومت متغیر (که بین صفر و R_{max} قابل تنظیم است) استفاده کرد؟ در این صورت R_{max} مورد نیاز چقدر است؟ چرا این کار انجام نمی‌گیرد؟



شکل ۲۷-۳۶ مسئلهٔ ۶۰

حل: (الف)

$$P = \frac{V^۲}{R} \Rightarrow ۱۰۰۰ = \frac{(۱۲۰)^۲}{R} \Rightarrow R = ۱۴/۴\Omega$$
$$\overline{P} = \frac{۱۰۰۰}{۵} = ۲۰۰\ \text{W}$$
$$\overline{P} = RI_{rms}^۲ \Rightarrow ۲۰۰ = ۱۴/۴ I_{rms}^۲ \Rightarrow I_{rms} = ۳/۷۳\ \text{A}$$
$$Z = \frac{V_{rms}}{I_{rms}} = \frac{۱۲۰}{۳/۷۳} = ۳۲/۱۷\Omega$$
$$Z = \sqrt{R^۲ + X_L^۲} \Rightarrow ۳۲/۱۷ = \sqrt{(۱۴/۴)^۲ + X_L^۲} \Rightarrow X_L = ۲۸/۷۷\Omega$$
$$X_L = L_{max}\omega_d = L_{max} ۲\pi f_d$$
$$\Rightarrow ۲۸/۷ = L_{max} = ۷۶/۴\times۱۰^{-۳}\ \text{H}$$

(ب) و (پ) اگر بخواهیم از مقاومت استفاده نماییم

$$R_{کل} = R_۱ + R \Rightarrow ۳۲/۱۷ = R_۱ + ۱۴/۴ \Rightarrow R_۱ = ۱۷/۸\Omega$$

(ت) این کار مناسب نیست چون توان اتلافی این مقاومت زیاد است.

••۶۱- در شکل ۲۷-۷، $R = ۱۵/۰\ \Omega$ ، $C = ۴/۷۰\ \mu\text{F}$ و $L = ۲۵/۰\ \text{mH}$ است. مولدی یک emf با ولتاژ rms ‏۷۵/۰V و بسامد ۵۵۰Hz ایجاد می‌کند. (الف) جریان rms چقدر است؟ مطلوب است محاسبه ولتاژ rms در دو سر (ب) R ، (پ) C ، (ت) L ، (ث) C و L با هم و (ج) R ، C و L با هم. با چه آهنگ میانگینی انرژی به وسیلهٔ (چ) R ، (ح) C و (خ) L تلف می‌شود؟

حل:

$$\omega_d = ۲\pi f_d = ۲\pi(۵۵۰) = ۳۴۵۴\ \text{rad/s}$$
$$X_C = \frac{۱}{Cw_d} = \frac{۱}{(۴/۷\times۱۰^{-۶})(۳۴۵۴)} = ۶۱/۶\Omega$$
$$X_L = Lw_d = (۲۵\times۱۰^{-۳})(۳۴۵۴) = ۸۶/۴\Omega$$
$$Z = \sqrt{R^۲ + (X_L - X_C)^۲} = \sqrt{(۱۵)^۲ + (۸۶/۴ - ۶۱/۶)^۲} = ۲۹\Omega$$

(الف)
$$I_{rms} = \frac{\varepsilon_{rms}}{Z} = \frac{۷۵}{۲۹} = ۲/۵۹\ \text{A}$$

(ب)
$$V_R = RI_{rms} = (۱۵)(۲/۵۹) = ۳۸/۸\ \text{V}$$

(پ)
$$V_C = X_C I_{rms} = (۶۱/۶)(۲/۵۹) = ۱۵۹/۵\ \text{V}$$

(ت)
$$V_L = X_L I_{rms} = (۸۶/۴)(۲/۵۹) = ۲۲۳/۷\ \text{V}$$

(ث)
$$V_{L,C} = (X_L - X_C) I_{rms} = (۲۲۳/۷ - ۱۵۹/۵) = ۶۴/۲\ \text{V}$$

(ج)
$$V_Z = \sqrt{V_R^۲ + V_{L,C}^۲} = \sqrt{(۳۸/۸)^۲ + (۶۴/۲)^۲} = ۷۵\ \text{V}$$

Scanned by CamScanner

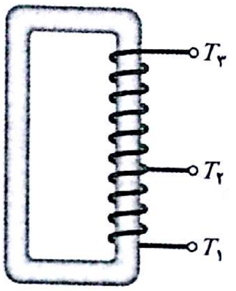
(چ) $P_R = \frac{V_R^۲}{R} = \frac{(۳۸/۸)^۲}{۱۵} = ۹۹/۹\ W$

(ح) هیچ اتلاف انرژی‌ای در خازن وجود ندارد.

(خ) هیچ اتلاف انرژی‌ای در القاگر وجود ندارد.

بخش ۲۷-۱۱ مبدل‌ها

●۶۲- شکل ۲۷-۳۷ یک «مبدل خودکار» را نشان می‌دهد. این مبدل شامل یک تک پیچه (با هستهٔ آهنی) است. سه اتصال T_i در نظر گرفته شده است. بین اتصالهای $T_۱$ و $T_۲$، ۲۰۰ دور و بین $T_۲$ و $T_۳$، ۸۰۰ دور وجود دارند. هر دو اتصال را می‌توان به عنوان پایانهٔ اولیه یا پایانهٔ ثانویه در نظر گرفت. برای ایجاد مبدل افزاینده، (الف) کمترین، (ب) دومین کمترین و (پ) بزرگترین مقدارهای نسبت V_s/V_p چقدرند؟ برای ایجاد مبدل کاهنده، (ت) کمترین، (ث) دومین کمترین و (ج) بیشترین مقدارهای نسبت V_s/V_p چقدرند؟



شکل ۲۷-۳۷ مسئلهٔ ۶۲

حل: (الف) کوچکترین مقدار نسبت V_s/V_p با استفاده از $T_۱T_۳$ به عنوان پایانهٔ اولیه و با استفاده از $T_۲T_۳$ به عنوان پایانهٔ ثانویه پیچه به دست می‌آید:

$$\frac{V_{۱۳}}{V_{۲۳}} = \frac{۸۰۰+۲۰۰}{۸۰۰} = ۱/۲۵$$

(ب) دومین کوچکترین مقدار نسبت V_s/V_p با استفاده از $T_۱T_۲$ به عنوان پایانه اولیه و با استفاده از $T_۲T_۳$ به عنوان پایانهٔ ثانویه پیچه به دست می‌آید.

$$\frac{V_{۲۳}}{V_{۱۲}} = \frac{۸۰۰}{۲۰۰} = ۴/۰$$

(پ) بزرگترین مقدار نسبت V_s/V_p با استفاده از $T_۱T_۲$ به عنوان پایانهٔ اولیه و با استفاده از $T_۱T_۳$ به عنوان ثانویهٔ پیچه به دست می‌آید.

$$\frac{V_{۱۳}}{V_{۱۲}} = \frac{۸۰۰+۲۰۰}{۲۰۰} = ۵/۰$$

برای مبدل کاهنده کافی است که پیچه‌های اولیه و ثانویه را در بالا تعویض کنیم.

(ت) کوچکترین مقدار نسبت V_s/V_p برابر است با

$$\frac{V_{۱۲}}{V_{۱۳}} = \frac{۲۰۰}{۸۰۰+۲۰۰} = ۰/۲$$

(ث) دومین کوچکترین مقدار نسبت V_s/V_p چنین می‌شود.

$$\frac{V_{۱۲}}{V_{۲۳}} = \frac{۲۰۰}{۸۰۰} = ۰/۲۵$$

(ج) بزرگترین مقدار نسبت V_s/V_p برابر است با

$$\frac{V_{۲۳}}{V_{۱۳}} = \frac{۸۰۰}{۸۰۰+۲۰۰} = ۰/۸$$

●۶۳- مبدلی دارای اولیهٔ ۵۰۰ دور و ثانویهٔ ۱۰ دور است. (الف) اگر V_P برابر ۱۲۰V (rms) باشد، با فرض باز بودن مدار، V_s چقدر است؟ (ب) حال اگر ثانویه به بار مقاومتی ۱۵Ω بسته شود، جریانها در اولیه و ثانویه چقدرند؟ SSM ILW

حل: (الف)

$$V_s = V_p\left(\frac{N_s}{N_p}\right) = (۱۲۰)\left(\frac{۱۰}{۵۰۰}\right) = ۲/۴\ V$$

(ب) و (پ) طبق قانون اهم، جریان در ثانویه برابر است با

$$I_s = \frac{V_s}{R_s} = \frac{۲/۴}{۱۵} = ۰/۱۶\ A$$

و برای جریان اولیه داریم

$$I_p = I\left(\frac{N_s}{N_p}\right) = (۱۰۰)\left(\frac{۱۰}{۵۰۰}\right) = ۳/۲\times۱۰^{-۳}\ A$$

●۶۴- مولدی ۱۰۰V را برای پیچهٔ اولیهٔ یک مبدل ۵۰ دور تأمین می‌کند. اگر پیچهٔ ثانویه دارای ۵۰۰ دور باشد، ولتاژ ثانویه چقدر است؟

حل:

$$V_s = V_p\left(\frac{N_s}{N_p}\right) = (۱۰۰)\left(\frac{۵۰۰}{۵۰}\right) = ۱۰۰$$

●۶۵- یک مولد ac برای بار مقاومتی در کارخانهٔ دوری به وسیلهٔ دو کابل خط انتقال emf را فراهم می‌کند. در کارخانه یک مبدل کاهنده ولتاژ را از مقدار انتقالی V_t(rms) به مقدار خیلی کمتری کاهش می‌دهد تا برای کار در کارخانه ایمن و راحت باشد. مقاومت خط انتقال ۰/۳۰Ω برای هر کابل و توان مولد ۲۵۰kW است. اگر $V_t = ۸۰kV$ باشد، (الف) کاهش ولتاژ ΔV در خط انتقال و (ب) آهنگ P_d اتلاف انرژی به صورت گرمایی چقدرند؟ اگر $V_t = ۸/۰kV$ باشد، (پ) ΔV و (ت) P_d چقدرند؟ اگر $V_t = ۰/۸۰kV$ باشد، (ث) ΔV و (ج) P_d چقدرند؟

حل: (الف) جریان rms در هر کابل برابر است با

$$I_{rms} = \frac{P}{V_t} = \frac{۲۵۰\times۱۰^۳}{۸۰\times۱۰^۳} = ۳/۱۲۵\ A$$

در نتیجه ولتاژ rms که در دو کابل افت می‌کند برابر است با

$$\Delta V = I_{rms}(۲R) = (۳/۱۲۵)(۲)(۰/۳) = ۱/۸۸\ V$$

(ب)

$$P_d = RI_{rms}^۲ = (۰/۶)(۳/۱۲۵)^۲ = ۵/۸۶\ W$$

(پ)

$$I_{rms} = \frac{۲۵۰\times۱۰^۳}{۸\times۱۰^۳} = ۳۱/۲۵\ A$$

از آنجا برای افت ولتاژ rms داریم

$$\Delta V = (۳/۱۲۵)(۰/۶) = ۱۸/۸\ V$$

Scanned by CamScanner

$$P_d = (۳/۱۲۵)^۲(۰/۶) = ۵/۸۶\times۱۰^۲ \ \text{W}$$

(ت)

$$I_{rms} = \frac{۲۵۰\times۱۰^۳}{۰/۸\times۱۰^۳} = ۳۱۲/۵ \ \text{A}$$

(ث)

$$\Delta V = (۳۱۲/۵)(۰/۶) = ۱۸۸ \ \text{V}$$

$$P_d = (۳۱۲/۵)^۲(۰/۶) = ۵/۸۶\times۱۰^۴ \ \text{W}$$

(ج)

مسئله‌های اضافی

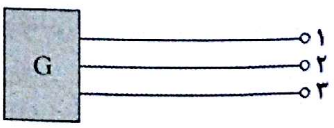
۶۶- یک موتور الکتریکی به خروجی ac ، ۱۲۰ V و ۶۰/۰Hz وصل شده است و با آهنگ ۰/۱۰۰hp (۱hp = ۷۴۶W) کار مکانیکی انجام می‌دهد. (الف) اگر موتور یک جریان rms ، برابر ۰/۶۵۰A بکشد، مقاومت مؤثر آن نسبت به توان انتقالی چقدر است؟ (ب) آیا این مقاومت با مقاومت پیچهٔ موتور در وقتی که موتور از خروجی جدا شده و به وسیلهٔ اهم‌سنج اندازه‌گیری شود، برابر است؟

حل: (الف) مقاومت مؤثر R_{eff} در $I_{rms}^۲ R_{eff} = P_{mec}$ صدق می‌کند و بنابراین داریم

$$R_{eff} = \frac{P_{mec}}{I_{rms}^۲} = \frac{(۰/۱۰۰hp)(۷۴۶\ \text{W/hp})}{(۰/۶۵۰\text{A})^۲} = ۱۷۶/۶\Omega$$

(ب) نه؛ این همان مقاومت پیچهٔ موتور نیست، بلکه مقاومت مؤثری برای انتقال توان از شکل الکتریکی به مکانیکی است. در واقع $I_{rms}^۲ R$ برابر با P_{mec} نیست، بلکه برابر با آهنگ اتلاف انرژی ناشی از اتلاف گرمایی است.

۶۷• در شکل ۲۷-۳۸ مولد سه فاز G توان الکتریکی‌ای ایجاد می‌کند که به وسیلهٔ سه سیم انتقال می‌یابد. پتانسیلهای الکتریکی این سیمها (نسبت به سطح مرجع مشترک) عبارت‌اند از $V_۱ = A\sin\omega_d t$ برای سیم ۱، $V_۲ = A\sin(\omega_d t - ۱۲۰°)$ برای سیم۲ و $V_۳ = A\sin(\omega_d t - ۲۴۰°)$ برای سیم ۳. برخی از انواع وسایل صنعتی (برای مثال، موتورها) دارای سه پایانه هستند و چنان طراحی می‌شوند که به طور مستقیم به این سه سیم متصل شوند. برای به کاربردن وسیلهٔ معمولتر دو پایانه‌ای (برای مثال، لامپ)، آن را به هر دو تا از سه سیم وصل می‌کنند. نشان دهید که اختلاف پتانسیل بین هر *دو تا* از سه سیم (الف) به طور سینوسی با بسامد زاویه‌ای ω_d نوسان می‌کند و (ب) دارای دامنهٔ $A\sqrt{۳}$ است. SSM



خط انتقال با سه سیم

شکل ۲۷-۳۸ مسئلهٔ ۶۷

حل: (الف) سه ترکیب $\Delta V_{۱۲} = V_۱ - V_۲$ ، $\Delta V_{۱۳} = V_۱ - V_۳$ و $\Delta V_{۲۳} = V_۲ - V_۳$ را در نظر می‌گیریم. برای $\Delta V_{۱۲}$ داریم

$$\Delta V_{۱۲} = A\sin(\omega_d t) - A\sin(\omega_d t - ۱۲۰°)$$

که برای محاسبهٔ آن از اتحاد مثلثاتی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sin\alpha - \sin\beta = ۲\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{۲}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{۲}\right)$$

در نتیجه داریم:

$$\Delta V_{۱۲} = ۲A\sin\left(\frac{۱۲۰°}{۲}\right)\cos\left(\frac{۲\omega_d t - ۱۲۰°}{۲}\right)$$
$$= \sqrt{۳}A\cos(\omega_d t - ۶۰°)$$

به همان ترتیب داریم:

$$\Delta V_{۱۳} = A\sin(\omega_d t) - A\sin(\omega_d t - ۲۴۰°)$$
$$= ۲A\sin\left(\frac{۲۴۰°}{۲}\right)\cos\left(\frac{۲\omega_d t - ۲۴۰°}{۲}\right)$$
$$= \sqrt{۳}A\cos(\omega_d t - ۱۲۰°)$$

و

$$\Delta V_{۲۳} = A\sin(\omega_d t - ۱۲۰°) - A\sin(\omega_d t - ۲۴۰°)$$
$$= ۲A\sin\left(\frac{۱۲۰°}{۲}\right)\cos\left(\frac{۲\omega_d t - ۳۶۰°}{۲}\right)$$
$$= \sqrt{۳}A\cos(\omega_d t - ۱۸۰°)$$

هر سه این عبارت‌ها،تابع‌هایی سینوسی از t با بسامد زاویه‌ای ω_d هستند.

(ب) همان طور که دیدیم دامنهٔ هر سه عبارت برابر $\sqrt{۳}A$ است.

۶۸- یک خازن ۱/۵۰μF دارای واکنایی خازنی ۱۲/۰Ω است. (الف) بسامد عملیاتی آن باید چقدر باشد؟ (ب) اگر بسامد دو برابر شود، واکنایی خازنی چقدر خواهد بود؟

حل: (الف)

$$X_C = \frac{۱}{C\omega} = \frac{۱}{C۲\pi f_d} \Rightarrow f_d = \frac{۱}{C۲\pi X_C}$$

$$f_d = \frac{۱}{(۲\pi)(۱/۵\times۱۰^{-۶})(۱۲)} = ۸۸۴۶\text{Hz}$$

(ب) اگر بسامد دو برابر شود، راکتانس نصف می‌گردد.

$$X_C = ۶\Omega$$

۶۹- برای یک مدار *RLC* متوالی معین، بیشینهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی مولد برابر ۱۲۵V و بیشینهٔ جریان برابر ۳/۲۰A است. اگر جریان به مقدار ۰/۹۸۲rad از نیروی محرکهٔ الکتریکی مولد جلو باشد، (الف) مقاومت ظاهری و (ب) مقاومت مدار چقدر است؟ (پ) آیا مدار بیشتر خازنی است یا القایی؟

حل: (الف) نیروها دافعه‌اند و شرط لازم خواهد بود

$$Z = \frac{V_m}{i_m} = \frac{(۱۲۵)}{(۳/۲۰)} = ۳۹/۱\ \Omega$$

(ب)

$$\varphi = ۰/۹۸۲\text{rad} = ۵۶/۳°$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} \Rightarrow \cos ۵۶/۳ = \frac{R}{۳۹/۱}$$

$$R = ۲۱/۷\Omega$$

Scanned by CamScanner

(پ) چون جریان نسبت به ولتاژ جلوتر است (تقدم فاز دارد) مدار خازنی است.

۷۰- یک مدار LC نوسانی دارای القایدگی $۳/۰۰\text{mH}$ و ظرفیت $۱۰/۰\mu\text{F}$ است. مطلوب است محاسبهٔ (الف) بسامد زاویه‌ای و (ب) دورهٔ تناوب نوسان. (پ) در زمان $t=۰$ خازن تا $۲۰۰\mu\text{F}$ باردار می‌شود و جریان صفر است. بار روی خازن را به طور تقریب برحسب تابعی از زمان رسم کنید.

حل: (الف)

$$\omega=\frac{۱}{\sqrt{LC}}=\frac{۱}{\sqrt{(۳\times۱۰^{-۳})(۱۰\times۱۰^{-۶})}}$$

$$=۵۷۷۳/۵\ \text{rad/s}$$

(ب)

$$T=\frac{۲\pi}{\omega}=\frac{۲\pi}{(۵۷۷۳/۵)}=۱/۱\times۱۰^{-۳}\ \text{s}$$

(پ)

$$q=q_m\cos(\omega t+\theta_۰)$$

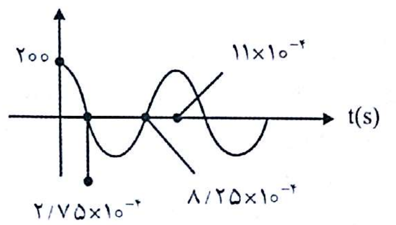
$$I=\frac{dq}{dt}=-q_m\omega\sin(\omega t+\theta_۰)$$

جریان در $t=۰$ صفر است، پس

$$\theta_۰=۰$$

$$q_m=۲۰۰\mu\text{C}$$

$$q=۲۰۰\cos ۵۷۷۳/۵\,t\ \ \mu\text{C}$$



۷۱- در یک مدار RLC متوالی معین که در بسامد $۶۰/۰\text{Hz}$ کار می‌کند بیشینهٔ ولتاژ دو سر القاگر $۲/۰۰$ برابر بیشینهٔ ولتاژ در دو سر مقاومت و $۲/۰۰$ برابر بیشینهٔ ولتاژ دو سرخازن است. (الف) جریان از نیروی محرکهٔ الکتریکی مولد چه زاویه‌ای عقب می‌افتد؟ (ب) اگر بیشینهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی مولد برابر $۳۰/۰\text{V}$ باشد، مقاومت مدار باید چه مقدار باشد تا بیشینهٔ جریان ۳۰۰mA به دست آید؟

حل: (الف) ثابت فاز با استفاده از $\tan\phi=(X_L-X_C)/R$ به دست می‌آید. با توجه به اینکه

$$V_L=۲V_R\Rightarrow IX_L=۲IR\Rightarrow X_L=۲R$$

و

$$V_L=۲X_C\Rightarrow IX_L=۲IX_C\Rightarrow X_L=۲X_C$$

و از آنجا $X_C=R$ می‌شود. در نتیجه

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{۲R-R}{R}\right)=\tan^{-1}(۱/۰۰)=۴۵/۰^\circ$$

(ب) $I=I=\varepsilon_m/Z$ است که در آن

$$Z=\sqrt{R^۲+(X_L-X_C)^۲}=\sqrt{R^۲+(۲R-R)^۲}=\sqrt{۲}R$$

در نتیجه داریم

$$R=\frac{\varepsilon_m}{\sqrt{۲}I}=\frac{۳۰/۰}{\sqrt{۲}(۳۰۰\times۱۰^{-۳})}=۷۰/۷۱\,\Omega$$

۷۲- چه ظرفیتی باید به دوسر یک القاگر $۱/۳۰\text{mH}$ بسته شود تا نوسانگر حاصل در $۳/۵۰\text{kHz}$ به حالت تشدید درآید؟

حل: با استفاده از $\omega=۲\pi f=۱/\sqrt{LC}$ داریم

$$C=\frac{۱}{۴\pi^۲f^۲C}=\frac{۱}{۴\pi^۲(۳/۵۰\times۱۰^۳)^۲(۱/۳۰\times۱۰^{-۳})}$$

$$=۱/۵۹\mu\text{F}$$

۷۳- یک مدار LC در بسامد $۱۰/۴\text{kHz}$ نوسان می‌کند. (الف) اگر ظرفیت $۳۴۰\mu\text{F}$ باشد، القایدگی چقدر است؟ (ب) اگر بیشینهٔ جریان برابر $۷/۲۰\text{mA}$ باشد، انرژی کل در مدار چقدر است؟ (پ) بار بیشینه روی خازن چقدر است؟

حل: (الف) $\omega=۲\pi f=۱/\sqrt{LC}$ را برای L حل می‌کنیم

$$L=\frac{۱}{۴\pi^۲f^۲C}=\frac{۱}{۴\pi^۲(۱۰/۴\times۱۰^۳)^۲(۳۴۰\times۱۰^{-۶})}$$

$$=۶/۸۹\times۱۰^{-۷}\ \text{H}$$

(ب) انرژی کل را می‌توان هنگامی که جریان بیشینه است با استفاده از القاگر به دست آورد

$$U=\frac{۱}{۲}LI^۲=\frac{۱}{۲}(۶/۸۹\times۱۰^{-۷})(۷/۲۰\times۱۰^{-۳})^۲$$

$$=۱/۷۹\times۱۰^{-۱۱}\ \text{J}$$

(پ) Q را با استفاده از $U=Q^۲/۲C$ به دست می‌آوریم

$$Q=\sqrt{۲CU}=\sqrt{۲(۳۴۰\times۱۰^{-۶})(۱/۷۹\times۱۰^{-۱۱})}$$

$$=۱/۱۰\times۱۰^{-۷}\ \text{C}$$

۷۴- یک مدار RLC متوالی دارای بسامد تشدید $۶/۰۰\text{kHz}$ است. وقتی مدار در $۸/۰۰\text{kHz}$ به کار افتد، دارای مقاومت ظاهری $۱/۰۰\text{k}\Omega$ و ثابت فاز ۴۵° است. (الف) R، (ب) L و (پ) C برای این مدار چقدرند؟

حل: (الف) از معادله مربوطه به فاز ثابت می‌توان نوشت

$$R=Z\cos\phi=(۱/۰۰\times۰^۳)(\cos۴۵^\circ)=۷۰۷/۱\ \Omega$$

(ب) چون $f=۸۰۰۰\text{Hz}$ است، $\omega_d=۲\pi(۸۰۰۰)\text{rad/s}$ می‌شود. از $\tan\phi=(X_L-X_C)/R$ نتیجه می‌گیریم که چون $\phi=۴۵^\circ$ است، واکنایی خالص برابر با مقاومت می‌شود:

$$X_L-X_C=\omega_dL-\frac{۱}{\omega_dC}=۷۰۷/۱\Omega$$

از طرفی بسامد تشدید را نیز می‌دانیم که برابر ۶۰۰۰Hz است. چون $\omega=۱/\sqrt{LC}$ است، از آنجا $C=۱/(۲\pi\times۶۰۰۰)^۲L$ می‌شود. با قرار دادن این C در رابطهٔ واکنایی خالص، L پس از کمی عملیات جبری ساده برابر $L=۳۲/۱۷\text{mH}$ می‌شود.

(پ) حال با قرار دادن L در رابطهٔ C به سادگی به $C=۲۱/۸۹\text{nF}$ می‌رسیم.

Scanned by CamScanner

۷۵- خازنی با ظرفیت $۱۵۸\mu F$ و یک القاگر تشکیل مدار LC را می‌دهند که با دامنهٔ جریان $۴/۲۱\text{mA}$ در $۸/۱۵\ \text{kHz}$ نوسان می‌کند. (الف) القاییدگی، (ب) انرژی کل در مدار و (پ) بار بیشینهٔ روی خازن چقدرند؟

حل: (الف) با استفاده از $\omega = ۱/\sqrt{LC}$ برای L خواهیم داشت:

$$L = \frac{۱}{\omega^۲ C} = \frac{۱}{(۲\pi f)^۲ C} = \frac{۱}{۴\pi^۲ f^۲ C}$$

$$= \frac{۱}{۴\pi^۲ (۸/۱۵ \times ۱۰^۳)^۲ (۱۵۸ \times ۱۰^{-۶})} = ۲/۴۱\ \mu\text{H}$$

(ب) انرژی کل برابر با انرژی بیشینه در هر یک از دو عنصر القاگر یا خازن است. (شکل ۲۷-۴) کتاب را ببینید). بنابراین با استفاده از انرژی بیشینهٔ القاگر داریم

$$U_{\max} = \frac{۱}{۲} L I^۲ = \frac{۱}{۲} (۲/۴۱ \times ۱۰^{-۶})(۴/۲۱ \times ۱۰^{-۳})^۲$$
$$= ۲۱/۳۹\ \text{pJ}$$

(پ) همان‌طور که گفتیم انرژی بیشینهٔ خازن و القاگر با هم برابرند و بنابراین نتیجهٔ بالا می‌توانیم با $Q^۲/۲C$ برابر قرار دهیم و از آنجا Q را به دست آوریم:

$$Q = \sqrt{۲CU_{\max}} = \sqrt{۲(۱۵۸ \times ۱۰^{-۶})(۲۱/۳۹ \times ۱۰^{-۱۲})}$$
$$= ۸۲/۲۱\text{nC}$$

۷۶- یک مدار RLC متوالی به گونه‌ای به کار می‌افتد که ولتاژ بیشینهٔ دو سر القاگر $۱/۵۰$ برابر ولتاژ بیشینهٔ دوسر خازن و ۲ برابر ولتاژ بیشینهٔ دوسر مقاومت است. (الف) ϕ برای مدار چقدر است؟ (ب) آیا مدار القایی است یا خازنی یا در تشدید است؟ مقاومت برابر $۴۹/۹\ \Omega$ و دامنهٔ جریان برابر ۲۰۰mA است. (پ) دامنهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی چقدر است؟

حل: (الف) از معادلهٔ ۲۷-۶۵ داریم

$$\phi = \tan^{-۱}\left(\frac{V_L - V_C}{V_R}\right) = \tan^{-۱}\left(\frac{V_L - (V_L/۱/۵۰)}{(V_L/۲/۰۰)}\right)$$

$$= \tan^{-۱}\frac{۲}{۳} = ۳۳/۷^\circ \quad \text{یا} \quad ۰/۵۸۸\ \text{rad}$$

(ب) چون $\phi > ۰$ است نتیجه می‌گیریم که $X_L > X_C$ و در نتیجه مدار القایی است.

(پ) داریم $V_R = IR = (۲۰۰ \times ۱۰^{-۳})(۴۹/۹) = ۹/۹۸\text{V}$ و بنابراین V_L و V_C به ترتیب چنین می‌شوند:

$$V_L = ۲/۰۰ V_R = ۱۹/۹۸\text{V} \quad \text{و} \quad V_C = V_L/۱/۵۰ = ۱۳/۳\text{V}$$

بنابراین با استفاده از معادلهٔ ۲۷-۶۰ خواهیم داشت

$$? = \sqrt{V_R^۲ + (V_L - V_C)^۲}$$
$$= \sqrt{(۹/۹۸)^۲ + (۱۹/۹۸ - ۱۳/۳)^۲} = ۱۲/۰\ \text{V}$$

۷۷- یک مدار RLC به وسیلهٔ مولدی با دامنهٔ emf برابر $۸۰/۰\text{V}$ و دامنهٔ جریان $۱/۲۵\text{A}$ به کار می‌افتد. جریان به مقدار $۰/۶۵۰\ \text{rad}$ از emf جلوتر است. (الف) مقاومت ظاهری و (ب) مقاومت مدار چقدرند؟ (پ) آیا مدار القایی است یا خازنی یا در تشدید است؟

حل: (الف) مقاومت ظاهری برابر است با

$$Z = \varepsilon_m / I = (۸۰/۰)/(۱/۲۵) = ۶۴/۰\Omega$$

(ب) با استفاده از $\cos\phi = R/Z$، مقاومت R را به دست می‌آوریم

$$R = Z\cos\phi = (۶۴/۰\Omega)\cos(۰/۶۵۰\ \text{rad}) = ۵۰/۹\Omega$$

(پ) چون جریان از نیروی محرکهٔ جلو می‌افتد، نتیجه می‌گیریم که مدار خازنی است.

۷۸- القاگر $۴۵/۰\text{mH}$ دارای واکنایی $۱/۳۰\text{k}\Omega$ است. (الف) بسامد کاری آن چقدر است؟ (ب) با واکنایی یکسان در آن بسامد، ظرفیت خازن چقدر است؟ اگر بسامد دو برابر شود، واکنایی جدید (پ) القایی و (ت) خازنی چقدر است؟

حل: (الف) با استفاده از $X_L = ۱/\omega_d C = ۱/۲\pi f_d C$ ، بسامد f_d را به دست می‌آوریم.

$$f_d = \frac{X_L}{۲\pi L} = \frac{۱/۳۰ \times ۱۰^۳}{۲\pi(۴۵/۰ \times ۱۰^{-۳})} ۴/۶۰ \times ۱۰^۳\ \text{Hz}$$

(ب) ظرفیت با استفاده از $X_C = ۱/\omega_d C = ۱/۲\pi f_d C$ به دست می‌آید. با توجه به اینکه در اینجا $X_C = X_L$ است،خواهیم داشت:

$$C = \frac{۱}{۲\pi f_d X_L} = \frac{۱}{۲\pi(۴۵/۰ \times ۱۰^۳)(۱/۳۰ \times ۱۰^۳)}$$
$$= ۲۶/۶۲\ \text{nF}$$

(پ) و (ت) توجه کنید که $X_L \propto f_d$ و $X_C \propto ۱/f_d$ است. بنابراین اگر f_d دو برابر شود، X_L دو برابر و X_C نصف می‌شود. بنابراین به ترتیب داریم

$$X'_L = ۲(X_L) = ۲(۱/۳۰ \times ۱۰^۳\ \Omega) = ۲/۶۰ \times ۱۰^۳\ \Omega$$
$$X'_C = X_C/۲ = (۱/۳۰ \times ۱۰^۳\ \Omega)/۲ = ۶/۵۰ \times ۱۰^۲\ \Omega$$

۷۹- مولدی با بسامد ۳۰۰۰Hz یک مدار RLC متوالی را با emf برابر ۱۲۰V به کار می‌اندازد. مقاومت برابر $۴۰/۰\Omega$، ظرفیت برابر $۱/۶۰\mu\text{F}$ و القاییدگی برابر $۸۵۰\mu\text{H}$ است. (الف) ثابت فاز برحسب رادیان و (ب) دامنهٔ جریان چقدرند؟ (پ) آیا مدار خازنی است یا القایی یا در تشدید است؟

حل:

$$\omega_d = ۲\pi f_d = (۲)(۳/۱۴)(۳۰۰۰) = ۱/۸۸ \times ۱۰^۴\ \text{rad/s}$$

$$X_C = \frac{۱}{C\omega_d} = \frac{۱}{(۱/۶۰ \times ۱۰^{-۶})(۱/۸۸ \times ۱۰^۴)} = ۳۳/۲\Omega$$

$$X_L = L\omega = (۸۵۰ \times ۱۰^{-۶})(۱/۸۸ \times ۱۰^۴) = ۱۶\Omega$$

(الف)

$$\tan\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{(۱۶ - ۳۳/۲)}{(۴۰)} = -۰/۴۳$$

$$\varphi = -۲۳/۳^\circ \quad \text{یا} \quad -۰/۴۰۶\ \text{rad}$$

Scanned by CamScanner

(ب)

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} \Rightarrow ۰/۹۸ = \frac{(۴۰)}{Z}$$

$$Z = ۴۳/۶\Omega$$

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{Z} = \frac{(۱۲۰)}{(۴۳/۶)} = ۲/۷۵\text{A}$$

(پ) چون $X_C > X_L$ می‌باشد. مدار خازنی است. (φ منفی می‌باشد.)

۸۰- یک القاگر $۱/۵۰\text{mH}$ در یک مدار LC نوسانی انرژی بیشینهٔ $۱۰/۰\mu J$ را ذخیره می‌کند. جریان بیشینه چقدر است؟

حل: با استفاده از $U_{\max} = \frac{۱}{۲}LI^۲$ داریم

$$I = \sqrt{\frac{۲U_{\max}}{L}} = \sqrt{\frac{۲(۱۰/۰\times ۱۰^{-۶})}{۱/۵۰\times ۱۰^{-۳}}} = ۰/۱۱۵\text{A}$$

۸۱- مولدی با بسامد نوسانی قابل تنظیم به طور متوالی به یک القاگر $L=۲/۵۰\mu\text{F}$ و یک خازن $C=۳/۰۰\mu\text{F}$ بسته شده است. در چه بسامدی مولد بزرگترین دامنهٔ جریان ممکن را در مدار ایجاد می‌کند؟

حل: بیشترین دامنهٔ جریان به ازای برابری واکنایی القایی و خازنی (حالت تشدید) به دست می‌آید. بنابراین

$$\omega_d = \frac{۱}{\sqrt{LC}} = \frac{۱}{\sqrt{(۲/۵۰^{-۳})(۳/۰۰\times ۱۰^{-۶})}}$$
$$= ۱/۱۵\times ۱۰^۴ \text{ rad/s}$$

و از آنجا

$$f_d = \frac{\omega_d}{۲\pi} = \frac{۱/۱۵\times ۱۰^۴}{۲\pi} = ۱/۸۴\text{kHz}$$

۸۲- یک مدار RLC متوالی به وسیلهٔ یک منبع متناوب با بسامد ۴۰۰Hz و دامنهٔ emf، $۹۰/۰\text{ V}$ به کار می‌افتد. مقاومت $۲۰/۰\Omega$، ظرفیت $۱۲/۱\mu\text{F}$ و القایندگی $۲۴/۲\text{mH}$ است. اختلاف پتانسیل rms دو سر (الف) مقاومت، (ب) خازن و (پ) القاگر چقدر است؟ (ت) آهنگ متوسطی که با آن انرژی تلف می‌شود چقدر است؟

حل: (الف) $V_{R,\text{rms}} = I_{\text{rms}}R$ و $I_{\text{rms}} = \varepsilon_{\text{rms}}/Z$ است. پس برای محاسبهٔ $V_{R,\text{rms}}$ به مقاومت ظاهری $Z = \sqrt{R^۲ + (X_L - X_C)^۲}$ نیاز داریم. برای X_L و X_C به ترتیب داریم:

$$X_L = ۲\pi f_d L = ۲\pi(۴۰۰)(۲۴/۲\times ۱۰^{-۳}) = ۶۰/۸۲\Omega$$

$$X_C = (۲\pi f_d C)^{-۱} = ۲\pi(۴۰۰)(۲۴/۲\times ۱۰^{-۳}) = ۶۰/۸۲\Omega$$

و از آنجا

$$Z = \sqrt{(۲۰/۰)^۲ + (۶۰/۸۲ - ۳۲/۸۸)^۲} = ۳۴/۳۶\Omega$$

بنابراین I_{rms} چنین می‌شود

$$I_{\text{rms}} = \frac{\varepsilon_m/\sqrt{۲}}{Z} = \frac{۹۰/۰\text{ V}}{\sqrt{۲}(۳۴/۳۶)} = ۱/۸۵\text{A}$$

و از آنجا $V_{R,\text{rms}}$ به دست می‌آید

$$V_{R,\text{rms}} = I_{\text{rms}}R = (۱/۸۵\text{A})(۲۰/۰) = ۳۷/۰۴\text{ V}$$

(ب) با استفاده از $X_C = ۳۲/۸۸\Omega$ و $I_{\text{rms}} = ۱/۸۵\text{A}$ خواهیم داشت

$$V_{C,\text{rms}} = I_{\text{rms}}X_C = (۱/۸۵)(۳۲/۸۸) = ۶۰/۹\text{ V}$$

(پ) با استفاده از $X_L = ۶۰/۸۲\Omega$ و $I_{\text{rms}} = ۱/۸۵\text{A}$ خواهیم داشت

$$V_{L,\text{rms}} = I_{\text{rms}}X_L = (۱/۸۵)^۲(۶۰/۸۲) = ۱۱۲/۷\text{V}$$

(ت) آهنگ میانگین اتلاف انرژی برابر است با

$$P_{\text{avg}} = (I_{\text{rms}})^۲R = (۱/۸۵)^۲(۲۰/۰) = ۶۸/۶\text{W}$$

۸۳- (الف) در یک مدار LC نوسانی، وقتی انرژی میدان الکتریکی ۵۰٪ انرژی میدان مغناطیسی است مقدار بار روی خازن برحسب بار بیشینهٔ روی آن چقدر است؟ (ب) پس از زمانی که خازن کاملاً پرشد چه کسری از زمان تناوب باید بگذرد تا این شرط ایجاد شود؟

حل: (الف) در هر لحظه، انرژی کل U مدار برابر با مجموع انرژی U_E خازن و انرژی U_B القاگر است. وقتی $U_E = ۰/۵۰۰U_B$ و در نتیجه $U_B = ۲U_E$ است، $U = U_E + U_B = ۳/۰۰U_E$ می‌شود. انرژی U_E در هر لحظه برابر با $q^۲/۲C$ است، ولی انرژی کل مدار را می‌توان با $Q^۲/۲C$ نشان داد که در آن Q بیشینهٔ بار روی خازن است. بنابراین داریم:

$$\frac{Q^۲}{۲C} = ۳/۰۰\frac{q^۲}{۲C} \Rightarrow q = \frac{Q}{\sqrt{۳/۰۰}} = ۰/۵۷۷Q$$

(ب) اگر خازن در $t=۰$ کاملاً باردار باشد، بار وابسته به زمان آن با $q = Q\cos\omega t$ داده می‌شود که در اینجا $q = ۰/۵۷۷Q$ است. از آنجا $\cos\omega t = ۰/۵۷۷$ و در نتیجه $\omega t = ۰/۹۵۵\,rad$ می‌شود. چون $\omega = ۲\pi/T$ است برای t خواهیم داشت:

$$t = \frac{۰/۹۵۵T}{۲\pi} = ۰/۱۵۲T \Rightarrow \frac{t}{T} = ۰/۱۵۲$$

۸۴- یک موتور الکتریکی معین وقتی تحت بار است و در ولتاژ rms برابر ۲۲۰V کار می‌کند جریان rms، $۳/۰۰\text{A}$ را می‌کشد. موتور دارای مقاومت $۲۴/۰\Omega$ است و واکنایی خازنی ندارد. واکنایی القایی موتور چقدر است؟

حل: $X_C = ۰$ است لذا داریم

$$I = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^۲ + X_L^۲}}$$

و از آنجا

$$X_L = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_m}{I}\right)^۲ - R^۲} = \sqrt{\left(\frac{۲۲۰V}{۳/۰۰A}\right)^۲ - (۲۴/۰\Omega)^۲} = ۶۹/۲۹\Omega$$

۸۵- برای یک مدار RLC متوالی با محرک سینوسی نشان دهید که در یک چرخهٔ کامل با دورهٔ تناوب T، (الف) انرژی ذخیره شده در خازن تغییر نمی‌کند؛ (ب) انرژی ذخیره شده در القاگر تغییر نمی‌کند؛ (پ) نیروی محرکهٔ الکتریکی انرژی $(\frac{۱}{۲}T)\varepsilon_m I\cos\phi$ را تولید می‌کند؛ (ت) مقاومت مقدار انرژی

Scanned by CamScanner

$RI^2(\frac{1}{2}T)$ را تلف می‌کند. (ث) نشان دهید کمیتهایی که در (پ) و (ت) به دست آورده‌اید مساوی‌اند.

حل: (الف)

$$\varepsilon = \varepsilon_m \sin\omega t,\ i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$$

$$V_C = X_C i = X_C I_m \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$U_C = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}CX_C^2 I_m^2 \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$t = 0 \Rightarrow U_C(0) = \frac{1}{2}CX_C^2 I_m^2 \sin\left(-\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$t = T \Rightarrow U_C(T) = \frac{1}{2}CX_C^2 I_m^2\left(\frac{2\pi}{T}T - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}CX_C^2 I_m^2 \sin\left(-\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$U_C(T) = U_C(0)$$

پس انرژی خازن نیز دارای دورهٔ T می‌باشد.

(ب)

$$U_L = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}LI_m^2 \sin^2\left(\frac{2\pi t}{2} - \varphi\right)$$

$$U_L(0) = \frac{1}{2}LI_m^2 \sin^2(-\varphi)$$

$$U_L(T) = \frac{1}{2}LI_m^2 \sin^2(2\pi - \varphi) = \frac{1}{2}LI_m^2 \sin^2(-\varphi)$$

$$U_C(T) = W_L(0)$$

(پ) انرژی ایجاد شده در مولد در مدت زمان dt برابر ایت با:

$$dU_E = \varepsilon i dt = \varepsilon_m \sin\omega t\, I_m \sin(\omega t - \varphi)dt$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A=B)]$$

$$dU_E = \frac{1}{2}I_m\varepsilon_m[\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi)]dt$$

$$dU_E = \frac{1}{2}I_m\varepsilon_m \int_0^T [\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi)]dt$$

$$= \frac{1}{2}I_m\varepsilon_m\left\{T\cos\varphi - \frac{1}{2\omega}[\sin(2\omega t - \varphi)]\Big|_0^T\right\}$$

$$= \frac{1}{2}TI_m\varepsilon_m\cos\varphi$$

(ت) انرژی مصرف شده در مقاومت در زمان dt برابر است با:

$$dU = Ri^2 dt = RI_m^2 \sin^2(\omega t - \varphi)dt$$

$$U_R = RI_m^2 \int_0^T \sin^2(\omega t - \varphi)dt =$$

$$RI_m^2\left\{\frac{1}{2}\int_0^T\left[1 - \cos 2\left(\frac{2\pi}{T} - \varphi\right)\right]dt\right\} = \frac{1}{2}TRI_m^2$$

(ث)

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z}$$

از قسمت (پ) داریم:

$$U_E = \frac{T}{2}I_m\varepsilon_m\cos\varphi = \frac{T}{2}I_m Z I_m \frac{R}{Z} = \frac{1}{2}TI_m^2 R$$

که همان نتیجهٔ قسمت (ت) است.

۸۶- وقتی مولد emf در مسئلهٔ نمونهٔ ۲۷-۷ بیشینه است، ولتاژ دو سر (الف) مولد ، (ب) مقاومت، (پ) خازن و (ت) القاگر چقدر است؟ (ث) با جمع اینها با علامتهای مناسب نشان دهید که قاعدهٔ حلقه برقرار است.

حل: (الف) بیشینهٔ دو سر مولد $\varepsilon_m = 36.0\,V$ است که در صورت مسئلهٔ نمونه ۲۷-۷ داده شده است. ولی اینجا خوب است زمان رسیدن به این مقدار بیشینه را به دست آوریم؛ چرا که در حل قسمت‌های بعد به آن نیاز داریم. مقدار بیشینهٔ $\varepsilon = \varepsilon_m \sin\omega_d t$ به ازای $\omega_d t = \pi/2$ به دست می‌آید و از آنجا برای زمان t داریم

$$t = \frac{\pi}{2\omega_d} = \frac{1}{4f_d} = \frac{1}{4(60.0)} = 4.17\times 10h - 3s = 4.17\,ms$$

که در آن از f_d صورت مسئلهٔ نمونه ۲۷-۷ استفاده می‌کردیم.

(ب) در مسئلهٔ نمونهٔ ۲۷-۷ ثابت فاز $\phi = -24.3°$ به دست آمد. در نتیجه جریان در هنگامی‌که emf مولد بیشینه است، با استفاده از معادلهٔ ۲۷-۲۹ چنین می‌شود:

$$i = I\sin(\omega_d t - \phi) = I(\sin 90° - (-24.31°))$$
$$= (0.164)\cos(24.3°) = 0.149\,A$$

و از آنجا $v_R = iR = (0.149)(200) = 29.9\,V$ می‌شود که در آن از مقاومت R داده شده در مسئلهٔ نمونه ۲۷-۷ استفاده کردیم.

(پ) فازور در ولتاژ خازن $90°$ عقب‌تر از فازور جریان آن است. بنابراین در هنگامی‌که emf مولد بیشینه است، خواهیم داشت

$$v_C = I\sin(90° - (-24.3°) + 90°)X_C = IX_C\sin(24.3°)$$
$$= (0.164)\cos(24.3°) = 11.9\,V$$

که در آن از I و X_C مسئلهٔ نمونه ۲۷-۷ استفاده کردیم.

(ت) فازور ولتاژ القاگر $90°$ جلوتر از فازور جریان آن است. بنابراین در هنگامی‌که emf مولد بیشینه است،خواهیم داشت

$$v_L = I\sin(90° - (-24.3°) + 90°)X_L = -IX_L\sin(24.3°)$$
$$= -(0.164)(86.7\Omega)\sin(24.3°) = -5.85\,V$$

که در آن از I و X_L مسئلهٔ نمونه ۲۷-۷ استفاده کردیم.

(ث) مجموع نتایج قسمت‌های (ب) (پ) و (ت) برابر $36.0\,V$ می‌شود که همان پاسخ قسمت (الف) است.

۸۷-یک مولد ac نیروی محرکهٔ الکتریکی $\varepsilon = \varepsilon_m \sin(\omega_d t - \pi/4)$ را ایجاد می‌کند که در آن $\varepsilon_m = 30.0\,V$ و $\omega_d = 350\,rad/s$ و جریانی که در مدار متصل به مولد برقرار می‌شود با رابطهٔ $i(t) = I\sin(\omega_d t + \pi/4)$ داده می‌شود که در آن $I = 620\,mA$ است. (الف) در چه زمانی پس از $t = 0$ emf مولد به اولین بیشینه می‌رسد؟ (ب) در چه زمانی پس از $t = 0$ جریان برای

Scanned by CamScanner

اولین بار به بیشینه می‌رسد؟ (پ) مدار به جز مولد به یک عنصر دیگر متصل است. آیا این عنصر یک خازن، یک القاگر یا یک مقاومت است؟ جواب خود را توجیه کنید. (ت) مقدار ظرفیت، القایدگی یا مقاومت را بسته به اینکه کدام مورد پاسخ است پیدا کنید.

حل:

$$\varepsilon = 30/0 \sin\left(350t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$i = 0/62 \sin\left(350t + \frac{\pi}{4}\right)$$

(الف)

$$\varepsilon = \varepsilon_m \Rightarrow \sin\left(350t - \frac{\pi}{4}\right) = 1 = \sin\frac{\pi}{2}$$

$$350t - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 6/73 \times 10^{-3}\,\text{s} \quad \text{یا} \quad 6/73\,\text{ms}$$

(ب)

$$i = I_m \Rightarrow \sin\left(350t - \frac{\pi}{4}\right) = 1 = \sin\frac{\pi}{2}$$

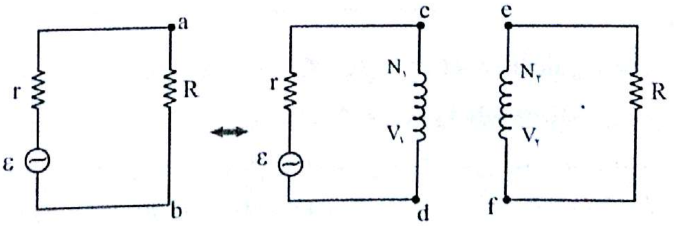
$$350t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 2/24 \times 10^{-3}\,\text{s} \quad \text{یا} \quad 2/24\,\text{ms}$$

(پ) چون جریان به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ از نیروی محرکه جلوتر است (تقدیم فاز دارد) پس عنصر خازن می‌باشد.

$$X_C = \frac{\varepsilon_m}{i_m} = \frac{(30)}{(0/62)} = 48/4\,\Omega$$

●۸۸- در شکل ۲۷-۳۴ فرض می‌کنیم که جعبهٔ مکعبی شکل در سمت چپ نشان دهندهٔ خروجی یک تقویت کنندهٔ صوتی (با مقاومت ظاهری بالا) با $r = 1000\,\Omega$ باشد. فرض می‌کنیم $R = 10\,\Omega$ نشان دهندهٔ پیچهٔ یک بلندگو (با مقاومت ظاهری پایین) است. برای انتقال بیشترین انرژی به بار R باید داشته باشیم $R = r$ که در این حالت چنین نیست. اما، مبدل می‌تواند برای «تبدیل» مقاومتها به کار رود، آنها از نظر الکتریکی طوری رفتار می‌کنند که گویا از مقدار واقعی بزرگتر یا کوچکترند. (الف) پیچه‌های اولیه و ثانویهٔ یک مبدل را به گونه‌ای طرح کنید که بتوانند بین تقویت کننده و بلندگوی شکل ۲۷-۳۴ مقاومتهای ظاهری تطبیق شده‌ای ایجاد کنند. (ب) نسبت دورها باید چقدر باشد؟

حل: (الف)



(ب) خروجی را به جای آنکه از a و b بگیریم از c و d می‌گیریم.

اگر $r = R$ بود توان منتقل شده به مقاومت R بیشینه بود. اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت در این حالت $V = \frac{\varepsilon}{2}$ می‌شد. در صورتی که اختلاف پتانسیل دو مقاومت R در شکل (الف) برابر است با:

$$V_{ab} = R\frac{\varepsilon}{r+R}$$

حال مبدلی می‌خواهیم تا اختلاف پتانسیل V_{ab} را به V تبدیل کند.

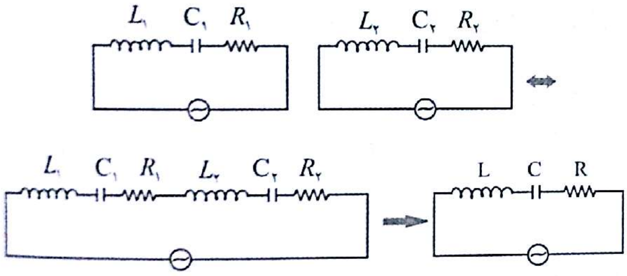
$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{V'}{V} = \frac{R\frac{\varepsilon}{r+R}}{\frac{E}{2}} = \frac{2R}{r+R}$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{(2)(10)}{1000+10} = \frac{20}{1010} = \frac{2}{101} = 1/98 \times 10^{-2}$$

$$\frac{N_2}{N_1} = 50/5$$

۸۹- یک مدار متوالی شامل مقاومت، القاگر و خازن با ترکیب R_1، L_1 و C_1 دارای بسامد تشدید یکسان با مدار دیگری با ترکیب متفاوت R_2، L_2 و C_2 است. حال این دو ترکیب را به طور متوالی به هم می‌بندیم. نشان دهید که مدار جدید دارای بسامد تشدیدی یکسان با وقتی است که مدارها جدا بودند.

حل:



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}} \Rightarrow L_1C_1 = L_2C_2$$

$$L = L_1 + L_2$$

$$C = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(L_1+L_2)\left(\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\right)}}$$

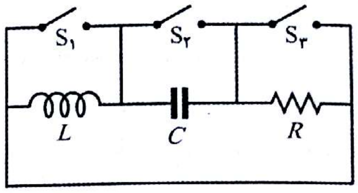
$$= \sqrt{\frac{C_1+C_2}{L_1C_1C_2 + C_1L_2C_2}} = \sqrt{\frac{C_1+C_2}{L_2C_2C_2 + C_1L_2C_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{C_1+C_2}{L_2C_2(C_1+C_2)}} = \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}} = \omega_0$$

۹۰- مدار نشان داده در شکل ۲۷-۳۹ را درنظر بگیرید. وقتی کلید S_1 بسته باشد و دو کلید دیگر باز باشند، مدار دارای ثابت زمانی τ_C است. وقتی کلید S_2 بسته باشد و دو کلید دیگر باز باشند، مدار دارای ثابت زمانی τ_L است. وقتی کلید S_3 بسته

Scanned by CamScanner

باشد و دو کلید دیگر باز باشند، مدار دارای ثابت زمانی τ_L است. وقتی کلید $S_۳$ بسته باشد و دو کلید دیگر باز باشند، مدار با دورهٔ تناوب T نوسان می‌کند. نشان دهید که $T = ۲\pi\sqrt{\tau_C \tau_L}$ است.



شکل ۲۷-۳۹ مسئلهٔ ۹۰

حل: در حالت اول مدار RC است.

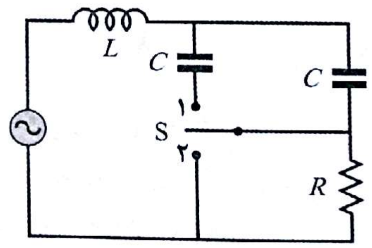
$$\tau_C = RC \Rightarrow C = \frac{\tau_C}{R}$$

در حالت دوم مدار RL است.

$$\tau_L = \frac{L}{R} \Rightarrow L = R\tau_L$$

$$T = ۲\pi\sqrt{Lc} = ۲\pi\sqrt{(R\tau_L)\left(\frac{\tau_C}{R}\right)} = ۲\pi\sqrt{\tau_L \tau_C}$$

۹۱- مولد ac در شکل ۲۷-۴۰ ، ۱۲۰ V را در ۶۰/۰Hz تولید می‌کند. وقتی در شکل کلید S باز است، جریان به اندازهٔ °۲۰/۰ از emf مولد جلو می‌افتد. وقتی کلید در وضعیت ۱ است، جریان به اندازهٔ °۱۰/۰ از emf مولد عقب می‌افتد. وقتی کلید در وضعیت ۲ قرارگیرد دامنهٔ جریان ۲/۰۰A است. (الف) R، (ب) L و (پ) C چقدرند؟



شکل ۲۷-۴۰ مسئلهٔ ۹۱

حل: در حالت اول، مدار RLC می‌باشد.

$$\varphi = -۲۰ \Rightarrow \tan(-۲۰) = \frac{X_L - X_C}{R}$$

$$X_L - X_C = -۰/۳۶۴R \qquad (۱)$$

اگر کلید روی موقعیت (۱) باشد.

$$\varphi = ۱۰ \Rightarrow C' = ۲C \Rightarrow X'_C = \frac{X_C}{۲}$$

$$\tan ۱۰ = \frac{X_L - X'_C}{R} = \frac{X_L \frac{X_C}{۲}}{R} \Rightarrow$$

$$X_L - \frac{X_C}{۲} = ۰/۱۷۶R \qquad (۲)$$

اگر کلید روی موقعیت (۲) قرار داشته باشد، مقاومت R حذف می‌گردد.

$$X_C - X_L = \frac{۱۲۰}{۲} = ۶۰\Omega \qquad (۳)$$

(الف) از معادله (۱) و (۳)

$$-۶۰ = -۰/۳۶۴R \Rightarrow R \Rightarrow R = ۱۶۵\Omega$$

(ب)

$$X_C = ۶۰X_L$$

$$(۲) \Rightarrow X_L - \frac{۶۰ + X_L}{۲} = (۰/۱۷۶)(۱۶۵) = ۲۹$$

$$X_L = ۱۱۸\Omega$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{(۱۱۸)}{(۲\pi)(۶۰)} = ۰/۳۱۳\ \text{H}$$

(پ)

$$X_C = ۶۰ + ۱۱۸ = ۱۷۸\Omega$$

$$X_C = \frac{۱}{C\omega} \Rightarrow C = \frac{۱}{X_C}$$

$$C = \frac{۱}{(۲\pi)(۶۰)(۱۷۸)} = ۱/۴۹ \times ۱۰^{۵}\ \text{F}$$

۹۲- در یک مدار LC نوسانی، $L = ۸/۰۰\text{mH}$ و $C = ۱/۴۰\mu\text{F}$ است. در زمان $t = ۰$ ، جریان بیشینه و برابر ۱۲/۰mA است. (الف) در حین نوسانها بار بیشینه روی خازن چقدر است؟ (ب) در $t > ۰$ کمترین زمانی که در آن آهنگ تغییر بار روی خازن بیشینه می‌شود چقدر است؟ (پ) این آهنگ بیشینه چقدر است؟

حل:

$$\omega = \frac{۱}{\sqrt{LC}} = \frac{۱}{\sqrt{(۸\times۱۰^{-۳})(۱/۴۰\times۱۰^{-۶})}} = ۹۴۴۹\ \text{rad/s}$$

(الف)

$$U_m = \frac{۱}{۲}Li_m^۲ = \left(\frac{۱}{۲}\right)(۸\times۱۰^{-۳})(۱۲\times۱۰^{-۳})^۲$$

$$= ۵/۷۶\times۱۰^{-۷}\ \text{J}$$

$$U_m = \frac{q_m^۲}{۲C} \Rightarrow q_m = \sqrt{۲CU_m}$$

$$q_m = \sqrt{(۲)(۱/۴۰\times۱۰^{-۶})(۵/۷۶\times۱۰^{-۷})} = ۱/۲۷\times۱۰^{-۶}\ \text{C}$$

یا $۱/۲۷\mu\text{C}$

(ب)

$$q = q_m \cos\omega t$$

$$U_C = \frac{q^۲}{۲C} = \frac{q_m^۲}{۲C}\cos^۲\omega t$$

$$\frac{dU_C}{dt} = -\frac{q_m^۲}{C}\omega\sin\omega t\cos\omega t = -\frac{q_m^۲\omega}{۲C}\sin ۲\omega t$$

این عبارت موقعی بیشینه است که $\sin ۲\omega t = ۱$ باشد.

$$۲\omega_d t = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow (۲)(۹۴۴۹)t = \frac{(۳/۱۴)}{۲}$$

$$t = ۸/۳۱\times۱۰^{-۵}\ \text{s}$$

(پ)

$$\left|\frac{U_C}{dt}\right| = \frac{(۱/۲۷\times۱۰^{-۶})^۲(۹۴۴۹)}{(۲)(۱/۴۰\times۱۰^{-۶})} = ۵/۴۴\times۱۰^{-۳}\ \text{W}$$

۹۳- یک مدار RLC متوالی به وسیلهٔ مولدی در بسامد ۱۰۵۰Hz به کار می‌افتد. القایدگی ۹۰/۰mH؛ ظرفیت

Scanned by CamScanner

۰/۵۰۰μF ؛ و ثابت فاز برابر ۶۰/۰° است (شما باید علامت مناسب را برای زاویه قرار دهید). (الف) مقاومت چقدر است؟ برای افزودن دامنهٔ جریان آیا باید (ب) بسامد محرک، (پ) القاییدگی و (ت) ظرفیت را افزایش داد یا کاهش ؟

حل: (الف)

$$\omega_d = ۲\pi f_d = (۲)(۳/۱۴)(۱۰۵۰) = ۶۵۹۴\ rad/s$$

$$X_C = \frac{۱}{C\omega_d} = \frac{۱}{(۰/۵۰\times۱۰^{-۶})(۶۵۹۴)} = ۳۰۳/۳\ \Omega$$

$$X_L = L\omega_d = (۹۰\times۱۰^{-۳})(۶۵۹۴) = ۵۹۳/۵\ \Omega$$

چون $x_L > x_C$ می‌باشد $\varphi > ۰$ است.

$$\varphi = ۶۰^\circ$$

$$\tan\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \Rightarrow \tan ۶۰^\circ = \frac{(۵۹۳/۵۰ - ۳۰۳/۳)}{R}$$

$$R = ۱۶۷/۵\Omega$$

(ب) برای افزایش دامنهٔ جریان باید Z کم گردد. با افزایش بسامد، x_L و I زیاد شده و Z کاهش می‌یابد. بنابراین باید بسامد کاهش یابد.

(پ) با افزایش L، X_L و بنابراین Z زیاد می‌شود. بنابراین باید L را کم نماییم.

(د) با کاهش C، X_C زیاد شده و X_C به X_L نزدیک‌تر می‌گردد و Z کم و جریان زیاد می‌گردد. پس باید C کاهش یابد.

۹۴- یک مدار RLC متوالی به وسیلهٔ مولدی در بسامد ۲۰۰۰Hz و دامنهٔ emf برابر ۱۷۰V به کار می‌افتد. القاییدگی ۶۰/۰mH ، ظرفیت ۰/۴۰۰μF و مقاومت برابر ۲۰۰Ω است. (الف) ثابت فاز برحسب رادیان چقدر است؟ (ب) دامنهٔ جریان چقدر است؟

حل: (الف)

$$\omega_d = ۲\pi f_d = (۲)(۳/۱۴)(۲۰۰۰) = ۱/۲۵۶\times۱۰^{۴}\ rad/s$$

$$X_L = L\omega_d = (۶۰\times۱۰^{-۳})(۱/۲۵۶\times۱۰^{۴}) = ۷۵۳/۶\ \Omega$$

$$X_C = \frac{۱}{C\omega_d} = \frac{۱}{(۰/۴\times۱۰^{-۶})(۱/۲۵۶\times۱۰^{۴})} = ۱۹۹\ \Omega$$

$$\tan\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{(۷۵۳/۶ - ۱۹۹)}{(۲۰۰)} = ۲/۷۷$$

$$\varphi = ۷۰/۲^\circ$$

(ب)

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} \Rightarrow Z = \frac{(۲۰۰)}{\cos ۷۰/۲} = ۵۹۰/۴\ \Omega$$

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{Z} = \frac{(۱۷۰)}{۵۹۰/۴} = ۰/۲۹\ A$$

۹۵- وقتی یک خازن ۷/۰۰μF به دو سر یک القاگر بسته شود دارای پتانسیل اولیهٔ ۱۲/۰V است. این ترکیب در بسامد ۷۱۵Hz نوسان می‌کند. القاییدگی القاگر چقدر است؟

حل:

$$f_d = ۷۱۵\ HZ$$

$$f_d^{۲} = \frac{۱}{۴\pi^{۲}LC} \Rightarrow L = \frac{۱}{f^{۲}۴\pi^{۲}C}$$

$$L = \frac{۱}{(۷۱۵)^{۲}(۴)(۳/۱۴)^{۲}(۷\times۱۰^{-۶})} = ۷/۰۸\times۱۰^{-۳}\ H$$

۹۶- یک نوسانگر LC شامل یک خازن ۲۰۰mF و یک القاگر ۲/۰۰mH است. ولتاژ بیشینه برابر ۴/۰۰V است. (الف) بسامد نوسانها، (ب) جریان بیشینه، (پ) انرژی بیشینهٔ ذخیره شده در القاگر و (ت) آهنگ بیشینهٔ di/dt که با آن جریان تغییر می‌کند، چقدرند؟

حل: (الف)

$$f = \frac{۱}{۲\pi\sqrt{LC}} = \frac{۱}{(۲)(۳/۱۴)\sqrt{(۲\times۱۰^{-۳})(۲\times۱۰^{-۹})}} = ۷/۹۶\times۱۰^{۴}\ HZ$$

(ب) و (پ)

$$U_m = \frac{۱}{۲}CV_m^{۲} = \left(\frac{۱}{۲}\right)(۲\times۱۰^{-۹})(۴)^{۲} = ۱/۶\times۱۰^{-۸}\ J$$

$$U_m = \frac{۱}{۲}Li_m^{۲} \Rightarrow ۱۶\times۱۰^{-۹} = \left(\frac{۱}{۲}\right)(۲\times۱۰^{-۳})i_m^{۲}$$

$$i_m = ۴\times۱۰^{-۳}\ A$$

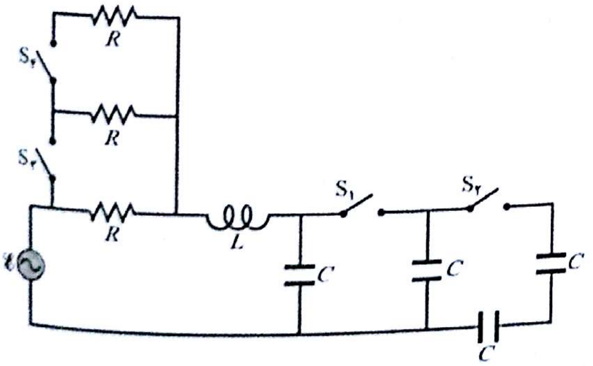
$$U_m = \frac{۱}{۲}Li_m^{۲} = \left(\frac{۱}{۲}\right)(۲\times۱۰^{-۳})(۴\times۱۰^{-۳})^{۲} = ۱/۶\times۱۰^{-۸}\ J$$

(ت)

$$V_L = L\left|\frac{di}{dt}\right| \Rightarrow \left|\frac{di}{dt}\right| = \frac{V_L}{L}$$

$$\left|\frac{di}{dt}\right|_m = \frac{V_{L,m}}{L} = \frac{۴}{(۲\times۱۰^{-۳})} = ۲۰۰\ A/s$$

۹۷- شکل ۲۷-۴۱ یک مدار RLC را نشان می‌دهد که توسط یک منبع emf با دامنهٔ ثابت ε_m کار می‌کند. در ابتدا مدار شامل یک مقاومت R ، یک القاگر با القاییدگی L و یک خازن با ظرفیت C است و بسامد محرک با بسامد طبیعی برابر است. سپس کلیدهای S_1 ، S_2 ، S_3 و S_4 به ترتیب بسته می‌شوند. بستن کلیدها موجب یکسان شدن خازنها با اولین خازن یا یکسان شدن مقاومتها با اولین مقاومت می‌شود.



شکل ۲۷-۴۱ مسئلهٔ ۹۷

فرض کنید $\varepsilon_m = ۱۲/۰\ V$ ، $C = ۲/۰۰\mu F$ ، $L = ۲/۰۰mH$ و $R = ۱۲/۰\Omega$. (الف) اولین ستون خالی جدول را برای

Scanned by CamScanner

مقدارهای ظرفیت معادل C_{eq} پس از بستن هر کلید، پر کنید. به همین ترتیب، سایر ستونها را برای مقدارهای (ب) بسامد تشدید، (پ) مقاومت معادل R_{eq} ، (ت) مقاومت ظاهری Z و (ث) دامنهٔ جریان I ، پر کنید. (قبل از اتمام تمام محاسبه‌ها عددی را گرد نکنید.)

بستن	C_{eq}	f	R_{eq}	Z	I
S_1					
S_2					
S_3					
S_4					

حل:

$$\omega_d = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(2\times10^{-3})(2\times10^{-6})}} = 15877/4 \text{ rad/s}$$

با بسته شدن S_1 داریم:

دو خازن با هم موازی شده و ظرفیت در مدار $2C$ می‌گردد.

$$C_1 = 4\times10^{-6} \text{ F}$$

$$f_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_1}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(2\times10^{-3})(4\times10^{-6})}} = 1/780\times10^{3} \text{ Hz}$$

$$X_L = L_1\omega_d = (2\times10^{-3})(15811/4) = 31/6\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{C_1\omega_d} = \frac{1}{(4\times10^{-6})(15811/4)} = 15/8\ \Omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2} = \sqrt{(12)^2 + (31/6 - 15/8)^2} = 19/8\ \Omega$$

$$I_1 = \frac{\varepsilon_m}{Z_1} = \frac{(12)}{(19/8)} = 0/606 \text{ A}$$

با بسته شدن S_2 داریم:

$$C_2 = 2C + \frac{C}{2} = 2/5\text{C}$$

$$C_2 = (2/5)(2) = 5\,\mu\text{F}$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{(2\times10^{-3})(5\times10^{-6})}} = 1/59\times10^{3} \text{ Hz}$$

یا $1/59 \text{ kHZ}$

$$X_L = 31/6\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{C_2\omega_d} = \frac{1}{(5\times10^{-6})(15811/4)} = 12/65\ \Omega$$

$$Z_2 = \sqrt{(12)^2 + (31/6 - 12/65)^2} = 22/4$$

$$I_2 = \frac{(12)}{(22/4)} = 0/54 \text{ A}$$

با بسته شدن S_3 داریم:

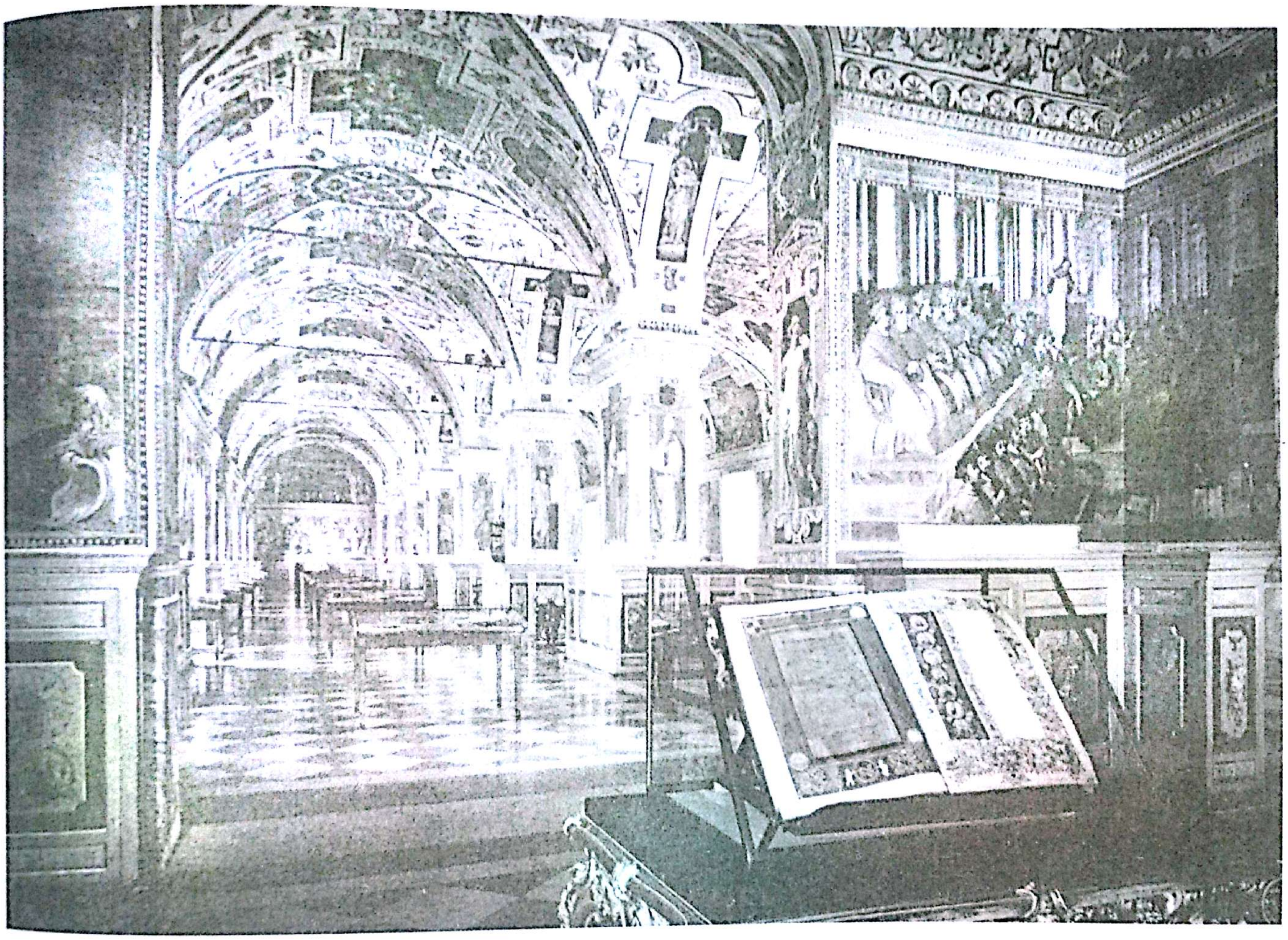
$$R_3 = \frac{R}{2} = 6\ \Omega$$

$$C_3 = 5\,\mu\text{F}$$

Scanned by CamScanner

۲۸

معادله‌های ماکسول؛ خواص مغناطیسی ماده



Scanned by CamScanner

بخش ۲۸-۲ قانون گاؤس دربارهٔ میدان‌های مغناطیسی

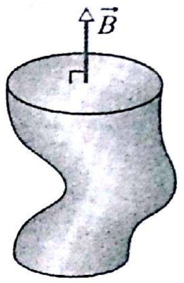
۱۰- شار مغناطیسی که از هر یک از پنج وجه یک تاس می‌گذرد با $\Phi_B = \pm N$ Wb داده می‌شود که N (= ۱ تا ۵) تعداد نقطه‌های روی وجه است. شار برای N زوج مثبت (به سمت خارج) و برای N فرد منفی (به سمت داخل است). شاری که از وجه ششم تاس می‌گذرد چقدر است؟

حل: شاری که از سطح بسته می‌گذرد صفر است.

$$\Phi_{کل} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_6$$

$$-1+2-3+4-5+\Phi_6 = 0 \Rightarrow \Phi_6 = 3 = \text{Wb}$$

۲۰- شکل ۲۸-۲۷ سطح بسته‌ای را نشان می‌دهد. به طرف جلوی وجه تخت بالایی که دارای شعاع ۲/۰cm است یک میدان مغناطیسی $\vec{B}$ به بزرگی ۰/۳۰T عمود و به طرف خارج برقرار است. از وجه تخت پایین شار مغناطیسی ۰/۷۰mWb به طرف خارج می‌گذرد. مطلوب است تعیین (الف) بزرگی و (ب) جهت (به طرف داخل یا به طرف خارج) شار مغناطیسی که از سطح خمیدهٔ بدنه می‌گذرد.



شکل ۲۸-۲۷ مسئلهٔ ۲

حل: (الف) و (ب) شاری که از هر سطح بسته می‌گذرد صفر است، پس:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0$$

$$(0/3)(3/14)(2\times10^{-2})^2 + 0/7\times10^{-3} + \Phi_3 = 0$$

$$\Phi_3 = -1/1\times10^{-3}\ \text{Wb}$$

علامت منفی نشان می‌دهد، شار به سمت داخل است.

۳۰۰- یک سطح گاؤسی به شکل استوانهٔ دایره‌ای قائم، دارای شعاع ۱۲/۰cm و طول ۸۰/۰cm است. از یک انتهای استوانه شار مغناطیسی ۲۵/۰μWb به طرف داخل می‌گذرد. در انتهای دیگر یک میدان مغناطیسی یکنواخت ۱/۶۰mT، عمود بر سطح و به طرف خارج وجود دارد. مطلوب است (الف) بزرگی و (ب) جهت (به طرف بالا یا به طرف پایین) شار مغناطیسی خالص از میان بدنهٔ خمیده. SSM ILW

حل:

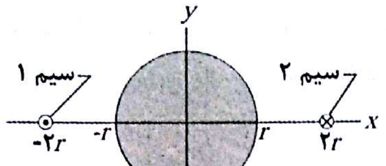
$$\Phi_{کل} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0$$

$$-25\times10^{-6} + (1/6\times10^{-3})(3/14)(0/12)^2 + \Phi_3 = 0$$

$$\Phi_3 = -4/74\times10^{-5}\ \text{Wb}$$

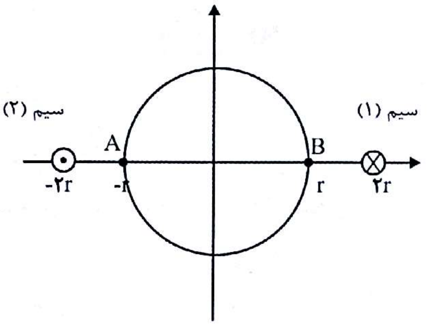
علامت منفی نشان می‌دهد، شار به طرف داخل است.

۴۰۰۰- دو سیم موازی با محور z به فاصلهٔ $4r$ از یکدیگر مطابق شکل ۲۸-۲۸ حامل جریانهای یکسان i در جهتهای مخالف‌اند. استوانه‌ای با مقطع دایره‌ای به شعاع r و طول L، محورش روی محور z و وسط دو سیم قرار دارد. با استفاده از قانون گاؤس برای مغناطیس، شار مغناطیسی خروجی خالصی را که از نصف سطح استوانه در بالای محور x می‌گذرد محاسبه کنید. (*راهنمایی:* شار عبوری از آن بخش از صفحهٔ xz را که داخل استوانه است پیدا کنید.)



شکل ۲۸-۲۸ مسئلهٔ ۴

حل:

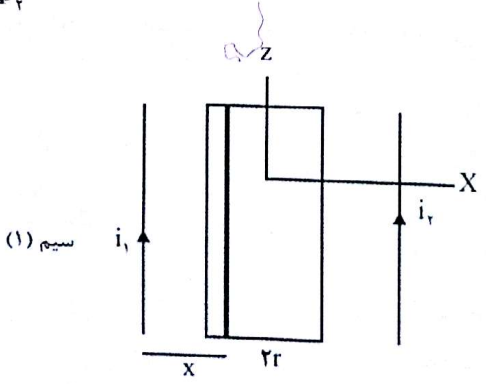


سطحی که قاعده نیم‌استوانه بالایی را تشکیل می‌دهد، و مجموعه دو قاعده آن (دو نیم‌دایره) تشکیل یک سطح بسته می‌دهند. شار ناشی از میدان دو سیم که از این نیم‌استوانه می‌گذرد برابر است با:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 = 0$$

Φ_1 شاری که از سطح استوانه‌ای شکل بالایی می‌گذرد و Φ_2 نیز شاری که از سطح تخت قاعده نیم‌استوانه می‌گذرد. Φ_3 و Φ_4 صفر هستند زیرا خطوط میدان ناشی از دو سیم از این دو سطح (سطوح قاعده) نمی‌گذرد.

$$\Phi_1 = -\Phi_2$$



عنصر سطح $dA=Ldr$ را در نظر می‌گیریم. شار سیم (۱) که از آن می‌گذرد.

Scanned by CamScanner

$$d\Phi = B_1 dA = \frac{\mu_\circ}{۲\pi x} L dx \quad \text{سیم (۱)}$$

$$\Phi = \frac{\mu_\circ i L}{۲\pi}\int_{x=r}^{۳r}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_\circ i L}{۲\pi}\ln ۳ \quad \text{سیم (۱)}$$

$$\Phi = ۲\frac{\mu_\circ i L}{۲\pi}\ln ۳ = \frac{\mu_\circ i L}{\pi}\ln ۳ \quad \text{دو سیم}$$

بخش ۲۸-۳ میدان‌های مغناطیسی القا شده

•۵- میدان مغناطیسی القا شده در فاصلهٔ شعاعی ۶/۰mm از محور مرکزی یک خازن صفحه- موازی دایره‌ای برابر $۲/۰\times۱۰^{-۷}$ T است. شعاع صفحه‌ها ۳/۰mm است. با چه آهنگ $d\vec{E}/dt$ ، میدان الکتریکی بین صفحه‌ها در حال تغییر است؟ SSM

حل:

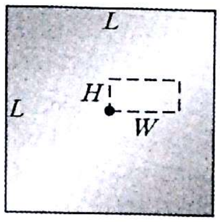
از مسئله نمونه ۲۸-۱ داریم $r > R$

$$B = \frac{\mu_\circ \varepsilon_\circ R^۲}{۲r}\frac{dE}{dt}$$

$$۲\times۱۰^{-۷} = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۳\times۱۰^{-۳})^۲}{۲(۶\times۱۰^{-۳})}\times\frac{dE}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt} = ۲/۴\times۱۰^{۱۳}\ \text{V/m}\cdot\text{s}$$

•۶- خازنی با صفحه‌های مربعی شکل به ضلع L با جریان ۰/۷۵A تخلیه می‌شود. شکل ۲۸-۲۹ نمای از بالای یکی از صفحه‌ها را از داخل خازن نشان می‌دهد. یک مسیر مستطیلی شکل خط چین نشان داده شده است. اگر $L = ۱۲\text{cm}$ ، $W = ۴/۰\text{cm}$ و $H = ۲/۰\text{cm}$ باشند، مقدار $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}$ دور مسیر خط‌چین چقدر است؟



شکل ۲۸-۲۹ مسئلهٔ ۶

حل:

$$\oint_c \vec{B}\cdot\vec{ds} = \mu_\circ i'_d$$

که i'_d جریان تخلیه‌ای است که از درون حلقه آمپر می‌گذرد.

$$\frac{i_d \text{ کل}}{L^۲} = \frac{i'_d}{H.W} \Rightarrow i'_d = \frac{H.W}{L^۲} i_d$$

$$i_d = \frac{(۲)(۴)}{(۱۲)^۲}(۰/۷۵) = ۰/۰۴۲\text{A}$$

$$\oint_c B\cdot ds = (۴\pi\times۱۰^{-۷})(۰/۰۴۲) = ۵/۲۸\times۱۰^{-۸}\ \text{T}\cdot\text{m}$$

••۷- فرض کنید یک خازن صفحه - موازی دارای صفحه‌های دایره‌ای به شعاع $R = ۳۰\text{mm}$ و فاصلهٔ صفحه‌ها ۵/۰mm است. همچنین فرض کنید که یک اختلاف پتانسیل سینوسی با مقدار بیشینهٔ ۱۵۰V و بسامد ۶۰Hz به دو صفحه اعمال شده است؛ یعنی

$$V = (۱۵۰)\sin[۲\pi(۶۰)t]$$

(الف) $B_{max}(R)$ یعنی، مقدار بیشینهٔ میدان مغناطیسی القا شده در $r = R$ را به دست آورید. (ب) $B_{max}(r)$ را به ازای $۰ < r < ۱۰\text{cm}$ رسم کنید.

حل: (الف) از مسئله نمونه ۲۸-۱ برای $r=R$ داریم:

$$B_m(R) = \frac{\mu_\circ\varepsilon_\circ R}{۲}\frac{dE}{dt}$$

$$E = \frac{V}{d} = \frac{V_m}{d}\sin\omega t$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{V_m}{d}\omega\cos\omega t = \frac{(۱۵۰)}{(۵\times۱۰^{-۳})}(۱۲۰)(۳/۱۴)$$

$$= ۱/۱۳\times۱۰^{۷}\ \text{V/m}\cdot\text{s}$$

که در آن در مورد B_m جمله $\sin\omega t = ۱$ در نظر گرفته شده است.

$$B_m(R) = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۳۰\times۱۰^{-۳})}{۲}\times$$
$$(۱/۱۳\times۱۰^{۷}) = ۱/۸۸\times۱۰^{-۱۲}\ \text{T}$$

(ب) برای $r \geq R$ داریم:

$$B_{(r)} = \frac{\mu_\circ\times\varepsilon_\circ R^۲}{۲r}\frac{dE}{dt} = \frac{\mu_\circ\varepsilon_\circ R^۲}{۲r}\frac{V_m}{d}\omega\cos\omega t$$

$$B_{m(r)} = \frac{\mu_\circ\varepsilon_\circ R^۲}{۲r}\frac{V_m}{d}\omega = B_m(R)\frac{R}{r} = \frac{(۱/۸۸)(۳۰)}{r} = \frac{۵۶/۴}{r}(PT)$$

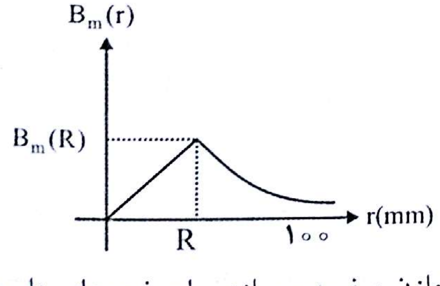
که در آن r باید برحسب میلیمتر قرار گیرد.

برای $r \leq R$ داریم:

$$B(r) = \frac{۱}{۲}\mu_\circ\varepsilon_\circ r\frac{dE}{dt} = \frac{۱}{۲}\mu_\circ\varepsilon_\circ r\frac{V_m}{d}\omega\cos\omega t$$

$$B_m(r) = B_m(R)\frac{r}{R} = (۱/۸۸)\frac{r}{(۳۰)} = ۰/۰۶۳r(PT)$$

که در آن r برحسب میلیمتر می‌باشد.



•••۸- یک خازن صفحه- موازی با صفحه‌های دایره‌ای به شعاع ۴۰mm با جریان ۶/۰A در حال تخلیه است. در چه شعاعی (الف) داخل و (ب) خارج از فاصلهٔ خازن بزرگی میدان مغناطیسی القا شده برابر ۷۵٪ مقدار بیشینهٔ خود است؟ (پ) این مقدار بیشینه چقدر است؟

حل: (الف) از مسئله نمونه ۲۸-۱ برای $r < R$ داریم:

$$B = \frac{۱}{۲}\mu_\circ\varepsilon_\circ r\frac{dE}{dt}$$

بیشینه میدان مغناطیسی در جایی است که $r=R$ باشد.

$$B_m = \frac{۱}{۲}\mu_\circ\varepsilon_\circ R\frac{dE}{dt}$$

Scanned by CamScanner

$$B = ۰/۷۵B_m \Rightarrow \frac{۱}{۲}\mu_۰\varepsilon_۰ r\frac{dE}{dt} = (۰/۷۵)\frac{۱}{۲}\mu_۰\varepsilon_۰ R\frac{dE}{dt}$$

$$r = ۰/۷۵R = (۰/۷۵)(۴۰) = ۳۰\text{mm}$$

(ب) برای $r > R$ داریم:

$$B = \frac{\mu_۰\varepsilon_۰ R^۲}{۲r}\frac{dE}{dt}$$

$$\frac{\mu_۰\varepsilon_۰ R^۲}{۲r}\frac{dE}{dt} = (۰/۷۵)\frac{۱}{۲}\mu_۰\varepsilon_۰ R\frac{dE}{dt}$$

$$\frac{R}{r} = ۰/۷۵ \Rightarrow r = \frac{R}{۰/۷۵} = \frac{۴۰}{۰/۷۵} = ۵۳/۳\text{mm}$$

(پ) در مورد جریان تخلیه داریم:

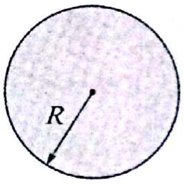
$$i_d = \varepsilon_۰ A\frac{dE}{dt} = (۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۳/۱۴)(۴۰\times۱۰^{-۳})^۲\frac{dE}{dt}$$

$$۶ = ۴/۴۵\times۱۰^{-۱۴}\frac{dE}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt} = ۱/۳۵\times۱۰^{۱۴}\ \text{V/m}\cdot\text{s}$$

$$B_m = \left(\frac{۱}{۲}\right)(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۴۰\times۱۰)\times(۱/۳۵\times۱۰^{۱۴}) = ۳\times۱۰^{-۵}\ \text{T}$$

۹●●- *شار الکتریکی یکنواخت*، شکل ۲۸-۳۰ ناحیه‌ای دایره‌ای با شعاع $R = ۳/۰۰\text{cm}$ را نشان می‌دهد که شار الکتریکی یکنواختی به طرف خارج صفحهٔ کاغذ از آن می‌گذرد. شار الکتریکی کل از این ناحیه با رابطهٔ $\Phi_E = (۳/۰۰\text{mV}\cdot\text{m/s})t$ داده می‌شود که t برحسب ثانیه است. بزرگی میدان مغناطیسی که در فاصله‌های (الف) ۲/۰۰cm و (ب) ۵/۰۰cm القا می‌شود چقدر است؟



شکل ۲۸-۳۰ مسئله‌های ۹- ۱۲ و ۲۵- ۲۸

حل: از رابطه ماکسول داریم:

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{ds} = \varepsilon_۰\mu_۰\frac{d\Phi_E}{dt}$$

$r < R$

$$B۲\pi r = \varepsilon_۰\mu_۰(۳\times۱۰^{-۳})\frac{\pi r^۲}{\pi R^۲} \Rightarrow B = \frac{(۳\times۱۰^{-۳})\varepsilon_۰\mu_۰ r}{۲\pi R^۲}$$

نکته: در مواردی که میدان ثابت نیست، از روابط ۳۲-۸ و ۳۲-۹ نمی‌توان استفاده نمود.

(الف) برای $r = ۲\text{cm}$ داریم:

$$B = \frac{(۳\times۱۰^{-۳})(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۴\pi\times۱۰^{۷})(۲\times۱۰^{-۲})}{(\pi)(۵\times۱۰^{-۲})^۲}$$

$$= ۱/۱۸\times۱۰^{-۱۹}\ \text{T}$$

(ب) برای نقاط خارج از این ناحیه $r>R$ داریم:

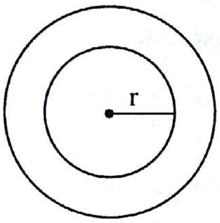
$$B = \frac{\mu_۰\varepsilon_۰(۳\times۱۰^{-۳})}{۲\pi r}$$

$$B_{(r)} = \frac{(۳\times۱۰^{-۳})(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۴\pi\times۱۰^{-۷})}{(۲\pi)(۵\times۱۰^{-۲})}$$

$$= ۱/۰۶\times۱۰^{-۱۹}\ \text{T}$$

۱۰●●- *شار الکتریکی غیر یکنواخت*: شکل ۲۸-۳۰ ناحیه‌ای دایره‌ای با شعاع $R = ۳/۰۰\text{cm}$ را نشان می‌دهد که شار در بر گرفته شده الکتریکی به طرف خارج از صفحهٔ کاغذ از آن می‌گذرد. شار با یک دایره هم مرکز به شعاع r با رابطهٔ $(\Phi_{E,\text{enc}} = ۰/۶۰۰\text{Vm.s})(r/R)t$ که آن $r \le R$ و t برحسب ثانیه است داده می‌شود. بزرگی میدان مغناطیسی القا شده در فاصله‌های شعاعی (الف) ۲/۰۰cm و (ب) ۵/۰۰cm چقدر است؟

حل:



قانون القا ماکسول را برای مسیر دایره‌ای به کار می‌گیریم

$$\oint_C \vec{B}\cdot\vec{ds} = \varepsilon_۰\mu_۰\frac{d\Phi}{dt}$$

(الف) برای ناحیه $r < R$ داریم:

$$B۲\pi r = \varepsilon_۰\mu_۰\ ۰/۶\frac{r}{R} \Rightarrow B = \frac{۰/۶\varepsilon_۰\mu_۰}{۲\pi R}$$

$$B = \frac{(۰/۶)(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۴\pi\times۱۰^{-۷})}{(۲\pi)(۳\times۱۰^{-۲})} = ۳/۵۴\times۱۰^{-۱۷}\ \text{T}$$

(ب) برای $r > R$ داریم:

شار فقط از ناحیه $r = R$ عبور می‌کند، پس شار کل برابر است با:

$$\Phi = (۰/۶)\left(\frac{R}{R}\right)t = ۰/۶t$$

$$\oint_C B\cdot ds = \mu_۰\varepsilon_۰\frac{d\Phi}{dt}$$

$$B۲\pi r = \mu_۰\varepsilon_۰(۰/۶) \Rightarrow B = \frac{(۰/۶)\mu_۰\varepsilon_۰}{۲\pi r}$$

$$B = \frac{(۰/۶)(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})}{(۲\pi)(۵\times۱۰^{-۲})} = ۲/۱۳\times۱۰^{-۱۷}\ \text{T}$$

۱۱●●- *میدان الکتریکی یکنواخت*. در شکل ۲۸-۳۰ میدان الکتریکی یکنواختی در ناحیه‌ای دایره‌ای با شعاع $R = ۳/۰۰\text{cm}$ به طرف خارج از صفحهٔ کاغذ برقرار است. بزرگی میدان الکتریکی با رابطهٔ $E = (۴/۵۰\times۱۰^{-۳}\ \text{V/m.s})t$ داده می‌شود که در آن t برحسب ثانیه است. بزرگی میدان مغناطیسی القا شده در فاصله های شعاعی (الف) ۲/۰۰cm و (ب) ۵/۰۰cm چقدر است؟

حل:

$$\frac{dE}{dt} = ۴/۵\times۱۰^{-۳}\ \text{V/m}\cdot\text{s}$$

Scanned by CamScanner

(الف) برای $r<R$ از مسئله نمونه ۲۸-۱ داریم:

$$B_r=\frac{1}{2}\mu_0\varepsilon_0 r\frac{dE}{dt}$$

$$B=\frac{1}{2}(4\pi\times10^{-7})(8/85\times10^{-12})(2\times10^{-2})(4/5\times10^{-3})$$

$$=5\times10^{-22}\ \text{T}$$

(ب) برای $r>R$ از رابطه (۳۲-۹) داریم:

$$B_r=\frac{\mu_0\varepsilon_0R^2}{2r}\frac{dE}{dt}$$

$$B=\frac{(4\pi\times10^{-7})(8/85\times10^{-12})(9\times10^{4})}{(2)(5\times10^{-2})}(4/5\times10^{-3})$$

$$=4/5\times10^{-22}\ \text{T}$$

••۱۲- *میدان الکتریکی غیر یکنواخت.* در شکل ۲۸-۳۰ میدان الکتریکی در ناحیه‌ای دایره‌ای با شعاع $R=3/00\ \text{cm}$ به طرف خارج از صفحهٔ کاغذ برقرار است. بزرگی میدان الکتریکی با رابطهٔ $E=(0/500\ \text{V/m.s})(1-r/R)t$ داده می‌شود که در آن t برحسب ثانیه است. بزرگی میدان مغناطیسی القا شده در فاصله‌های شعاعی (الف) ۲/۰۰cm و (ب) ۵/۰۰cm چقدر است؟

حل:

$$\Phi_E=\oint E\,dA=\int_{r=0}^{r}\frac{1}{2}\left(1-\frac{r}{R}\right)t\,2\pi r\,dr=\pi t\int_{r=0}^{r}\left(r-\frac{r^2}{R}\right)dr$$

$$=\pi t\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3R}\right)$$

(الف)

$$\oint_c\vec{B}\cdot\vec{ds}=\mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}=\mu_0\varepsilon_0\pi\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3R}\right)$$

$$2\pi rB=\mu_0\varepsilon_0\frac{r^2}{2}\left(1-\frac{2r}{3R}\right)\Rightarrow B=\frac{\mu_0\varepsilon_0 r}{4}\left(1-\frac{2r}{3R}\right)$$

$$B=\frac{(4\pi\times10^{-7})(8/85\times10^{-12})(2\times10^{-2})}{4}\left(1-\frac{4}{9}\right)$$

$$=3/09\times10^{-20}\ \text{T}$$

(ب) برای $r\geq R$ شار فقط از ناحیه $r=R$ می‌گذرد.

$$\Phi_E=\pi t\left(\frac{R^3}{2}-\frac{R^3}{3R}\right)=\frac{\pi tR^2}{6}$$

$$2\pi rB=\mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi}{dt}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\pi R^2}{6}$$

$$B=\mu_0\varepsilon_0\frac{R^2}{12r}$$

$$B=(4\pi\times10^{-7})(8/85\times10^{-12})\frac{9\times10^{-4}}{12(5\times10^{-2})}$$

$$=1/67\times10^{-20}\ \text{T}$$

بخش ۲۸-۴ جریان جابه‌جایی

•۱۳- ثابت کنید که جریان جابه‌جایی در یک خازن صفحه موازی با ظرفیت C را می‌توان به صورت $i_d=C(dV/dt)$ نوشت، که در آن V اختلاف پتانسیل بین صفحه‌هاست. SSM

حل: از معادله ۲۸-۱۰ داریم:

$$i_d=\varepsilon_0A\frac{dE}{dt}=\varepsilon_0A\frac{d}{dt}\left(\frac{V}{d}\right)=\frac{\varepsilon_0A}{d}\frac{dV}{dt}=C\frac{dV}{dt}$$

•۱۴- یک خازن صفحه- موازی با صفحه‌های دایره‌ای به شعاع ۰/۱۰m باردار می‌شود. یک حلقهٔ دایره‌ای به شعاع ۰/۲۰m با خازن هم محور است و در وسط صفحه‌ها قرار دارد. جریان جابه‌جایی در حلقه ۲/۰A است. میدان الکتریکی بین صفحه‌ها با چه آهنگی تغییر می‌کند؟

حل: از رابطه ۲۸-۱۰ داریم:

$$i_d=\varepsilon_0A\frac{d\Phi}{dt}=\varepsilon_0\pi R^2\frac{dE}{dt}$$

$$2=(8/85\times10^{-12})(3/14)(0/1)^2\frac{dE}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt}=7/2\times10^{12}\ \text{V/m}\cdot\text{s}$$

•۱۵- اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های یک خازن صفحه- موازی با ظرفیت ۲/۰μF با چه آهنگی باید تغییر کند تا جریان جابه‌جایی ۱/۵A ایجاد شود؟

حل:

$$E=\frac{V}{d}\Rightarrow\frac{dE}{dt}=\frac{1}{d}\frac{dV}{dt}$$

از رابطه (۲۸-۱۰) داریم:

$$i_d=\varepsilon_0A\frac{dE}{dt}=\frac{\varepsilon_0A}{d}\frac{dV}{dt}=C\frac{dV}{dt}$$

$$1/5=(2\times10^{-6})\frac{dV}{dt}\Rightarrow\frac{dV}{dt}=7/5\times10^{5}\ \text{V/s}$$

•۱۶- برای وضعیت مسئلهٔ نمونهٔ ۲۸-۱، نشان دهید که بزرگی چگالی جریان جابه‌جایی به ازای $r\leq R$ برابر $J_d=\varepsilon_0(dE/dt)$ است.

حل:

$$i_d=\varepsilon_0A\frac{dE}{dt}$$

$$j_d=\frac{i_d}{A}=\varepsilon_0\frac{dE}{dt}$$

••۱۷- وقتی یک خازن صفحه- موازی با صفحه‌های دایره‌ای به قطر ۲۰cm در حال پرشدن است، چگالی جریان جابه‌جایی در ناحیهٔ میان دو صفحه یکنواخت و دارای بزرگی $20\ \text{A/m}^2$ است. (الف) بزرگی $\vec{B}$ میدان مغناطیسی را در فاصلهٔ $r=50\ \text{mm}$ از محور تقارن این ناحیه به دست آورید. (ب) dE/dt را در این ناحیه حساب کنید. ILW

حل:

$$\oint_c\vec{B}\cdot\vec{ds}=\mu_0 i_d=\mu_0 jA$$

$$B2\pi r=\mu_0 j\pi r^2\Rightarrow B=\frac{\mu_0 jr}{2}$$

$$B=\frac{1}{2}(4\pi\times10^{-7})(20)(50\times10^{-3})=6/3\times10^{-7}\ \text{T}$$

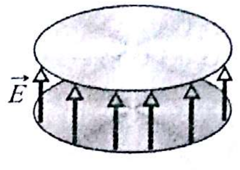
Scanned by CamScanner

(ب)

$$i_d = j_d A = \varepsilon_0 A \frac{dE}{dt} \Rightarrow j_d = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{j_d}{\varepsilon_0} = \frac{(20)}{(8/85\times10^{-12})} = 2/3\times10^{12}\ \text{V/m}\cdot\text{s}$$

۱۸●●- بزرگی میدان الکتریکی بین دو صفحهٔ دایره‌ای موازی در شکل ۲۸-۳۱برابر $E=(4/0\times10^{5})-(6/0\times10^{4}\,t)$ است، که در آن E برحسب ولت برمتر و t برحسب ثانیه است. در $t=0$ ، $\vec{E}$ به طرف بالاست. مساحت صفحه $4/0\times10^{-2}\text{m}^2$ است. به‌ازای $t\geq0$ ، مطلوب است (الف) بزرگی و (ب) جهت (بالا یا پایین) جریان جابه‌جایی بین صفحه‌ها. (پ) آیا جهت میدان مغناطیسی القا شده در شکل ساعتگرد است یا پاد ساعتگرد؟

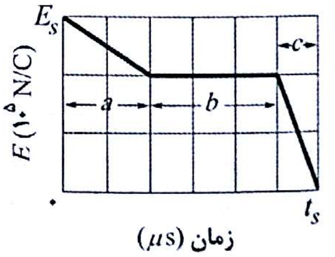


شکل ۲۸-۳۱ مسئلهٔ ۱۸

حل: (الف) و (ب) چون میدان تابع فاصله نمی‌باشد می‌توان از رابطه (۲۸-۱۰) استفاده نمود.

$$i_d = \varepsilon_0 A \frac{dE}{dt} = (8/85\times10^{-12})(4\times10^{-2})(-6\times10^{4})$$
$$= -2/12\times10^{-8}\ \text{A}$$

۱۹●●- در شکل ۲۸-۳۲ میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ کاهش می‌یابد. مقیاس محور قائم با $E_s = 6/0\times10^{5}$ N/C و مقیاس محور افقی با $t_s = 12/0\,\mu\text{s}$ مشخص شده است. بزرگی جریان جابه‌جایی را که از سطحی با مساحت $1/6\text{m}^2$ عمود بر میدان، در طی بازه‌های زمانی a ، b و c نشان داده شده روی نمودار می‌گذرد حساب کنید. (از رفتار میدان در انتهای هر بازه چشمپوشی کنید.) **SSM WWW**



شکل ۲۸-۳۲ مسئلهٔ ۱۹

حل:

(الف)

$$i_d = \varepsilon_0 A \frac{dE}{dt}$$

در ناحیه $0 \leq t \leq 4\mu_s$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{(4-6)\times10^{5}}{(4-0)\times10^{-6}} = -5\times10^{10}\ \text{V/m}\cdot\text{s}$$

$$i_d = (8/85\times10^{-12})(1/6)(-5\times10^{10}) = 0/71\text{A}$$

(ب) در ناحیه $4 \leq t \leq 10\mu_s$

$$\frac{dE}{dt} = 0$$
$$i_d = 0$$

(پ) در ناحیه $10\,\mu s \leq t \leq 12\mu s$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{(0-4)\times10^{5}}{(12-10)\times10^{-6}} = -2\times10^{11}\ \text{V/m}\cdot\text{s}$$

$$i_d = (8/85\times10^{-12})(1/6)(-2\times10^{11}) = -2/83\ \text{A}$$

۲۰●●- یک خازن صفحه- موازی با صفحه‌های دایره‌ای به شعاع ۱/۲۰cm با جریان ۱۲/۰ A تخلیه می‌شود. حلقه‌ای دایره‌ای به شعاع $R/3$ را در نظر بگیرید که مرکز آن روی محور مرکزی میان صفحه‌ها قرارداد. (الف) در حلقه محصور شده جریان جابه‌جایی چقدر است؟ میدان مغناطیسی القا شدهٔ بیشینه دارای بزرگی ۱۲/۰ mT است. در چه شعاعی (ب) داخل و (پ) خارج از فاصلهٔ خازن بزرگی میدان مغناطیسی القا شده برابر ۳/۰۰mT است؟

حل:

$$r = \frac{R}{3} < R$$

(الف)

$$\frac{i_d}{i_{d,m}} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} \Rightarrow \frac{i_d}{12} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \text{ کل}$$

$$i_d = 1/33\ \text{A}$$

(ب)

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{ds} = \mu_0 i_d \Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 i_d$$

$$B = \frac{\mu_0 i_d}{2\pi r}$$

$$\frac{i_d}{i_{d,m}} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} \Rightarrow i_d = i_{d,m}\frac{r^2}{R^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 i_{d,m}}{2\pi r}\frac{r^2}{R^2} = \frac{\mu_0 i_{d,m} r}{2\pi R^2}$$

$$B_m = \frac{\mu_0 i_{d,m}}{2\pi R}$$

$$\frac{B}{B_m} = \frac{r}{R}$$

$$\frac{3}{12} = \frac{r}{1/2} \Rightarrow r = 0/3\text{cm}$$

(پ)

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{ds} = \mu_0 i_{d,m}$$

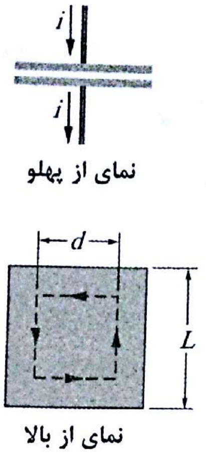
$$B 2\pi r = \mu_0 i_{d,m} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i_{d,m}}{2\pi r}$$

$$\frac{B}{B_m} = \frac{R}{r} \Rightarrow \frac{3}{12} = \frac{1/2}{r} \Rightarrow r = 4/8\ \text{cm}$$

۲۱●●- یک خازن صفحه- موازی مطابق شکل ۲۸-۳۳ دارای صفحه‌های مربعی با ضلع $L=1/0\text{cm}$ است. جریان ۲/۰ A که خازن را باردار می‌کند، یک میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ میان صفحه‌ها ایجاد می‌کند که بر صفحه‌ها عمود است. (الف) جریان جابه‌جایی که از میان صفحه‌ها می‌گذرد چقدر است؟ (ب) dE/dt در این ناحیه چقدر است؟ (پ) جریان جابه‌جایی

Scanned by CamScanner

محصور که از مسیر مربع خط چین به ضلع $d = 0.50\,\mathrm{m}$ میان صفحه‌ها می‌گذرد چقدر است؟ (ت) $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}$ دور این مسیر مربع خط‌چین چقدر است؟ SSM ILW



شکل ۲۸-۳۳ مسئله ۲۱

حل:

(الف) از پایستگی بار الکتریکی داریم:

$$i = i_d = 2\,\mathrm{A}$$

(ب)

$$i_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_0 A \frac{dE}{dt}$$

$$2 = (8.85\times10^{-12})(1)^2 \frac{dE}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt} = 2.3\times10^{11}\ \mathrm{V/m\cdot s}$$

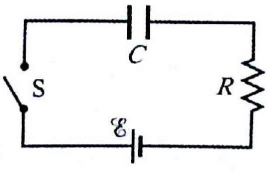
(پ)

$$\frac{i'_d}{i_d} = \frac{d^2}{L^2} \Rightarrow \frac{i'_d}{2} = \frac{(0.5)^2}{(1)^2} \Rightarrow i'_d = 0.5\,\mathrm{A}$$ کل

(ت)

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 i'_d = (4\pi\times10^{-7})(0.5) = 6.28\times10^{-7}$$
$$= 0.63\times10^{-6}\ \mathrm{T\cdot m}$$

۲۲●●- مدار شکل ۲۸-۳۴ شامل کلید S، باتری آرمانی $12.0\,\mathrm{V}$، مقاومت $20.0\,\mathrm{M\Omega}$ و خازنی پر شده از هواست. خازن دارای صفحه‌های دایره‌ای موازی به شعاع $5.00\,\mathrm{cm}$ است که به فاصلهٔ $3.00\,\mathrm{mm}$ از هم قراردارند. در زمان $t=0$، کلید S بسته شده و خازن شروع به پرشدن می‌کند. میدان الکتریکی میان صفحه‌ها یکنواخت است. در $t = 250\,\mu s$، بزرگی میدان مغناطیسی در خازن و به فاصلهٔ شعاعی $3.00\,\mathrm{cm}$ چقدر است؟



شکل ۲۸-۳۴ مسئله ۲۲

حل:

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = (8.85\times10^{-12})\frac{\pi(5\times10^{-2})^2}{(3\times10^{-3})} = 2.32\times10^{-11}\ \mathrm{F}$$

$$\tau = RC = (20\times10^{6})(2.32\times10^{-11}) = 4.64\times10^{-4}\ \mathrm{S}$$

میدان در بین صفحات خازن یکنواخت بوده و برابر است با:

$$E = \frac{V}{d} = \frac{12e^{-\frac{t}{\tau}}}{3\times10^{-3}} = 400e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_0\mu_0 A\frac{dE}{dt}$$

$$B2\pi r = \varepsilon_0\mu_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt} \Rightarrow B = \frac{1}{2}\varepsilon_0\mu_0\pi r\frac{dE}{dt}$$

$$B = \frac{1}{2}(8.85\times10^{-12})(4\pi\times10^{-7})(3\times10^{-2})\left(\frac{4000}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$B = 1.44\times10^{-12}\, e^{-\frac{250\times10^{-6}}{4.64\times10^{-4}}} = 8.41\times10^{-13}\ \mathrm{T}$$

۲۳- یک سیم نقره‌ای دارای مقاومت ویژهٔ $\rho = 1.62\times10^{-8}\ \Omega\mathrm{.m}$ و مساحت سطح مقطع $5.00\,\mathrm{mm^2}$ است. جریان در سیم یکنواخت و وقتی $100\,\mathrm{A}$ است با آهنگ $2000\,\mathrm{A/s}$ تغییر می‌کند. (الف) وقتی جریان در سیم $100\,\mathrm{A}$ است، بزرگی میدان الکتریکی (یکنواخت) در سیم چقدر است؟ (ب) در این زمان بزرگی جریان جابه‌جایی در سیم چقدر است؟ (پ) در فاصلهٔ r از سیم نسبت بزرگی میدان مغناطیسی ناشی از جریان جابه‌جایی به بزرگی میدان مغناطیسی ناشی از جریان چقدر است؟

حل: (الف) با استفاده از معادله ۲۲-۱۰ برای میدان الکتریکی سیم داریم

$$E = \rho J = \rho\frac{i}{A} = (1.62\times10^{-8})\frac{100A}{5.00\times10^{-6}}$$
$$= 0.324\ \mathrm{V/m}$$

(ب) جریان جابه‌جایی چنین می‌شود

$$i_d = \varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_0 A\frac{dE}{dt} = \varepsilon_0 A\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho i}{A}\right) = \varepsilon_0\rho\frac{di}{dt}$$
$$= (8.85\times10^{-12})(1.62\times10^{-8})(2000)$$
$$= 2.87\times10^{-16}\ \mathrm{A}$$

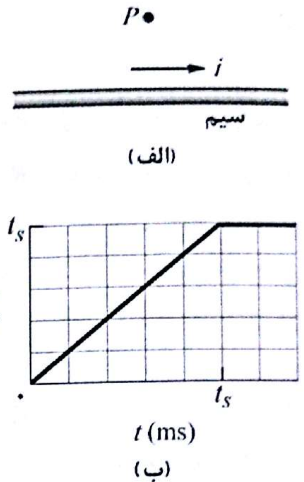
(پ) نسبت میدان‌ها برابر است با

$$\frac{B(\text{ناشی از } i_d)}{B(\text{ناشی از } i)} = \frac{\mu_0 i_d/2\pi r}{\mu_0 i_d/2\pi r} = \frac{i_d}{i} = \frac{2.87\times10^{-16}}{100}$$
$$= 2.87\times10^{-18}$$

۲۴●●- شکل ۲۸-۳۵ الف جریان i ایجاد شده در سیمی با مقاومت ویژهٔ $1.62\times10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}$ را نشان می‌دهد. بزرگی جریان برحسب زمان t در شکل ۲۸-۳۵ ب نشان داده شده است. مقیاس محور قائم با $i_s = 10.0\,\mathrm{A}$ و مقیاس محور افقی با $t_s = 50.0\,\mathrm{ms}$ مشخص شده است. نقطهٔ P در فاصلهٔ شعاعی $9.00\,\mathrm{mm}$ از مرکز سیم واقع است. بزرگی میدان مغناطیسی $\vec{B}_i$ ناشی از جریان واقعی i را در (الف) $t = 20\,\mathrm{ms}$، (ب) $t = 40\,\mathrm{ms}$ و (پ) $t = 60\,\mathrm{ms}$ حساب کنید. حال، فرض کنید

Scanned by CamScanner

که میدان الکتریکی که جریان را به حرکت می‌اندازد محدود به داخل سیم باشد. در این صورت، بزرگی میدان مغناطیسی B_{id} ناشی از جریان جابه‌جایی i_d را در (ت) $t=۲۰\,ms$، (ث) $t=۴۰\,ms$ و (ج) $t=۶۰\,ms$ حساب کنید. در نقطهٔ P در $t=۲۰\,s$ جهت (به داخل یا خارج صفحهٔ کاغذ) (چ) $\vec{B}_i$ و (ح) $\vec{B}_{id}$ چیست؟



شکل ۲۸-۳۵ مسئلهٔ ۲۴

حل:

(الف)

$$B_i=\frac{\mu_\circ i}{۲\pi r}$$

$$t=۲۰\,ms \Rightarrow i=۴\,A$$

$$B=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۴)}{(۲\pi)(۹\times۱۰^{-۳})}=۸/۹\times۱۰^{-۵}\ T$$

(ب)

$$t=۴۰\,ms \Rightarrow i=۸\,A$$

$$B_i=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۸)}{(۲\pi)(۹\times۱۰^{-۳})}=۱۷/۸\times۱۰^{-۵}\ T$$

(پ)

$$t=۶۰\,ms \Rightarrow i=۱۰\,A$$

$$B_i=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۱۰)}{(۲\pi)(۹\times۱۰^{-۳})}=۲۲/۲۵\times۱۰^{-۵}\ T$$

(ت)

از معادله (۲۲-۱۰) داریم:

$$E=\rho j=\rho\frac{i}{A}$$

$$\oint \vec{B}_i\cdot\vec{ds}=\varepsilon_\circ\mu_\circ\frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$B_i ۲\pi r=\varepsilon_\circ\mu_\circ A\frac{dE}{dt}=\varepsilon_\circ\mu_\circ A\frac{d}{dt}\left(\rho\frac{i}{A}\right)=\varepsilon_\circ\mu_\circ\rho\frac{di}{dt}$$

$$B_i=\frac{\varepsilon_\circ\mu_\circ\rho}{۲\pi r}\frac{di}{dt}$$

$$B_i=\frac{(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۱/۶۲\times۱۰^{-۸})}{(۲\pi)(۹\times۱۰^{-۳})}\frac{di}{dt}$$

$$=۳/۱۸۶\times۱۰^{-۲۴}\frac{di}{dt}$$

$$t=۲۰\ ms$$

$$\frac{di}{dt}=\frac{۱۰-۰}{۵۰\times۱۰^{-۳}}=۲۰۰\,A/S$$

$$B_{id}=(۳/۱۸۶\times۱۰^{-۲۴})(۲۰۰)=۶/۳۷\times۱۰^{-۲۲}\ T$$

(ث) $t=۴۰\,ms$

$$\frac{di}{dt}=۲۰۰\,A/s$$

$$B_{id}=۶/۳۷\times۱۰^{-۲۳}\ T$$

(ج) $t=۶۰\ ms$

$$\frac{di}{dt}=۰$$

$$B_{id}=۰$$

(چ) جهت B_i با استفاده از قاعده دست راست، به طرف بیرون صفحه است.

(ح) چون $\frac{di}{dt}$ مثبت است، جهت B_{id} در جهت B_i و برون‌سو می‌باشد.

۲۵●●- *چگالی جریان جابه‌جایی یکنواخت.* شکل ۲۸-۳۰ ناحیه‌ای دایره‌ای به شعاع $R=۳/۰۰\,cm$ را نشان می‌دهد که در آن جریان جابه‌جایی به سمت خارج صفحهٔ کاغذ است. جریان جابه‌جایی دارای چگالی یکنواخت به بزرگی $J_d=۶/۰۰\,A/m^۲$ است. بزرگی میدان مغناطیسی ناشی از جریان جابه‌جایی در فاصلهٔ شعاعی (الف) ۲/۰۰cm و (ب) ۵/۰۰cm چقدر است؟

حل: برای $r<R$ داریم:

$$\oint \vec{B}_d\cdot\vec{ds}=\mu_\circ i_d=\mu_\circ j_d A$$

$$۲\pi r B_d=\mu_\circ j_d \pi r^۲ \Rightarrow B_d=\frac{\mu_\circ j_d r}{۲}$$

$$B_d=\left(\frac{۱}{۲}\right)(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۶)(۲\times۱۰^{-۲})=۷/۵۴\times۱۰^{-۸}\ T$$

(ب) برای $r>R$ داریم:

$$\oint \vec{B}_d\cdot\vec{ds}=\mu_\circ i_d=\mu_\circ i_d A$$

$$۲\pi B_d=\mu_\circ i_d \pi R^۲ \Rightarrow B_d=\frac{\mu_\circ i_d R^۲}{۲r}$$

$$B_d=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۶)(۳\times۱۰^{-۲})^۲}{(۲)(۵\times۱۰^{-۲})}=۶/۷۹\times۱۰^{-۸}\ T$$

۲۶●●- *جریان جابه‌جایی یکنواخت.* شکل ۲۸-۳۰ ناحیه‌ای دایره‌ای به شعاع $R=۳/۰۰\,cm$ را نشان می‌دهد که در آن جریان جابه‌جایی یکنواخت $i_d=۰/۵۰۰\,A$ به طرف خارج صفحهٔ کاغذ است. بزرگی میدان مغناطیسی ناشی از جریان جابه‌جایی در فاصلهٔ شعاعی (الف) ۲/۰۰cm و (ب) ۵/۰۰cm چقدر است؟

حل: (الف) برای $r<R$ داریم:

$$\oint \vec{B}_d\cdot\vec{ds}=\mu_\circ i_d$$

$$B_d ۲\pi r=\mu_\circ i'_d \Rightarrow B=\frac{\mu_\circ i'_d}{۲\pi r}$$

$$\frac{i'_d}{\pi r^۲}=\frac{i_d}{\pi R^۲}\Rightarrow i'_d=\frac{i_d}{R^۲}r^۲$$

$$B_d=\frac{\mu_\circ i_d r}{۲\pi R^۲}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۰/۵)(۲\times۱۰^{-۲})}{(۲\pi)(۳\times۱۰^{-۲})^۲}$$

$$=۲/۲۲\times۱۰^{-۶}\ T$$

Scanned by CamScanner

(ب) برای $r > R$ داریم:

$$i'_d = i_d$$

$$B_d = \frac{\mu_۰ i_d}{۲\pi r} = \frac{(۴\pi \times ۱۰^{-۷})(۰/۵)}{(۲\pi)(۵\times ۱۰^{-۲})} = ۲\times ۱۰^{-۶}\ \text{T}$$

۲۷●●- *چگالی جریان جابه‌جایی غیر یکنواخت.* شکل ۲۸-۳۰ ناحیه‌ای دایره‌ای به شعاع $R = ۳/۰۰\ \text{cm}$ را نشان می‌دهد که در آن جریان جابه‌جایی به طرف خارج از صفحهٔ کاغذ برقرار است. بزرگی چگالی جریان جابه‌جایی با رابطهٔ $J_d = (۴/۰۰\ \text{A/m}^۲)(۱ - r/R)$ داده می‌شود که r فاصلهٔ شعاعی $(r \le R)$ است. بزرگی میدان مغناطیسی ناشی از جریان جابه‌جایی در (الف) $r = ۲/۰۰\ \text{cm}$ و (ب) $r = ۵/۰۰\ \text{cm}$ چقدر است.

حل: (الف) برای $r \le R$ داریم:

$$\oint \vec{B}_d \cdot \vec{ds} = \mu_۰ i'_d$$

$$B_d ۲\pi r = \mu_۰ i'_d \Rightarrow B_d = \frac{\mu_۰ i'_d}{۲\pi r}$$

که در آن i'_d جریان جابه‌جایی است که از درون حلقه آمپر C می‌گذرد.

$$i'_d = \int \vec{J}_d \cdot \vec{dA} = \int_{r=۰}^{r} (۴)\left(۱ - \frac{r}{R}\right) ۲\pi r dr$$

$$i'_d = (۸\pi)\left(\frac{۱}{۲} r^۲ - \frac{r^۳}{۳R}\right) = (۸)(۳/۱۴) \times \left[\frac{(۲\times ۱۰^{-۲})^۲}{۲} - \frac{(۲\times ۱۰^{-۲})^۳}{(۳)(۳\times ۱۰^{-۲})}\right] = ۲/۷۹ \times ۱۰^{-۳}\ \text{A}$$

$$B_d = \frac{(۴\pi \times ۱۰^{-۷})(۲/۷۹\times ۱۰^{-۳})}{(۲\pi)(۲\times ۱۰^{-۲})} = ۲/۷۹ \times ۱۰^{-۸}\ \text{T}$$

(ب) برای $r > R$ داریم:

$$i'_d = \int_{r=۰}^{R} \vec{J}_d \cdot \vec{dA} = (۸\pi)\left(\frac{R^۲}{۲} - \frac{R^۳}{۳R}\right) = \frac{۸\pi R^۲}{۶}$$

$$i'_d = \frac{(۸)(۳/۱۴)(۳\times ۱۰^{-۲})^۲}{(۶)} = ۳/۷۷ \times ۱۰^{-۳}\ \text{A}$$

$$B_d = \frac{(۴\pi \times ۱۰^{-۷})(۳/۷۷\times ۱۰^{-۳})}{(۲\pi)(۵\times ۱۰^{-۲})} = ۱/۵۱ \times ۱۰^{-۸}\ \text{T}$$

۲۸●●- *جریان جابه‌جایی غیر یکنواخت.* شکل ۲۸-۳۰ ناحیه‌ای دایره‌ای به شعاع $R = ۳/۰۰\ \text{cm}$ را نشان می‌دهد که در آن جریان i_d به طرف خارج صفحهٔ کاغذ برقرار است. بزرگی جریان جابه‌جایی با رابطهٔ $i_d = (۳/۰۰ A)(r/R)$ داده می‌شود که r فاصلهٔ شعاعی $(r \le R)$ است. بزرگی میدان مغناطیسی ناشی از i_d در فاصلهٔ شعاعی (الف) ۲/۰۰cm و (ب) ۵/۰۰cm چقدر است؟

حل:

$$\oint \vec{B}_d \cdot \vec{ds} = \mu_۰ i'_d$$

$$B_d ۲\pi r = \mu_۰ i'_d \Rightarrow B_d = \frac{\mu_۰ i'_d}{۲\pi r}$$

که i'_d جریان جابه‌جایی است که از درون حلقه آمپر می‌گذرد.

(الف) برای $r < R$ داریم:

$$i'_d = (۳)\frac{r}{R} = (۳)\frac{(۲)}{(۳)} = ۲\ \text{A}$$

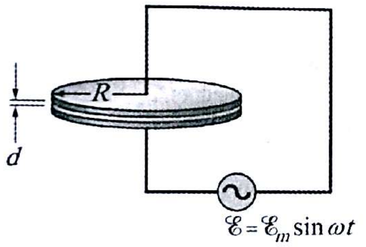
$$B = \frac{(۴\pi \times ۱۰^{-۷})(۲)}{(۲\pi)(۲\times ۱۰^{-۲})} = ۲\times ۱۰^{-۵}\ \text{T}$$

(ب) برای $r > R$ داریم:

$$i_d = ۲\frac{R}{R} = ۳\text{A}$$

$$B = \frac{(۴\pi \times ۱۰^{-۷})(۳)}{(۲\pi)(۵\times ۱۰^{-۲})} = ۱/۳ \times ۱۰^{-۵}\ \text{T}$$

۲۹- در شکل ۲۸-۳۶، یک خازن با صفحه‌های دایره‌ای به شعاع $R = ۱۸/۰\ \text{cm}$ به منبع نیروی محرکهٔ الکتریکی $\varepsilon = \varepsilon_m \sin \omega t$ متصل است که در آن $\varepsilon_m = ۲۲۰\ \text{V}$ و $\omega = ۱۳۰\ \text{rad/s}$. مقدار بیشینهٔ جریان جابه‌جایی $i_d = ۷/۶۰\ \mu\text{A}$ است. از اثر میدان الکتریکی در لبهٔ صفحه‌ها چشمپوشی کنید. (الف) مقدار بیشینهٔ جریان i در مدار چقدر است؟ (ب) مقدار بیشینهٔ $d\Phi_E/dt$ چقدر است، که در آن Φ_E شار الکتریکی است که از ناحیهٔ میان صفحه‌ها می‌گذرد؟ (پ) فاصلهٔ d میان صفحه‌ها چقدر است؟ (ت) مقدار بیشینهٔ بزرگی $\vec{B}$ میان صفحه‌ها در فاصلهٔ $r = ۱۱/۰\ \text{mm}$ از مرکز چقدر است؟



شکل ۲۸-۳۶ مسئلهٔ ۲۹

حل: (الف) در هر لحظه، جریان جابه‌جایی i_d در فضای میان صفحه‌ها برابر با جریان رسانش I در سیم‌هاست. بنابراین $i_{max} = i_{d,max} = ۷/۶۰\ \mu\text{A}$ می‌شود.

(ب) چون $i_d = \varepsilon_۰ (d\Phi_E/dt)$ است، خواهیم داشت:

$$\left(\frac{d\Phi_E}{dt}\right)_{max} = \frac{i_{d,max}}{\varepsilon_۰} = \frac{۷/۶۰ \times ۱۰^{-۶}}{۸/۸۵ \times ۱۰^{-۱۲}} = ۸/۵۹ \times ۱۰^{۵}\ \text{V}\cdot\text{m/s}$$

(پ) از مسئله ۱۳ داریم

$$i_d = C\frac{dV}{dt} = \frac{\varepsilon_۰ A}{d}\frac{dV}{dt}$$

اکنون اختلاف پتانسیل دو سر خازن برابر با emf مولد است و بنابراین $V = \varepsilon_m \sin \omega t$ و از آنجا $dV/dt = \omega \varepsilon_m \cos \omega t$ می‌شود. بنابراین برای i_d خواهیم داشت:

$$i_d = \frac{\varepsilon_۰ A \omega \varepsilon_m}{d} = \cos \omega t$$

و از آنجا $i_{d,max} = \varepsilon_۰ A \omega \varepsilon_m / d$ می‌شود. در نتیجه، فاصله d میان صفحه‌ها چنین می‌شود:

$$d = \frac{\varepsilon_۰ A \omega \varepsilon_m}{i_{d,max}}$$

Scanned by CamScanner

$$= \frac{(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})\pi(۰/۱۸۰)^{۲}(۱۳۰)(۲۲۰)}{۷/۶۰\times۱۰^{-۶}}$$
$$= ۳/۳۹\times۱۰^{-۳}\ \text{m}$$

که در آن از $A=\pi R^{۲}$ استفاده شد.

(ت) قانون آمپر – ماکسول را در امتداد مسیری دایره‌ای به شعاع r میان صفحه‌ها و به موازات آنها محاسبه می‌کنیم. اگر i_d را جریان جابه‌جایی کل و $i_{d,\max}$ را جریان جابه‌جایی عبوری از سطح موردنظر بگیریم، خواهیم داشت

$$\oint \vec{B}_d\cdot\vec{ds}=\mu_{\circ}i_{d,enc}\quad,\quad i_d=\int j_d dA=\frac{i_d}{\pi R^{۲}}\pi r^{۲}$$

و در نتیجه

$$B_d(۲\pi r)=\mu_{\circ}\left(\frac{r^{۲}}{R^{۲}}\right)i_d \Rightarrow B_d=\frac{\mu_{\circ}i_d r}{۲\pi R^{۲}}$$

و از آنجا $B_{\max}$ چنین می‌شود.

$$B_{\max}=\frac{\mu_{\circ}i_{d,\max}r}{۲\pi R^{۲}}$$
$$=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۷/۶\times۱۰^{-۶})(۰/۱۱۰)}{۲\pi(۰/۱۸۰)^{۲}}$$
$$=۵/۱۶\times۱۰^{-۱۲}\ \text{T}$$

بخش ۲۸-۶ آهنرباها

•۳۰- فرض کنید مقدار میانگین مؤلفهٔ عمودی میدان مغناطیسی زمین در همهٔ آریزونا[1] که دارای مساحت $۲/۹۵\times۱۰^{۵}\ \text{km}^{۲}$ است برابر $۴۳\mu\text{T}$ (به طرف پایین) است. در این صورت، (الف) بزرگی و (ب) جهت (به طرف داخل یا طرف خارج) شار خالص عبوری از بقیهٔ سطح زمین (جدا از سطح آریزونا) چقدر است؟

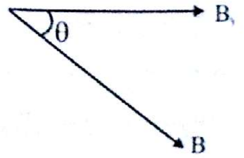
حل: (الف) و (ب) اگر شار گذرنده از این سطح را $\Phi_۱$ و شار گذرنده از بقیه سطح زمین را $\Phi_۲$ بنامیم در این صورت:

$$\Phi_۱+\Phi_۲=۰$$
$$\Phi_۲=-\Phi_۱=-BA=-(-۴۳/۶\times۱۰^{-۶})(۲/۹۵\times۱۰^{۵}\times۱۰^{۶})$$
$$=۱/۲۹\times۱۰^{۷}\ \text{T}\cdot\text{m}^{۲}$$

چون علامت آن مثبت است، شار به طرف خارج سطح است.

•۳۱- در نیوهمشایر[2] میانگین مؤلفهٔ افقی میدان مغناطیسی زمین در سال ۱۹۱۲/۱۲۹۱، $۱۶\mu\text{T}$ و میانگین زاویهٔ میل ۷۳° بوده است. بزرگی میدان مغناطیسی مربوط به زمین چقدر بوده است؟ SSM

حل:



$$B_۱=B\cos\theta \Rightarrow B=\frac{B_۱}{\cos\theta}$$
$$B=\frac{(۱۶)}{(\cos۷۳)}=۵۴/۷\mu\text{T}$$

بخش ۲۸-۷ مغناطیس و الکترون‌ها

•۳۲- اختلاف انرژی میان همردیفی موازی و پادموازی مؤلفهٔ z گشتاور دو قطبی مغناطیسی اسپینی الکترونها با میدان مغناطیسی خارجی $۰/۲۵\text{T}$ در جهت موازی با محور z، چقدر است؟

حل: $U=-\vec{\mu}_s\cdot\vec{B}_e$

از طرفی داریم:

$$\mu_s=۹/۲۷\times۱۰^{-۲۴}\ \text{J/T}$$
$$U_۱=-(۹/۲۷\times۱۰^{-۲۴})(۰/۲۵)\cos۰=-۲/۳۲\times۱۰^{-۲۴}\ \text{J}$$
$$U_۲=-(۹/۲۷\times۱۰^{-۲۴})(۰/۲۵)\cos\pi=۲/۳۲\times۱۰^{-۲۴}\ \text{J}$$
$$\Delta U=U_۲-U_۱=۴/۶۴\times۱۰^{-۲۴}\ \text{J}$$

•۳۳- مؤلفهٔ اندازه‌گیری شدهٔ گشتاور دو قطبی مغناطیسی مداری الکترون با (الف) $m_l=۱$ و (ب) $m_l=-۲$، چقدر است؟ SSM

حل: از رابطه (۲۸-۳۱) داریم:

$$\mu_{\text{orb},z}=-m_l\frac{eh}{۴\pi m}$$

(الف)
$$M_{o,z}=-(۱)\frac{(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۶/۶۳\times۱۰^{-۳۴})}{(۴)(۳/۱۴)(۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱})}$$
$$=-۹/۳\times۱۰^{-۲۴}\ \text{J/T}$$

(ب)
$$M_{o.z}=-(۲)\frac{(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۶/۶۳\times۱۰^{-۳۴})}{(۴)(۳/۱۴)(۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱})}$$
$$=-۱/۸۶\times۱۰^{-۲۳}\ \text{J/T}$$

•۳۴- الکترونی در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ که در امتداد محور z است قرار دارد. اختلاف انرژی میان سمتگیری موازی و پادموازی مؤلفهٔ z گشتاور مغناطیسی اسپینی با $\vec{B}$ برابر $۶/۰۰\times۱۰^{-۲۵}\ \text{J}$ است. بزرگی $\vec{B}$ چقدر است؟

حل:

$$\Delta U=۲\mu_s B$$
$$۶\times۱۰^{-۲۵}=(۲)(۹/۲۷\times۱۰^{-۲۴})B$$
$$B=۳/۲۴\times۱۰^{-۲}\ \text{T}$$

•۳۵- اگر الکترونی در یک اتم دارای اندازه حرکت زاویه‌ای مداری $m_l=۰$ باشد، مؤلفه‌های (الف) $L_{\text{orb},z}$ و (ب) $\mu_{\text{orb},z}$ چقدرند؟ اگر اتم در میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}$ که دارای بزرگی ۳۵mT و در امتداد محور z است قرار گیرد، (پ) انرژی پتانسیل U_{orb} مربوط به $\vec{\mu}_{\text{orb},z}$ و (ت) انرژی پتانسیل U_{spin} مربوط به $\vec{\mu}_s$ چقدرند؟ حال اگر، الکترون دارای $m_l=-۳$ باشد (ث) $L_{\text{orb},z}$، (ج) $\mu_{\text{orb},z}$، (چ) U_{orb} و (ح) U_{spin} چقدرند؟ SSM WWW

حل:

$$L_{o,z}=m_L\frac{h}{۲\pi}$$

(الف)
$$M_L=۰\Rightarrow L_{o,z}=۰$$

1. Arizona

Scanned by CamScanner

$\mu_{o,z} = -m_L \dfrac{eh}{۴\pi m} = -\dfrac{e}{۲m} L_{o,z} = ۰$

(ب) $U = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B} = ۰$

(پ) $U = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B} = -(\pm ۹/۲۷\times ۱۰^{-۲۴})(۳۵\times ۱۰^{-۳})$

(ت) $= \mp ۳/۲۴\times ۱۰^{-۲۵}$ J

(ث) $L_{o,z} = (-۳)\dfrac{(۶/۶۳\times ۱۰^{-۳۴})}{(۲)(۳/۱۴)} = -۳/۱۷\times ۱۰^{-۳۴}$ J·s

(ج) $\mu_{o,z} = -\dfrac{e}{۲m} L_{o,z} = -\dfrac{(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})}{(۲)(۹/۱۱\times ۱۰^{-۳۱})}(-۳/۱۷\times ۱۰^{-۳۴})$

$= ۲/۷۸\times ۱۰^{-۲۳}$ J/T

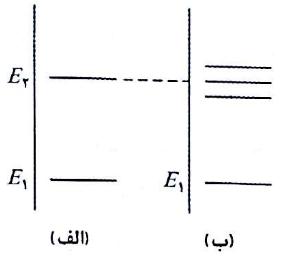
(چ) $U_۰ = -\vec{\mu}_۰ \cdot \vec{B} = -(۲/۸۷\times ۱۰^{-۲۴})(۳۵\times ۱۰^{-۳})$

$= -۹/۷۳\times ۱۰^{-۲۵}$ J

(ح) $U = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B} = -(\pm ۹/۲۷\times ۱۰^{-۲۴})(۳۵\times ۱۰^{-۳})$

$= \pm ۳/۲۴\times ۱۰^{-۲۵}$ J

۳۶●- شکل ۲۸-۳۷ الف یک نمودار تک محوری است که در امتداد آن دو مقدار مجاز (*ترازهای*) یک اتم رسم شده‌اند. وقتی اتم در یک میدان مغناطیسی ۰/۵۰۰T قرار گیرد، نمودار به علت انرژی مربوط به $\vec{\mu}_{orb}.\vec{B}$ (از $\vec{\mu}_s$ چشمپوشی می‌کنیم) به نمودار شکل ۲۸-۳۷ ب تغییر می‌کند. تراز $E_۱$ تغییر نکرده است اما تراز $E_۲$ به ترازهای سه گانه (خیلی نزدیک به هم) شکافته شده است. مقدارهای مجاز m_l مربوط به (الف) تراز انرژی $E_۱$ و(ب) تراز انرژی $E_۲$ ، چقدرند؟ (پ) برحسب J ، مقدار انرژی مربوط به جدایی میان ترازهای سه گانه چقدر است؟



شکل ۲۸-۳۷ مسئلهٔ ۳۶

حل: $\mu = -m_L \dfrac{eh}{۴\pi m}$

(الف) تراز انرژی $E_۱$ تغییری نکرده است و $m_L = ۰$ می‌باشد پس:

$m_L = ۰$

(ب) $E_۲$ به سه خط تبدیل شده است.

$m_L = -۱, ۰, ۱$

(پ) $U = \vec{\mu}_L.\vec{B} = -m_L \dfrac{eh}{۴\pi m} B$

$\Delta U = \dfrac{eh}{۴\pi m} B = \dfrac{(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})(۶/۶۳\times ۱۰^{۳۴})(۰/۵)}{(۴)(۳/۱۴)(۹/۱۱\times ۱۰^{-۳۱})}$

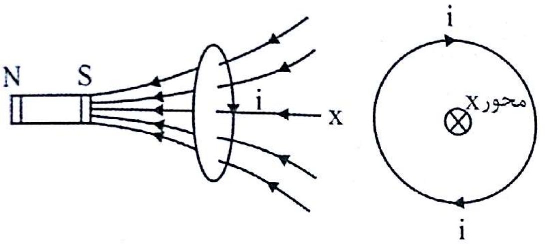
$= ۴/۶۳\times ۱۰^{-۲۴}$ J

بخش ۲۸-۹ دیامغناطیس

۳۷●- شکل ۲۸-۳۸ یک مدل حلقه‌ای (حلقهٔ L) را برای مادهٔ دیا مغناطیسی نشان می‌دهد. (الف) خطهای میدان مغناطیسی را که براثر آهنربای میله‌ای از ماده و اطراف آن می‌گذرد رسم کنید. (ب) جهت گشتاور دو قطبی مغناطیسی خالص $\vec{\mu}$ چیست؟ (پ) جریان قراردادی i در حلقه در چه جهتی است (ساعتگرد یا پادساعتگرد در شکل)؟ (ت) نیروی مغناطیسی وارد بر حلقه در چه جهتی است؟

شکل ۲۸-۳۸ مسئلهٔ ۳۷ و ۷۳

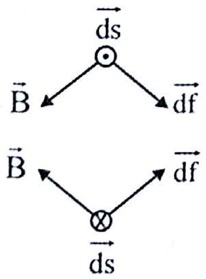
حل: (الف)



(ب) با توجه به جهت میدان هم‌گرا در شکل، جهت μ_o (مداری) در جهت محور x (خلاف جهت $\vec{B}$) است.

(پ) جهت جریان در حلقه طوری است که μ_o را به وجود آورد. بنابراین اگر طوری به حلقه نگاه کنیم که محور xها عمود بر حلقه، به سمت داخل (درون‌سو) باشد، جهت جریان ساعتگرد می‌شود.

(د) اگر دو عنصر از حلقه را که نسبت به مرکز حلقه قرینه هستند در نظر بگیریم، عنصر نیرو که به این عناصر وارد می‌شود، (مطابق شکل) جهت عمودی یکدیگر را خنثی می‌کنند.



فقط مؤلفه در امتداد محور x آنها باقی می‌ماند. بنابراین نیرو در جهت محور x می‌باشد.

۳۸●●●- فرضی کنید که الکترونی به جرم m و بزرگی بار e در مداری دایره‌ای به شعاع r به دور هسته می‌چرخد. سپس میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ عمود بر صفحهٔ مدار برقرار می‌شود. همچنین با فرض اینکه شعاع مدار تغییر نمی‌کند و اینکه تغییر تندی الکترون براثر میدان $\vec{B}$ ناچیز است، عبارتی را برای تغییر در گشتاور دو قطبی مغناطیسی مداری الکترون ناشی از میدان به دست آورید.

Scanned by CamScanner

حل: قبل از اعمال میدان یکنواخت خارجی، گشتاور مغناطیسی حلقه برابر است با:

$$\mu = iA = \frac{e}{T}\pi r^{2}$$

که r شعاع دوران الکترون و T دوره حرکت آن است.

$$T = \frac{2\pi r}{V}$$

$$\mu = \frac{e\pi r^{2}}{\frac{2\pi r}{V}} = \frac{1}{2}erV$$

$$\Delta\mu = \frac{1}{2}er\Delta V \qquad (1)$$

با اعمال میدان B، نیرویی به طرف مرکز دوران به الکترون وارد می‌شود.

$$F = m\frac{V^{2}}{r} \Rightarrow \Delta F = \frac{m}{r}2V\Delta V$$

تغییر نیروی جانب مرکز الکترون، نیروی مغناطیسی وارد بر آن است.

$$evB = \frac{2m}{r}V\Delta V \Rightarrow \Delta V = \frac{eBr}{2m}$$

با قرار دادن این عبارت در رابطه (۱) داریم:

$$\Delta\mu = \frac{1}{2}er\frac{eBr}{2m} = \frac{e^{2}Br^{2}}{4m}$$

بخش ۲۸-۱۰ پارامغناطیس

۳۹●- آهنربایی به شکل میله‌ای استوانه‌ای دارای طول ۵/۰۰cm و قطر ۱/۰۰cm است. آهنربا دارای مغناطیدگی یکنواخت $5/30\times10^{3}$ A/m است. گشتاور دو قطبی مغناطیسی آن چقدر است؟ SSM ILW

حل: از رابطه گشتاور دو قطبی داریم:

$$M = \frac{\mu}{V} = \frac{\mu}{\pi R^{2}l}$$

$$5/30\times10^{3} = \frac{\mu}{(3/14)(0/5\times10^{2})^{2}(5\times10^{-2})}$$

$$\mu = 2/08\times10^{-2}\ \text{J/T}$$

۴۰●- میدان مغناطیسی ۰/۵۰T به گازی پارامغناطیسی که اتمهایش دارای گشتاور دو قطبی مغناطیسی ذاتی $1/0\times10^{-23}$J/T هستند اعمال می‌شود. در چه دمایی انرژی جنبشی میانگین انتقالی اتمهای گاز با انرژی مورد نیاز برای وارونه کردن دو قطبی در این میدان مغناطیسی برابر است؟

حل: انرژی لازم برای عوض کردن جهت دوقطبی مغناطیسی برابر است با:

$$E = \Delta U = 2\mu_{B} = (2)(1\times10^{-23})(0/50) = 1\times10^{-23}\ \text{J}$$

۴۱●- نمونه‌ای از یک نمک پارامغناطیسی با منحنی مغناطیدگی شکل ۲۸-۱۴، برای اینکه آیا از قانون کوری پیروی می‌کند یا خیر مورد آزمون قرار می‌گیرد. نمونه در میدان مغناطیسی یکنواخت ۰/۵۰T قرار داده می‌شود که در طول آزمایش ثابت می‌ماند. سپس مغناطیدگی M در محدودهٔ دمای ۱۰ تا ۳۰۰K اندازه‌گیری می‌شود. آیا قانون کوری در این شرایط برقرار است؟

حل:

$$\frac{B}{T_1} = \frac{0/5}{10} = 0/5\ \text{T/K}$$

$$\frac{B}{T_2} = \frac{0/5}{300} = 0/0016\ \text{T/K}$$

با توجه به نمودار تا قبل از نسبت $\frac{B}{T} \cong 0/5T/K$ منحنی از قانون کوری پیروی می‌نماید.

۴۲●- نمونه‌ای از یک نمک پارامغناطیسی با منحنی مغناطیدگی شکل ۲۸-۱۴ در دمای اتاق (۳۰۰K) قرار دارد. در چه میدان مغناطیسی اعمال شده‌ای اشباع مغناطیسی نمونه (الف) ۵۰٪ و (ب) ۹۰٪ خواهد بود؟ (پ) آیا این میدانها در آزمایشگاه قابل دسترسی‌اند؟

حل: (الف) با استفاده از نمودار، با توجه به

$$\frac{M}{M_{\max}} = \frac{50}{100} = 0/5$$

نسبت $\frac{B}{T}$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{B}{T} \cong 0/5\frac{T}{K}$$

$$B = 0/5\times300 = 150\text{T}$$

(ب)

$$\frac{M}{M_{\max}} = \frac{90}{100} = 0/9$$

$$\frac{B}{T} \cong 2/8\frac{T}{K} \Rightarrow \frac{B}{300} = 2/8$$

$$B = 840$$

(پ) این میدان‌ها بسیار بزرگ هستند. در آزمایشگاه‌های معمولی، معمولاً میدان مغناطیسی ۱ T قابل دسترسی است.

۴۳●●- الکترونی با انرژی جنبشی K_e در مسیری دایره‌ای که عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت در جهت مثبت محور z است حرکت می‌کند. حرکت الکترون فقط از نیروی ناشی از میدان تأثیر می‌پذیرد. (الف) نشان دهید که گشتاور دو قطبی مغناطیسی الکترون بر اثر حرکت مداری آن دارای بزرگی $\mu = K_e / B$ و جهت آن مخالف جهت $\vec{B}$ است. (ب) بزرگی و (پ) جهت گشتاور دو قطبی مغناطیسی یک یون مثبت با انرژی جنبشی k_i با شرایط یکسان چیست؟ (ت) یک گازیونیده شامل $5/3\times10^{21}$ الکترون بر مترمکعب و دارای همین تعداد یون است. فرض کنید انرژی جنبشی میانگین الکترون $6/2\times10^{-21}$J و انرژی جنبشی میانگین یون $7/2\times10^{-21}$ J باشد. مغناطیدگی گاز را وقتی در میدان مغناطیسی ۱/۲T قرار گیرد محاسبه کنید.

حل: (الف)

$$F_B = eVB = m\frac{V^{2}}{R} \Rightarrow r = \frac{mv}{eB}$$

Scanned by CamScanner

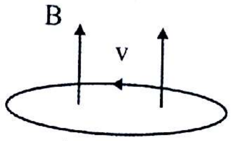
$$T = \frac{۲\pi r}{v}$$

از تعریف μ داریم:

$$\mu = iA = \frac{e}{T}\pi r^{۲} = \frac{e}{\frac{۲\pi r}{V}}\cdot \pi r^{۲} = \frac{۱}{۲}erv = \frac{۱}{۲}e\frac{mv}{eB}v$$

$$\mu = \frac{۱}{B}\frac{۱}{۲}mv^{۲} = \frac{K_e}{B}$$

فرض می‌کنیم جهت میدان رو به بالا و جهت حرکت الکترون پادساعتگرد باشد. جهت جریان (خلاف جهت حرکت بار منفی) ساعتگرد می‌گردد و بنابراین جهت μ رو به پایین و خلاف B می‌باشد.



(ب) و (ج) با روش مشابه خواهیم داشت:

$$\mu = \frac{K_i}{B}$$

فقط جهت μ در جهت B است.

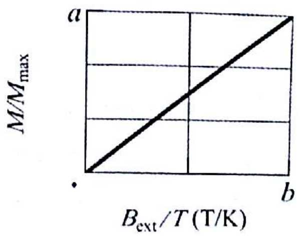
(د)
$$M = \frac{\mu_{کل}}{V} = \frac{۱}{V}(N_e\mu_e + N_i\mu_i)$$

به فرض مسئله $n = n_e = n_i$ می‌باشد.

$$M = \frac{N}{V}(\mu_e + \mu_i) = \frac{N}{V}\left(\frac{ke}{B} + \frac{ki}{B}\right) = \frac{n}{B}(K_e + K_i)$$

$$M = \frac{(۵/۳\times ۱۰^{۲۱})}{(۱/۲)}(۶/۲\times ۱۰^{-۲۰} + ۷/۶\times ۱۰^{-۲۱})$$
$$= ۳۰۷\,\text{A/m}$$

۴۴• شکل ۲۸-۳۹ منحنی مغناطیدگی را برای یک مادهٔ پارامغناطیسی به دست می‌دهد. مقیاس محور قائم با $a = ۰/۱۵$ و مقیاس محور افقی با $b = ۰/۲\,\text{T/K}$ مشخص شده است. فرض کنید μ_{sam} گشتاور مغناطیسی خالص اندازه‌گیری شده در مادهٔ نمونه و μ_{max} گشتاور مغناطیسی خالص بیشینهٔ ممکن در این نمونه باشد. بنابر قانون کوری وقتی نمونه در میدان مغناطیسی یکنواخت با بزرگی $۰/۸۰۰\,\text{T}$ قرار داده شود، در دمای $۲/۰۰\,\text{K}$ نسبت μ_{sam}/μ_{max} چه خواهد بود؟



شکل ۲۸-۳۹ مسئلهٔ ۴۴

حل:
$$\frac{B}{T} = \frac{۰/۸}{۲} = ۰/۴\ \text{T/K}$$

با توجه به نمودار اگر رابطه خطی محفوظ بماند در این صورت داریم:

$$\frac{M}{M_{max}} = ۰/۳۰$$

$$\frac{\mu}{\mu_{max}} = \frac{M}{M_{max}} = ۰/۳$$

۴۵- جسم صلبی را در نظر بگیرید که شامل N اتم در یکای حجم و هر اتم دارای گشتاور دو قطبی مغناطیسی $\vec{\mu}$ است. فرض کنید جهت $\vec{\mu}$ فقط می‌تواند موازی یا پاد موازی با میدان مغناطیسی اعمال شدهٔ خارجی $\vec{B}$ باشد (این حالتی خواهد بود که $\vec{\mu}$ ناشی از اسپین یک الکترون منفرد باشد). بنابر مکانیک آماری، احتمال اینکه یک اتم در حالتی با انرژی U باشد متناسب با $e^{-U/kT}$ است، که در آن T دما و k ثابت بولتزمن است. بنابراین، چون انرژی U برابر $-\vec{\mu}.\vec{B}$ است، کسر اتمهایی که گشتاور دو قطبی آنها موازی $\vec{B}$ باشد متناسب با $e^{\mu B/kT}$ و کسر اتمهایی که گشتاور دو قطبی آنها پادموازی با $\vec{B}$ باشد متناسب با $e^{-\mu B/kT}$ است. (الف) نشان دهید که مغناطش این جسم صلب برابر است با $M = N\mu\tanh(\mu B/kT)$. در اینجا tanh تابع تانژانت هذلولوی است: $\tanh(x) = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$. (ب) نشان دهید که نتیجهٔ داده شده در (الف) به ازای $B < kT$ به $M = N\mu^{۲}B/kT$ تبدیل می‌شود. (پ) نشان دهید که نتیجهٔ داده شده در (الف) به‌ازای $B \gg kT$ به $M = N\mu$ تبدیل می‌شود. (ت) نشان دهید که هر دو قسمت (ب) و (پ) به طور کیفی با شکل ۲۸-۱۴ سازگارند.

حل: (الف) از نماد $P(\mu)$ برای احتمال اینکه یک دو قطبی موازی میدان $\vec{B}$ باشد، و از نماد $P(-\mu)$ برای احتمال آنکه یک دو قطبی پادموازی این میدان باشد، استفاده می‌کنیم. مغناطیدگی را می‌توان به عنوان "میانگین وزنی" این احتمالات در نظر گرفت. زیرا مغناطیدگی در اینجا به صورت $M = (N_۱ - N_۲)\mu$ تعریف می‌شود. درصد اتم‌هایی که گشتاور دوقطبی آنها موازی میدان است برابر است با:

$$\frac{N_۱}{N} = \frac{P(\mu)}{P(\mu) + P(-\mu)}$$

و برای درصد اتم‌هایی که گشتاور دوقطبی آنها پادموازی میدان است داریم:

$$\frac{N_۲}{N} = \frac{P(-\mu)}{P(\mu) + P(-\mu)}$$

و از آنجا M چنین می‌شود

$$M = \frac{N\mu P(\mu) - N\mu P(-\mu)}{P(\mu) + P(-\mu)} = \frac{N\mu(e^{-\mu B/kT} - e^{-\mu B/kT})}{e^{-\mu B/kT} + e^{-\mu B/kT}}$$
$$= N\mu\tanh\left(\frac{\mu B}{kT}\right)$$

(ب) به ازای $\mu B \ll kT$ (که به معنی $\mu B/kT \ll ۱$ است) $e^{\pm\mu B/kT} \approx ۱ \pm \mu B/kT$ می‌شود و از آنجا برای M داریم:

$$M = N\mu\tanh\left(\frac{\mu B}{kT}\right) \approx \frac{N\mu[(۱ + \mu B/kT) - (۱ - \mu B/kT)]}{[(۱ + \mu B/kT) + (۱ - \mu B/kT)]}$$
$$= \frac{N\mu^{۲}B}{kT}$$

Scanned by CamScanner

(پ) به ازای $\mu B \gg kT$ ، $\tanh(\mu B/kT) \approx ۱$ می‌شود و از آنجا داریم:

$$M = N\mu \tanh\left(\frac{\mu B}{kT}\right) \approx N\mu$$

(ت) یک روش آن است که تابع $\tan h$ را رسم و با منحنی شکل ۲۸-۱۴ مقایسه کنیم. می‌توانیم به طور تحلیلی نیز این سازگاری را بررسی کنیم. توجه کنید N تعداد اتمها در یکای حجم است و نتیجهٔ قسمت (پ) را می‌توان به صورت $M_{max} = N\mu$ نوشت. پس M/M_{max} برای $\mu B \ll kT$ با استفاده از نتیجهٔ قسمت (ب) چنین می‌شود

$$\frac{M}{M_{max}} \approx \frac{\mu B}{kT} = C\frac{B}{T}$$

که این همان قانون کوری است که به ازای $B/T < ۰/۵۴\ \text{T/K}$ معتبر است و منطبق بر ابتدای منحنی شکل ۲۸-۱۴ می‌شود. ولی به ازای $\mu B \gg kT$ بدیهی است که $M/M_{max} = ۱$ می‌شود که اگر به منحنی شکل ۲۸-۱۴ توجه کنید در می‌یابید که در حالت $B/T \gg ۱$ نسبت M به M_{max} به سمت عدد ۱ میل می‌کند.

بخش ۲۸-۱۱ فرومغناطیس

۴۶•- بزرگی گشتاور دو قطبی مربوط به اتم آهن در یک میلهٔ آهنی $۲/۱\times۱۰^{-۲۳}\ \text{J/T}$ است. فرض کنید که تمام اتمها در میله که طول آن $۵/۰\text{cm}$ و مساحت سطح مقطع آن $۱/۰\text{cm}^۲$ است گشتاورهای دو قطبی همردیف داشته باشند. (الف) گشتاور دو قطبی میله چقدر است؟ (ب) برای نگهداری این آهنربا به طور عمود بر میدان خارجی $۱/۵\text{T}$، چه گشتاور نیرویی باید اعمال شود؟ (چگالی آهن $۷/۹\ \text{g/m}^۳$ است.)

حل: (الف)

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{Mn}{V} = \frac{M\frac{N}{NA}}{V} = \frac{MN}{VN_A}$$

$$N = \frac{\rho V N_A}{M}$$

که در آن N_A عدد آووگادرو و V حجم و M جرم اتمی (یا مولکولی) است.

$$N = \frac{(۷/۹\times۱۰^۳)(۵\times۱\times۱۰^{-۶})(۶/۰۲\times۱۰^{۲۳})}{(۵۵/۸۵\times۱۰^{-۳})} = ۴/۲۵\times۱۰^{۲۳}$$

$$\mu = N\mu_{\text{اتم}} = (۴/۲۵\times۱۰^{۲۳})(۲/۱\times۱۰^{-۲۳}) = ۸/۹۳\ \text{J/T}$$

(ب)

$$\tau = \mu B = (۸/۹۳)(۱/۵) = ۱۳/۴\ \text{N}\cdot\text{m}$$

۴۷•- جفت شدگی تبادلی که به عنوان عاملی برای فرومغناطیس در بخش ۲۸-۱۱ ذکر شد، برهم کنش مغناطیسی متقابل بین دو دوقطبی مغناطیسی بنیادی نیست. برای نشان دادن این مطلب، مطلوب است محاسبهٔ (الف) بزرگی میدان مغناطیسی در فاصلهٔ ۱۰nm در امتداد محور دو قطبی از یک اتم با گشتاور دو قطبی مغناطیسی $۱/۵\times۱۰^{-۲۳}\text{J/T}$ (کبالت) و (ب) کمترین انرژی مورد نیاز برای چرخاندن دو قطبی مشابه دوم از یک سر به سر دیگر در این میدان. (پ) با مقایسهٔ مطلب اخیر با نتیجه‌های مسئلهٔ نمونهٔ ۲۸-۳ چه چیزی حاصل می‌شود؟ SSM

حل: (الف) میدان مغناطیسی یک دو قطبی روی محور آن با معادله ۲۴-۲۹ داده می‌شود. از آنجا داریم

$$B = \frac{\mu_۰}{۲\pi}\frac{\mu}{z^۳} = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})}{۲\pi}\frac{(۱/۵\times۱۰^{-۲۳})}{(۱۰\times۱۰^{-۹}\ \text{m})^۳}$$

$$= ۳/۰\times۱۰^{-۶}\ \text{T} = ۳/۰\mu\text{T}$$

(ب) انرژی یک دوقطبی مغناطیسی در میدان مغناطیسی با $U = -\vec{\mu}.\vec{B} = -\mu B\cos\phi$ داده می‌شود که ϕ زاویه میان گشتاور دوقطبی و میدان است. در نتیجه، انرژی لازم برای چرخامدن یک دو قطبی از یک سر به سر دیگر (از $\phi = ۰°$ به $\phi = ۱۸۰°$) چنین می‌شود

$$\Delta U = \mu B(\cos۰° - \cos۱۸۰°) = ۲\mu B$$
$$= ۲(۱/۵\times۱۰^{-۲۳})(۳/۰\times۱۰^{-۶}) = ۹/۰\times۱۰^{-۲۹}\ \text{J}$$
$$= ۵/۶۲\times۱۰^{-۱۰}\text{eV}$$

با مقایسه با مقدار انرژی جنبشی انتقالی میانگین یک اتم گاز در دمای اتاق، که طبق مسئله نمونه ۲۸-۳ تقریباً برابر با ۰/۰۴eV است، نتیجه می‌گیریم که بر هم کنش دوقطبی- دوقطبی نمی‌تواند باعث همردیفی دوقطبی‌ها شود.

۴۸•- اندازه‌گیری‌ها در معادن و چاههای تجسسی بیانگر این است که دمای داخل زمین برحسب عمق با آهنگ میانگین $۳۰\text{C}°/\text{km}$ افزایش می‌یابد. با فرض اینکه دمای سطح زمین $۱۰°\text{C}$ است، در چه عمقی آهن دیگر فرومغناطیس نخواهد بود؟ (دمای کوری آهن با فشار خیلی کم تغییر می‌کند.)

حل: اگر دمای یک ماده فرو مغناطیسی از دمای کوری بیشتر شود، جفت شدگی تبادلی از اثر می‌افتد و آن ماده پارامغناطیس می‌شود. دمای کوری برای آهن $۷۷۰°C$ است. اگر x عمقی باشد که در آن دما به این مقدار می‌رسد، آنگاه خواهیم داشت:

$$۱۰° + (۳۰°)x = ۷۷۰°\ \text{C}$$

و از آنجا عمق x به دست می‌آید

$$x = \frac{۷۷۰° - ۱۰°}{۳۰°} = ۲۵/۳۳\ \text{km}$$

۴۹•- مغناطیدگی اشباع M_{max} نیکل فلزی فروّ مغناطیسی برابر $۴/۷۰\times۱۰^۵\ \text{A/m}$ است. گشتاور دو قطبی مغناطیسی تک اتم نیکل را محاسبه کنید. (چگالی نیکل $۸/۹۰\text{g/cm}^۳$ و جرم مولی آن $۵۸/۷۱\ \text{g/mol}$ است.)

حل: مغناطیدگی اشباع در وضعیت همردیفی تمام دوقطبی‌ها به دست می‌آید. اگر n تعداد اتمها بر یکای حجم باشد، مغناطیدگی اشباع از رابطه $M_{sat} = n\mu$ به دست می‌آید که در آن μ گشتاور دوقطبی مغناطیسی هم اتم است. تعداد اتمها بر یکای حجم از $n = \rho/m$ به دست می‌آید که در آن m هر اتم و برابر $m = M/N_A$ است. بنابراین برای تعداد اتم‌های نیکل در یکای حجم داریم

Scanned by CamScanner

$$n=\frac{\rho N_A}{M}=\frac{(۸/۹۰)(۶/۰۲\times۱۰^{۲۳})}{۵۸/۷۱}$$
$$=۹/۱۲۶\times۱۰^{۲۲}\ /cm^۳=۹/۱۲۶\times۱۰^{۲۸}\ /m^۳$$

از آنجا گشتاور دوقطبی یک اتم نیکل چنین می‌شود

$$\mu=\frac{M_{sat}}{n}=\frac{۴/۷۰\times۱۰^۵}{۹/۱۲۶\times۱۰^{۲۸}}=۵/۱۵\times۱۰^{-۲۴}\ A\cdot m^۲$$

۵۰●●- یک قطب‌نمای مغناطیسی را روی یک سطح افقی قرار می‌دهیم، و می‌گذاریم تا عقربه در وضعیت تعادلش قرار گیرد. سپس، یک ضربهٔ آرام به قطب‌نما وارد می‌کنیم به طوری که عقربه حول وضعیت تعادلش نوسان کند. بسامد نوسان برابر ۰/۳۱۲Hz است. میدان مغناطیسی زمین در محل قطب‌نما دارای مؤلفهٔ افقی ۱۸/۰μT است. عقربه دارای گشتاور مغناطیسی ۰/۶۸۰mJ/T است. لختی چرخشی عقربه را حول محور (قائم) چرخش محاسبه کنید.

حل: از معادله ۲۴-۳۷ (و نیز معادله ۲۴-۳۶ را ببینید) گشتاور وارد بر عقربه را می‌توانیم به صورت $\tau=-\mu B_h\sin\theta$ بنویسیم که علامت منفی مبین آن است که این گشتاور در خلاف جابه‌جایی زاویه‌ای θ (که کوچک و برحسب رادیان فرض شده است) می‌باشد. تقریب زاویه کوچک به $\tau\approx-\mu B_h\theta$ می‌انجامد که این خبر از یک حرکت هماهنگ ساده با ثابت پیچش $\kappa=\mu B_h$ می‌دهد. دوره نوسان یک آونگ پیچشی با $T=۲\pi\sqrt{I/\kappa}$ داده می‌شود که I لختی دورانی است که به دنبال آن می‌گردیم. چون بسامد با ۰/۳۱۲Hz داده شده، دوره نوسان $T=۱/f\approx۳/۲s$ می‌شود. بنابراین I چنین می‌شود

$$I=\frac{T^۲\mu^۲B_h^۲}{۴\pi^۲}=\frac{(۳/۲s)^۲(۶/۸۰\times۱۰^{-۴}\ j/T)(۱۸/۰\times۱۰^{-۶}\ T)}{۴\pi^۲}$$
$$=۳/۱۸۵\times۱۰^{-۹}\ kg\cdot m^۲$$

۵۱●●- یک حلقهٔ رولند از مادهٔ فرومغناطیس تشکیل شده است. سطح مقطع دایره‌ای آن به شعاع داخلی ۵cm و شعاع خارجی ۶cm و با ۴۰۰ دور سیم پیچیده شده است. (الف) چه جریانی باید در سیم پیچها برقرار شود تا میدان چنبره‌ای با بزرگی $B_۰=۰/۲۰mT$ به دست آید؟ (ب) پیچهٔ ثانویهٔ دور چنبره دارای ۵۰ دور و مقاومت ۸/۰Ω است. اگر برای این مقدار $B_۰$ داشته باشیم $B_M=۸۰۰B_۰$، وقتی جریان در سیم‌پیچهای چنبره برقرار شود چه مقدار بار از پیچهٔ ثانویه می‌گذرد؟

حل: (الف) بزرگی میدان مغناطیسی چنبره‌ای با $B_۰=\mu_۰ni_P$ داده می‌شود که n تعداد دور در یکای طول چنبره و i_P جریان موردنیاز برای ایجاد این میدان (در غیاب ماده فرو مغناطیسی) است. اگر r_{avg}، شعاع میانگین باشد، برای n خواهیم داشت

$$n=\frac{N}{l}=\frac{N}{۲\pi r_{avg}}=\frac{۴۰۰\ \text{دور}}{۲\pi(۰/۰۵+۰/۰۶)/۲}=۱/۱۶\times۱۰^۳\ \text{دور}/m$$

بنابراین i_P چنین می‌شود:

$$i_P=\frac{B_۰}{\mu_۰n}=\frac{۰/۲۰\times۱۰^{-۳}}{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۱/۱۶\times۱۰^۳)}=۰/۱۳۸\ A$$

(ب) اگر Φ شار مغناطیسی عبوری از پیچه ثانویه باشد، آنگاه بزرگی emf القا شده در این پیچه با $\varepsilon=N(d\Phi/dt)$ و جریان در پیچه ثانویه با $i_s=\varepsilon/R$ داده می‌شود که R مقاومت این پیچه است. بنابراین داریم

$$i_s=\left(\frac{N}{R}\right)\frac{d\Phi}{dt}$$

آنگاه باری که از پیچه ثانویه می‌گذرد چنین می‌شود

$$q=\int i_s dt=\frac{N}{R}\int\frac{d\Phi}{dt}dt=\frac{N}{R}\int_۰^{\Phi}d\Phi=\frac{N\Phi}{R}$$

از طرفی، میدان مغناطیسی عبوری از پیچه ثانویه دارای بزرگی زیر است:

$$B=B_۰+B_M=(۱+۸۰۰)B=۸۰۱B_۰$$

میدان کل عمود بر صفحه پیچه ثانویه است و بنابراین شار مغناطیسی $\Phi=AB$ می‌شود که A مساحت حلقه رولند است (میدان داخل حلقه و نه در فضای میان حلقه و پیچه است). اگر r شعاع مقطع حلقه باشد، $A=\pi r^۲$ می‌شود و از آنجا برای شار مغناطیسی خواهیم داشت

$$\Phi=۸۰۱\pi r^۲B$$

با توجه به اینکه شعاع مقطع حلقه برابر با $r=(۶/۰-۵/۰)/۲=۰/۵۰cm$ است، برای Φ خواهیم داشت

$$\Phi=۸۰۱\pi(۰/۵۰\times۱۰^{-۲})^۲(۰/۲۰\times۱۰^{-۳})=۱/۲۶\times۱۰^{-۵}\ Wb$$

در نتیجه برای q خواهیم داشت

$$q=\frac{۵۰(۱/۲۶\times۱۰^{-۵})}{۸/۰}=۷/۸۵\times۱۰^{-۵}\ C$$

۵۲●●- یک میلهٔ مغناطیسی با طول ۶/۰۰cm و شعاع ۳/۰۰mm و مغناطیدگی $۲/۷۰\times۱۰^۳$ A/m (یکنواخت) می‌تواند نظیر عقربهٔ قطب‌نما حول مرکزش بچرخد. این میله در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به بزرگی ۳۵/۰mT طوری قرار داده می‌شود که گشتاور دو قطبی‌اش با $\vec{B}$ زاویهٔ ۶۸/۰° بسازد. (الف) بزرگی گشتاور نیروی وارد بر میله ناشی از $\vec{B}$ چقدر است؟ (ب) اگر زاویه ۳۴/۰° تغییر کند، انرژی پتانسیل مغناطیسی میله چقدر تغییر می‌کند؟

حل: (الف) معادله ۲۴-۳۶ چنین به دست می‌دهد

$$\tau=\mu_{\text{میله}}B(\cos\theta_f-\cos\theta_i)$$
$$=-(۲۷۰۰)(۰/۰۶)\pi(۰/۰۰۳)^۲(۰/۰۳۵)\times$$
$$[\cos(۳۴°)-\cos(۶۸°)]=-۷۲/۹\mu T$$

۵۳●●- بزرگی گشتاور دو قطبی مغناطیسی زمین $۸/۰\times۱۰^{۲۲}$J/T است. (الف) اگر منشاء این مغناطیس یک کرهٔ آهنی مغناطیده در مرکز زمین باشد، شعاع آن باید چقدر باشد؟ (ب) چنین کره‌ای چه کسری از حجم زمین را اشغال می‌کند؟ فرض کنید دو قطبیها به طور کامل همردیف هستند و چگالی هستهٔ داخلی زمین ۱۴g/cm³ است. گشتاور دو قطبی مغناطیسی اتم آهن

Scanned by CamScanner

$۲/۱\times ۱۰^{-۲۳}\,\text{J/T}$ است. (توجه: در واقع چنین تصور می‌شود که هستهٔ داخلی زمین به صورت هم مایع و هم صلب است و قسمتی از آن آهن است، اما آهنربای دائمی به عنوان منبع مغناطیس با ملاحظات چندی کنار گذاشته شده است. یکی از آنها این است که دما مسلماً بالاتر از نقطهٔ کوری است.) SSM ILW WWW

حل: اگر مغناطیدگی کره اشباع شده باشد، گشتاور دوقطبی کل با $\mu_{کل} = N\mu$ داده می‌شود که N تعداد اتم‌های آهن کره و μ گشتاور دوقطبی یک اتم آهنی است. می‌خواهیم شعاع کره آهنی با N اتم آهن را به دست آوریم. جرم چنین کره‌ای برابر Nm است که در آن m جرم هر اتم آهن است. این جرم همچنین برابر با $\rho V = ۴\pi\rho R^۳/۳$ است که ρ چگالی آهن و R شعاع کره است، بنابراین $Nm = ۴\pi\rho R^۳/۳$ می‌شود و از آنجا برای N خواهیم داشت

$$N = \frac{۴\pi\rho R^۳}{۳m}$$

با قرار دادن این مقدار در $\mu_{کل} = N\mu$ به رابطه زیر می‌رسیم

$$\mu_{کل} = \frac{۴\pi\rho R^۳\mu}{۳m}$$

حل آن برای R چنین به دست می‌دهد

$$R = \left(\frac{۳m\mu_{کل}}{۴\pi\rho\mu}\right)^{۱/۳}$$

جرم هر اتم آهن برابر است با

$$m = ۵۶u = (۵۶u)(۱/۶۶\times ۱۰^{-۲۷}\ kg/u) = ۹/۳۰\times ۱۰^{-۲۶}\ \text{kg}$$

بنابراین شعاع R چنین می‌شود

$$R = \left[\frac{۳(۹/۳۰\times ۱۰^{-۲۶})(۸/۰\times ۱۰^{۲۲})}{۴\pi(۱۴\times ۱۰^۳)(۲/۱\times ۱۰^{-۲۳})}\right]^{۱/۳} = ۱/۸\times ۱۰^۵\ \text{m}$$

(ب) نسبت به حجم کره به حجم زمین چنین می‌شود

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{۴/۳\,\pi R^۳}{۴/۳\,\pi R_e^۳} = \left(\frac{R}{R_e}\right)^۳$$

$$= \left(\frac{۱/۸۲\times ۱۰^۵}{۶/۳۷\times ۱۰^{-۵}}\right)^۳ = ۲/۳\times ۱۰^{-۵}$$

مسئله‌های اضافی

۵۴- دو صفحه (مطابق شکل ۲۸-۷) با جریان ثابتی تخلیه می‌شوند. هر صفحه دارای شعاع $۴/۰۰\text{cm}$ است. در حین تخلیه، در نقطه‌ای میان صفحه‌ها در فاصلهٔ شعاعی $۲/۰۰\text{cm}$ از محور مرکزی، بزرگی میدان مغناطیسی برابر $۱۲/۵\,\text{nT}$ است. (الف) بزرگی میدان مغناطیسی در فاصلهٔ شعاعی $۶/۰۰\text{cm}$ چقدر است؟ (ب) جریان در سیمی که دو صفحه را به هم متصل می‌کند چقدر است؟

حل: (الف) در فضای داخل خازن $B_۱ = \mu_۰ i_d r_۱/۲\pi R^۲$ است (معادله ۲۸-۱۶ را ببینید). در خارج خازن میدان مغناطیسی با $B_۲ = \mu_۰ i_d/۲\pi r_۲$ داده می‌شود (معادله ۲۸-۱۷ را ببینید). در نتیجه برای $B_۲$ داریم:

$$B_۲ = \frac{B_۱R^۲}{r_۱r_۲} = \frac{(۱۲/۵)(۴/۰۰)^۲}{(۲/۰۰)(۶/۰۰)} = ۱۶/۶۶\,n\text{T}$$

(ب) جریان جابه‌جایی را می‌توانیم با استفاده از هر یک از دو عبارت $B_۱$ یا $B_۲$ به دست آوریم. با استفاده از $B_۱$ داریم

$$i_d = \frac{۲\pi B_۱R^۲}{\mu_۰ r_۱} = \frac{۲\pi(۱۲/۵)(۴/۰۰\times ۱۰^{-۲})^۲}{(۴\pi\times ۱۰^{-۷})(۲/۰۰\times ۱۰^{-۲})} = ۵/۰۰\,\text{mA}$$

۵۵- میدان مغناطیسی زمین را با تقریب می‌توان به عنوان میدان یک دو قطبی مغناطیسی در نظر گرفت که مؤلفه‌های افقی و قائم آن در نقطه‌ای به فاصلهٔ r از مرکز زمین با رابطه‌های زیر داده می‌شوند

$$B_h = \frac{\mu_۰\mu}{۴\pi r^۳}\cos\lambda_m \quad و \quad B_v = \frac{\mu_۰\mu}{۲\pi r^۳}\sin\lambda_m$$

که در آنها λ_m *عرض جغرافیایی* است (این نوع عرض جغرافیایی از استوای ژئومغناطیسی به سمت شمال یا جنوب قطب ژئومغناطیسی اندازه‌گیری می‌شود.) فرض کنید که گشتاور دو قطبی مغناطیسی زمین $\mu = ۸/۰۰\times ۱۰^{۲۲}\text{A.m}^۲$ است. (الف) نشان دهید که بزرگی میدان مغناطیسی زمین در عرض جغرافیایی λ_m از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$B = \frac{\mu_۰\mu}{۴\pi r^۳}\sqrt{۱+۳\sin^۲\lambda_m}$$

(ب) نشان دهید که میل ϕ_i میدان مغناطیسی با این رابطه به عرضی جغرافیایی λ_m مربوط است ، $\tan\phi_i = ۲\tan\lambda_m$. SSM

حل: (الف) با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

$$B = \sqrt{B_h^۲ + B_v^۲} = \sqrt{\left(\frac{\mu_۰\mu}{۴\pi r^۳}\cos\lambda_m\right)^۲ + \left(\frac{\mu_۰\mu}{۲\pi r^۳}\sin\lambda_m\right)^۲}$$

$$= \frac{\mu_۰\mu}{۴\pi r^۳}\sqrt{\cos^۲\lambda_m + ۴\sin^۲\lambda_m} = \frac{\mu_۰\mu}{۴\pi r^۳}\sqrt{۱+۳\sin^۲\lambda_m}$$

که در آن از $\cos^۲\lambda_m + \sin^۲\lambda_m = ۱$ استفاده کردیم.

(ب) شیب میدان مغناطیسی چنین می‌شود

$$\tan\phi_i = \frac{B_v}{B_h} = \frac{(\mu_۰\mu/۲\pi r^۳)\sin\lambda_m}{(\mu_۰\mu/۴\pi r^۳)\cos\lambda_m} = ۲\tan\lambda_m$$

۵۶- با استفاده از نتیجه‌های مسئلهٔ ۵۵ (الف) بزرگی و (ب) میل میدان مغناطیسی زمین در استوای ژئومغناطیسی؛ (پ) بزرگی و (ت) میل در عرض ژئومغناطیسی $۶۰/۰^\circ$ ؛ و (ث) بزرگی و (ج) میل در قطب ژئومغناطیسی شمال را پیش‌بینی کنید.

حل: (الف) در استوای مغناطیسی ($\lambda_m = ۰$)، میدان برابر است $B_v = ۰$ با:

$$B = B_h = \frac{\mu_۰\mu}{۴\pi r^۳} = \frac{(۴\pi\times ۱۰^{-۷})(۸/۰۰\times ۱۰^{۲۲})}{۴\pi(۶/۳۷\times ۱۰^۶)^۳}$$

$$= ۳/۱۰\times ۱۰^{-۵}\ \text{T}$$

Scanned by CamScanner

(ب) و شیب میدان چنین می‌شود

$\tan\phi_i = ۲\tan\lambda_m = ۰ \Rightarrow \phi_i = ۰$

(پ)
$$B = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۸\times۱۰^{۲۲})}{(۴\pi)(۶/۳۷\times۱۰^{۶})^{۳}}\sqrt{۱+۳(\sin ۶۰^\circ)^{۲}}$$
$$= ۵/۵۹\times۱۰^{-۶}\ \mathrm{T}$$

(ت) $\tan\phi_i = ۲\tan ۶۰^\circ \Rightarrow \phi_i = ۷۳/۹^\circ$

(ث) در قطب $\lambda_m = ۹۰^\circ$ است

$B_h = ۰$

$$B = B_v = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۸\times۱۰^{۲۲})}{(۲\pi)(۶/۳۷\times۱۰^{۶})^{۳}} = ۶/۱۹\times۱۰^{-۵}\ \mathrm{T}$$

۵۷- زمین دارای گشتاور دو قطبی مغناطیسی $۸/۰\times۱۰^{۲۲}\ \mathrm{J/T}$ است. (الف) اگر بخواهیم یک دور سیم منفرد دور زمین در استوای جغرافیایی آن همین دو قطبی را ایجاد کند، چه جریانی باید از آن بگذرد؟ آیا چنین آرایشی می‌تواند برای خنثی کردن مغناطیس زمین (ب) در نقطه‌هایی در فضا کاملاً بالای سطح زمین و (پ) روی سطح زمین به کار رود؟

حل: (الف) با استفاده از $\mu = iA = i\pi R_e^{۲}$، جریان موردنیاز را به دست می‌آوریم:

$$i = \frac{\mu}{\pi R_e^{۲}} = \frac{۸/۰\times۱۰^{۲۲}}{\pi(۶/۳۷\times۱۰^{۶})^{۲}} = ۶/۲۷\times۱۰^{۸}\ \mathrm{A}$$

(ب) و (پ) کلاً ساختار میدان مغناطیسی زمین پیچیده است و در ساده‌ترین رویکرد هم این دو میدان متفاوت است و در نتیجه در روی سطح زمین میدان‌های مغناطیسی آنها نمی‌توانند همدیگر را خنثی کنند. ولی در نقاط به حد کافی دور، میدان مغناطیسی هر دو دوقطبی تقریباً مشابه هم می‌شود و می‌توانند همدیگر را خنثی کنند. کلاً تقریب دوقطبی در نقاط خیلی دور از مرکز زمین معتبر است.

۵۸- با به کاربردن تقریب داده شده در مسئلهٔ ۵۵، مطلوب است (الف) عرض جغرافیایی در بالای سطح زمین در جایی که بزرگی میدان مغناطیسی آن برابر ۵۰٪ مقدار آن روی سطح در همان عرض جغرافیایی باشد، (ب) بزرگی میدان مغناطیسی بیشینهٔ درمرزهسته- جبه، $۲۹۰۰\mathrm{km}$ زیر سطح زمین و (پ) بزرگی و (ت) میل میدان مغناطیسی زمین در قطب شمال جغرافیایی. توضیح دهید که چرا مقدارهایی که برای (پ) و (ت) محاسبه کرده‌اید با مقدارهای اندازه‌گیری شده متفاوت‌اند.

حل: (الف) در فاصله r از مرکز زمین، بزرگی میدان مغناطیسی با رابطه زیر داده می‌شود

$$B = \frac{\mu_۰\mu}{۴\pi r^{۳}}\sqrt{۱+۳\sin^{۲}\lambda_m}$$

که μ گشتاور دو قطبی مغناطیسی زمین و λ_m عرض مغناطیسی است. بنابراین نسبت بزرگی‌های میدان برای دو فاصله مختلف در یک عرض یکسان چنین می‌شود

$$\frac{B_۲}{B_۱} = \frac{r_۱^{۳}}{r_۲^{۳}}$$

که $B_۱$ اندازه میدان روی سطح و $B_۲$ اندازه میدان در جایی است که $B_۲$ نصف $B_۱$ است. $r_۱$ را برابر با R_e (شعاع زمین) و $r_۲$ را برابر با R_e+h می‌گیریم که h ارتفاعی است که در آن $B_۲ = ۰/۵B_۱$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲} = \frac{R_e^{۳}}{(R_e+h)^{۳}}$$

حال اگر ریشه سوم را از طرفین معادله بالا بگیریم و آن را برای h حل کنیم، خواهیم داشت:

$$h = (۲^{\frac{۱}{۳}}-۱)R_e = (۲^{\frac{۱}{۳}}-۱)(۶۳۷۰) = ۱/۶۶\times۱۰^{۳}\ \mathrm{km}$$

(ب) از عبارتی که برای B در قسمت (الف) مسئله ۷۱ به دست آوردیم، استفاده می‌کنیم. برای بیشینه B، $\sin\lambda_m = ۱/۰۰$ قرار می‌دهیم. همچنین $r = ۶۳۷۰\mathrm{km} - ۲۹۰۰\mathrm{km} = ۳۴۷۰\mathrm{km}$ است و بنابراین B_{max} چنین می‌شود

$$B_{max} = \frac{\mu_۰\mu}{۴\pi r^{۳}}\sqrt{۱+۳\sin^{۲}\lambda_m}$$
$$= \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۸/۰۰\times۱۰^{۲۲})}{۴\pi(۳/۴۷\times۱۰^{۶})^{۲}} = ۳/۸۳\times۱۰^{-۴}\ \mathrm{T}$$

(پ) زاویه میان محور مغناطیسی و محور دورانی زمین $۱۱/۵^\circ$ است. بنابراین در قطب شمال جغرافیایی $\lambda_m = ۹۰/۰^\circ - ۱۱/۵^\circ = ۷۸/۵^\circ$ می‌شود. همچنین $r = R_e = ۶۳۷۰km$ است و در نتیجه B چنین می‌شود

$$B = \frac{\mu_۰\mu}{۴\pi R_e^{۳}}\sqrt{۱+۳\sin^{۲}\lambda_m}$$
$$= \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۸/۰\times۱۰^{۲۲})\sqrt{۱+۳\sin^{۲}۷۸/۵^\circ}}{۴\pi(۶/۳۷\times۱۰^{۶})^{۳}}$$
$$= ۶/۱۱\times۱۰^{-۵}\ \mathrm{T}$$

(ت) شیب چنین می‌شود

$$\phi_i = \tan^{-۱}(۲\tan ۷۸/۵^\circ) = ۸۴/۲^\circ$$

(ث) فرمول به دست آمده در مسئله ۶ براساس تقریب دو قطبی است که به درستی میدان مغناطیسی واقعی زمین را در نزدیکی سطح آن به دست نمی دهد. تقریب دوقطبی در فاصله های دور از مرکز زمین معتبر است.

۵۹- می‌خواهیم یک خازن صفحه- موازی با صفحه‌های دایره‌ای با شعاع $۵۵/۰\mathrm{mm}$ را پرکنیم. در چه شعاعی (الف) داخل و (ب) خارج از فاصلهٔ خازن بزرگی میدان مغناطیسی القا شده برابر $۵۰/۰$٪ بیشینهٔ آن است.

حل: شعاع صفحه خازن را R و فاصله از محور خازن را r در نظر بگیرید. برای نقاط $r \le R$، بزرگی میدان مغناطیسی با رابطه زیر داده می‌شود

$$B = \frac{\mu_۰\varepsilon_۰ r}{۲}\frac{dE}{dt}$$

و برای نقاط $r \ge R$

Scanned by CamScanner

$$B = \frac{\mu_\circ \varepsilon_\circ R^۲}{۲r}\frac{dE}{dt}$$

بیشینه میدان مغناطیسی در $r = R$ رخ می‌دهد که آن را می‌توانیم با هر کدام از دو رابطه بالا به دست آوریم:

$$B = \frac{\mu_\circ \varepsilon_\circ R}{۲}\frac{dE}{dt}$$

دو مقدار برای r وجود دارد که به ازای آنها $B = B_{\max}/۲$ است، یکی کوچکتر از R و یکی بزرگتر از آن.

(الف) برای یافتن آن شعاعی که کوچکتر از R است، معادله زیر را برای r حل می‌کنیم

$$\frac{\mu_\circ \varepsilon_\circ r}{۲}\frac{dE}{dt} = \frac{\mu_\circ \varepsilon_\circ R}{۴}\frac{dE}{dt}$$

و از آنجا $r = R/۲ = (۵۵/۰)/۲ = ۲۷/۵\,mm$ می‌شود.

(ب) برای یافتن آن شعاعی که بزرگتر از R است، معادله زیر را برای r حل می‌کنیم

$$\frac{\mu_\circ \varepsilon_\circ R^۲}{۲r}\frac{dE}{dt} = \frac{\mu_\circ \varepsilon_\circ R}{۴}\frac{dE}{dt}$$

و از آنجا $r = ۲R = ۲(۵۵/۰) = ۱۱۰\,mm$ می‌شود.

۶۰- بار q به طور یکنواخت دور حلقهٔ باریکی به شعاع r توزیع شده است. حلقه حول محوری که از مرکز آن می‌گذرد و بر صفحهٔ حلقه عمود است با تندی زاویه‌ای ω ، می‌چرخد. (الف) نشان دهید که گشتاور مغناطیسی ناشی از بار در حال چرخش دارای بزرگی $\mu = \frac{۱}{۲}q\omega r^۲$ است. (ب) اگر بار مثبت باشد، این گشتاور مغناطیسی در چه جهتی است؟

حل: (الف) دوره چرخش با $T = ۲\pi/\omega$ داده می‌شود. بنابراین، جریان میانگین برابر با $i = q/T = q\omega/۲\pi$ و بزرگی گشتاور دوقطبی مغناطیسی چنین می‌شود:

$$\mu = iA = \frac{q\omega}{۲\pi}\pi r^۲ = \frac{۱}{۲}q\omega r^۲$$

(ب) انگشتان دست راست خود را در جهت دوران بپیچانید. چون بار مثبت است، شست در جهت گشتاور دوقطبی می‌شود. که این همان بردار گشتاور زاویه‌ای حلقه است.

۶۱- اگر الکترونی در یک اتم دارای اندازه حرکت زاویه‌ای مداری با مقدارهای m_l که به ±۳ محدودند باشد، الکترون چند مقدار (الف) $L_{orb,z}$ و (ب) $\mu_{orb,z}$ می‌تواند داشته باشد؟ برحسب h ، m و e بزرگترین مقدار مجاز برای (پ) $L_{orb,z}$ و (ت) $\mu_{orb,z}$ چقدر است؟ (ث) بزرگترین مقدار مجاز برای مؤلفهٔ z اندازه حرکت زاویه‌ای خالص الکترون (مداری به علاوهٔ اسپینی) چقدر است؟ (ج) چند مقدار (علامتها را در نظر بگیرید) برای مؤلفهٔ z اندازه حرکت زاویه‌ای خالص آن مجازند؟ SSM

حل: (الف)

$$m_L = ۰, \pm۱, \pm۲, \pm۳$$

داریم:

$$L_{o,z} = m_L\frac{h}{۲\pi}$$

تعداد $L_{o,z}$ به تعداد m_L یعنی هفت عدد می‌باشد.

(ب) داریم:

$$\mu_{o,z} = -m_L\frac{eh}{۴\pi m}$$

تعداد حالت‌های $\mu_{o,z}$ به تعداد m_L یعنی هفت عدد می‌باشد.

(پ) بیشترین مقدار مجاز برای $L_{o,z}$ برابر است با:

$$(L_{o,z})_m = ۳\frac{h}{۲\pi}$$

(ت)

$$(\mu_{o,z})_m = ۳\frac{eh}{۴\pi m}$$

(ث) داریم

$$S_z = m_s\frac{h}{۲\pi} \qquad m_s = \pm\frac{۱}{۲}$$

$$(S_z)_m = \frac{۱}{۲}\frac{h}{۲\pi}$$

$$j_z = L_{o,z} + S_z$$

$$(j_z)_m = ۳\frac{h}{۲\pi} + \frac{۱}{۲}\frac{h}{۲\pi} = ۳/۵\frac{h}{۲\pi}$$

(ج) با توجه به اینکه ۷ حالت برای $L_{o,z}$ و دو حالت برای S_z امکان دارد،

$$i_z = \pm\frac{۱}{۲}\frac{h}{۲\pi} + m_L\frac{h}{۲\pi} \qquad m_L = ۰, \pm۱, \pm۲, \pm۳, \pm۴$$

مجموعاً ۱۴ حالت امکان دارد که فقط ۸ حالت آنها مستقل هستند و بقیه تکرار می‌گردند.

۶۲- خازن شکل ۲۸-۷ با جریان ۲/۵۰A پر می‌شود. شعاع سیم ۱/۵۰mm و شعاع صفحه برابر ۲/۰۰cm است. فرض کنید که جریان i در سیم و جریان جابه‌جایی i_d در فاصلهٔ خازن هر دو به طور یکنواخت توزیع شده‌اند. مطلوب است تعیین بزرگی میدان مغناطیسی ناشی از i در فاصله‌های شعاعی (الف) ۱/۰۰mm (داخل سیم)، (ب) ۳/۰۰mm (خارج از سیم) و (پ) ۲/۲۰cm (خارج از سیم) از مرکز سیم. بزرگی میدان مغناطیسی ناشی از i_d را در فاصله‌های شعاعی (ت) ۱/۰۰mm (داخل فاصله)، (ث) ۳/۰۰mm (داخل فاصله) و (ج) ۲/۲۰cm (خارج از فاصله) از محور مرکزی میان صفحه‌ها پیدا کنید. (چ) توضیح دهید که چرا میدان برای دو شعاع کوچکتر سیم و فاصله این قدر متفاوت‌اند، اما میدانها برای بزرگترین شعاع متفاوت نیستند.

حل: (الف) میدان مغناطیسی داخل سیم $(r < R)$ با استفاده از معادله ۲۵-۲۰ به دست می‌آید:

$$B = \frac{\mu_\circ ir}{۲\pi R^۲} = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۲/۵۰)(۱/۰۰\times۱۰^{-۳})}{۲\pi(۱/۵۰\times۱۰^{-۳})^۲}$$

$$= ۲/۲۲\times۱۰^{-۴}\ T$$

(ب) میدان مغناطیسی بیرون سیم $(r > R)$ با استفاده از معادله ۲۵-۱۷ به دست می‌آید:

Scanned by CamScanner

$$B=\frac{\mu_\circ i}{۲\pi r}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۲/۵۰)}{۲\pi(۳/۰۰\times۱۰^{-۳})}=۱/۶۷\times۱۰^{-۴}\ \text{T}$$

(پ) مشابه قسمت (ب) داریم

$$B=\frac{\mu_\circ i}{۲\pi r}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۲/۵۰)}{۲\pi(۲/۲۰\times۱۰^{-۲})}=۲/۲۷\times۱۰^{-۵}\ \text{T}$$

(ت) معادله ۲۸-۱۶ برای میدان مغناطیسی داخل یک خازن دایره‌ای چنین به دست می‌دهد

$$B=\frac{\mu_\circ i_d r}{۲\pi R^۲}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۲/۵۰)(۱/۰۰\times۱۰^{-۳})}{۲\pi(۲/۰۰\times۱۰^{-۲})^۲}$$
$$=۱/۲۵\times۱۰^{-۶}\ \text{T}$$

توجه کنید که در این قسمت $R=۲/۰۰cm$ شعاع صفحه خازن و $i_d=i=۲/۵۰A$ از پایستگی جریان، قرار داده شد.

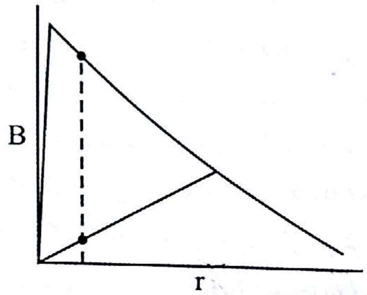
(ث) مشابه قسمت (ت) داریم

$$B=\frac{\mu_\circ i_d r}{۲\pi R^۲}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۲/۵۰)(۳/۰۰\times۱۰^{-۳})}{۲\pi(۲/۰۰\times۱۰^{-۲})^۲}$$
$$=۳/۷۵\times۱۰^{-۶}\ \text{T}$$

(ج) معادله ۲۸-۱۷ برای میدان مغناطیسی بیرون یک خازن دایره‌ای چنین به دست می‌دهد

$$B=\frac{\mu_\circ i_d}{۲\pi r}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۲/۵۰)}{۲\pi(۲/۲۰\times۱۰^{-۲})}=۲/۲۷\times۱۰^{-۵}\ \text{T}$$

(چ) چون جریان جابه‌جایی در بین صفحه‌ها روی سطح مقطع‌های بزرگتری توزیع می‌شوند، مقادیر B در میان این صفحه‌ها نسبتاً کوچک است. در بیرون مقطع صفحه‌ها، دو مقدار B یکسان‌اند. (و نیز پرسش ۴ کتاب را ببینید).



۶۳- فرض کنید که حدود مقدارهای m_l برای الکترون در اتم ±۴ باشد. (الف) برای مؤلفه z گشتاور دو قطبی مغناطیسی مداری $\mu_{\text{orb},z}$ چند مقدار متفاوت امکانپذیر است؟ (ب) بزرگترین این مقدارهای ممکن چیست؟ حال، فرض کنید که اتم در یک میدان مغناطیسی به بزرگی ۰/۲۵۰ T ، در جهت مثبت محور z قرار گیرد. (پ) انرژی پتانسیل بیشینه و (ت) انرژی پتانسیل کمینه مربوط به این مقدارهای ممکن $\mu_{\text{orb},z}$ چقدرند؟

حل: (الف) مجموعه کلیه مقادیر، ۹ مقدار ۴+ و ۳+ و ۲+ و ۱+ و ۰ و ۱- و ۲- و ۳- و ۴- می‌شود.

(ب) $۴\mu_B=۴(۹/۲۸\times۱۰^{-۲۴})=۳/۷۱\times۱۰^{-۲۴}\ \text{J/T}$ بزرگترین مقدار ممکن است.

(پ) اگر نتیجه قسمت (ب) را در ۰/۲۵۰ ضرب کنیم به $U=+۹/۲۷\times۱۰^{-۲۴}\ \text{J}$ می‌رسیم.

(ت) به همان ترتیب برای حد پایین‌تر به $U=-۹/۲۷\times۱۰^{-۲۴}\ \text{J}$ می‌رسیم.

۶۴- مؤلفهٔ اندازه‌گیری شدهٔ گشتاور دو قطبی مغناطیسی مداری الکترون با مقدارهای (الف) $m_l=۳$ و (ب) $m_l=-۴$ چقدر است؟

حل: (الف) با استفاده از معادله ۲۸-۳۱ داریم

$$\mu_{orb,z}=-۳\mu_B=-۳(۹/۲۸\times۱۰^{-۲۴})=-۲/۷۸\times۱۰^{-۲۳}\ \text{J/T}$$

(ب) به همان ترتیب، به ازای $m_i=-۴$، داریم

$$\mu_{orb,z}=-۴\mu_B=-۳(۹/۲۸\times۱۰^{-۲۴})=-۳/۷۱\times۱۰^{-۲۴}\ \text{J/T}$$

۶۵- عقربهٔ یک قطب‌نمای مغناطیسی با جرم ٪۵۰kg و طول ۴/۰cm همردیف مؤلفهٔ افقی میدان مغناطیسی زمین در جایی است که این مؤلفه مقدار $B_h=۱۶\mu\text{T}$ را دارد. پس از اینکه ضربهٔ آرامی به قطب‌نما وارد شود، عقربه با بسامد زاویه‌ای $\omega=۴۵\ \text{rad/s}$ نوسان می‌کند. با فرض اینکه عقربه یک میلهٔ باریک یکنواخت و روی مرکزش سوار شده است، بزرگی گشتاور دو قطبی مغناطیسی آن را به دست آورید.

حل: می‌توانیم از نتیجه مسئله نمونه ۲۸-۴ کتاب استفاده کنیم. با این حال در اینجا آن مراحل دوباره تکرار می‌کنیم. انرژی پتانسیل بر هم کنش بین دو قطبی مغناطیسی عقربه مغناطیسی و میدان مغناطیسی زمین $U=\vec{\mu}.\vec{B}_e=-\mu B_e\cos\theta$ داده می‌شود که θ زاویه میان $\vec{\mu}$ و $\vec{B}_e$ است. برای زاویه کوچک θ داریم

$$U(\theta)=-\mu B_e\cos\theta=-\mu B_e\left(۱-\frac{\theta^۲}{۲}\right)=\frac{۱}{۲}\kappa\theta^۲-\mu B_e$$

که در آن $\kappa=\mu B_e$ است. آنگاه پایستگی انرژی عقربه چنین به دست می‌دهد

$$\frac{۱}{۲}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^۲+\frac{۱}{۲}\kappa\theta^۲=\text{ثابت}$$

که این، مشابه با پایستگی انرژی مکانیکی دستگاه فنر – جرم است.

$$\frac{۱}{۲}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^۲+\frac{۱}{۲}kx^۲=\text{ثابت}$$

که به $\omega=\sqrt{k/m}$ می‌انجامد. بنابراین در تشابه با این نتیجه خواهیم داشت

$$\omega=\sqrt{\frac{\kappa}{I}}=\sqrt{\frac{\mu B_e}{I}}=\sqrt{\frac{\mu B_e}{ml^۲/۱۲}}$$

که در آن از لختی دورانی یک میله نسبت به محوری که از مرکز آن می‌گذرد، استفاده کردیم. از آنجا برای گشتاور دوقطبی عقربه مغناطیسی خواهیم داشت:

$$\mu=\frac{ml^۲\omega^۲}{۱۲B_e}=\frac{(۰/۰۵۰)(۴/۰\times۱۰^{-۲})^۲(۴۵)^۲}{۱۲(۱۶\times۱۰^{-۶})}$$
$$=۸/۳۴\times۱۰^۲\ \text{J/T}$$

Scanned by CamScanner

۶۶- می‌خواهیم یک خازن صفحه- موازی با صفحه‌های دایره‌ای را پرکنیم. یک حلقهٔ دایره‌ای هم مرکز با محور مرکزی واقع در میان صفحه‌ها را در نظر بگیرید. اگر شعاع حلقه ۳/۰۰cm بزرگتر از شعاع صفحه باشد، وقتی میدان مغناطیسی در طول حلقه دارای بزرگی ۲/۰۰μT باشد، جریان جابه‌جایی میان صفحه‌ها چقدر است؟

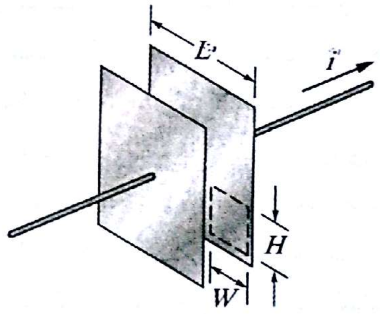
حل: در حالی که $r > R$ می‌باشد.

$$B = \frac{\mu_\circ i_d}{۲\pi r}$$

$$۲\times۱۰^{-۶} = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})i_d}{(۲\pi)(۳\times۱۰^{-۲})}$$

$$i_d = ۰/۳\text{A}$$

۶۷- در شکل ۲۸-۴۰، می‌خواهیم یک خازن صفحه - موازی را با جریان $i = ۵/۰\text{A}$ تخلیه کنیم. صفحه‌ها مربع به ضلع $L = ۸/۰\text{mm}$ هستند. (الف) آهنگی که با آن میدان الکتریکی میان صفحه‌ها تغییر می‌کند چقدر است؟ (ب) مقدار $\int \vec{B}\cdot d\vec{s}$ دور مسیر خط‌چین، که در آن $H = ۲/۰\text{mm}$ و $W = ۳/۰\text{mm}$، چقدر است؟



شکل ۲۸-۴۰ مسئلهٔ ۶۷

حل:

$$i_d = i = ۵\text{A}$$

(الف)

$$i_d = \varepsilon_\circ \frac{d\Phi}{dt} = \varepsilon_\circ A \frac{dE}{dt}$$

$$۵ = (۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۸\times۱۰^{-۳})^۲ \frac{dE}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt} = ۸/۸۳\times۱۰^{۱۵}$$

(ب)

$$\oint_c \vec{B}.\vec{ds} = \mu_\circ i'_d$$

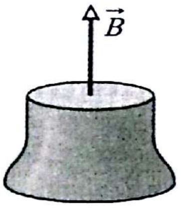
i'_d مقداری از جریان جابه‌جایی است که از درون حلقه C می‌گذرد.

$$\frac{i'_d}{w\times l} = \frac{i_d}{L^۲} \Rightarrow i'_d = \frac{w\times H}{L^۲} i$$

$$i'_d = \frac{(۳)(۲)}{(۸)^۲}(۵) = ۰/۴۷\,A$$

$$\oint_c B.ds = (۴\pi\times۱۰^{-۷})(۰/۴۷) = ۵/۹\times۱۰^{-۷}\ \text{T}\cdot\text{m}$$

۶۸- شار مغناطیسی ۷/۰mWb به طرف خارج از وجه تخت پایین سطح بستهٔ نشان داده شده در شکل ۲۸-۴۱ می‌گذرد. از وجه تخت بالایی (که دارای شعاع ۴/۲cm است) میدان مغناطیسی $\vec{B}$ برابر با ۰/۴۰T عمود بر وجه می‌گذرد. مطلوب است (الف) بزرگی و (ب) جهت (به طرف داخل یا به طرف خارج) شار مغناطیسی که از سطح خمیده می‌گذرد.



شکل ۲۸-۴۱ مسئلهٔ ۶۸

حل: (الف) از معادله ۲۸-۱ داریم

$$(\Phi_B)_{\text{in}} = (\Phi_B)_{\text{out}} = ۰/۰۰۷۰ + (۰/۴۰)(\pi r^۲)$$

$$= ۹/۲\times۱۰^{-۳}\ \text{Wb}$$

که در آن از $r = ۴/۲\times۱۰^{-۲}\ \text{m}$ استفاده کردیم.

(ب) علامت شار مثبت شده است و بنابراین سوی شار به سمت داخل است.

۶۹- یک خازن صفحه- موازی با صفحه‌های دایره‌ای با شعاع $R = ۱۶\text{mm}$ و فاصلهٔ $d = ۵/۰\text{mm}$ دارای میدان الکتریکی یکنواخت در میان صفحه‌هاست. با شروع در زمان $t=۰$، اختلاف پتانسیل میان صفحه‌ها برابر $V = (۱۰۰\text{V})e^{-t/\tau}$ است که در آن ثابت زمانی $\tau = ۱۲\text{ms}$ است. بزرگی میدان مغناطیسی در فاصلهٔ شعاعی $r = ۰/۸۰R$ از محور مرکزی (الف) برحسب تابعی از زمان به‌ازای $t \geq ۰$ و (ب) در زمان $t = ۳\tau$ چقدر است؟

حل: (الف)

$$E = \frac{V}{d} = \frac{V_\circ}{d} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

داریم $(r \leq R)$

$$B = \frac{\mu_\circ \varepsilon.r}{۲}\frac{dE}{dt} = \frac{۱}{۲}\mu_\circ \varepsilon.r \frac{V_\circ}{d}\left(-\frac{۱}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$B = \left(\frac{۱}{۲}\right)(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۰/۸\times۱۶\times۱۰^{-۳})\times$$

$$\frac{(۱۰۰)}{(۵\times۱۰^{-۳})}\left(\frac{۱}{۱۲\times۱۰^{-۳}}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} = ۱/۲\times۱۰^{-۱۳}\, e^{-\frac{t}{۰/۰۱۲}}$$

(ب)

$$t = ۳\tau$$

$$B = (۱/۲\times۱۰^{-۱۳})e^{-۳} = ۵/۹\times۱۰^{-۱۵}\ \text{T}$$

۷۰- نمونه‌ای از یک نمک پارامغناطیسی که منحنی مغناطیدگی شکل ۲۸-۱۴ برای آن برقرار است در یک میدان مغناطیسی ۲/۰T غوطه‌ور است. در چه دمایی درجهٔ اشباع مغناطیسی نمونه (الف) ۵۰٪ و (ب) ۹۰٪ خواهد بود؟

Scanned by CamScanner

حل: (الف)

$$\frac{M}{M_{max}}=\frac{\mu}{\mu_{max}}=\frac{۵۰}{۱۰۰}=۰/۵$$

با استفاده از منحنی، این نقطه تقریباً در $\frac{B}{T}=۰/۵$ روی می‌دهد.

$$\frac{۲}{T}=۰/۵ \Rightarrow T=۴\text{K}$$

(ب)

$$\frac{M}{M_{max}}=\frac{۹۰}{۱۰۰}=۰/۹$$

با استفاده از منحنی، این نقطه در $\frac{B}{T}=۲$ روی می‌دهد.

$$\frac{۲}{T}=۲ \Rightarrow T=۱\text{K}$$

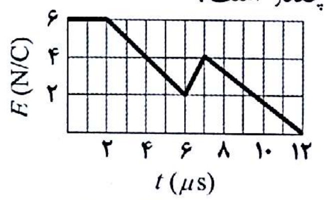
۷۱- می‌خواهیم یک خازن صفحه- موازی با صفحه‌های دایره‌ای به شعاع R را تخلیه کنیم، جریان جابه‌جایی از میان ناحیهٔ دایره‌ای مرکزی، موازی با صفحه‌ها با شعاع $R/۲$ برابر $۲/۰\text{A}$ است. جریان موقع تخلیهٔ خازن چقدر است؟

حل:

$$\frac{i'_d}{i_d}=\frac{\pi r^۲}{\pi R^۲}$$

$$\frac{۲}{i_d}=\frac{\left(\frac{R}{۲}\right)^۲}{R^۲}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow i_d=۸\text{A}$$

۷۲- شکل ۲۸-۴۲ تغییرات یک میدان مغناطیسی را که عمود بر سطحی دایره‌ای به مساحت $۲/۰\text{m}^۲$ است به دست می‌دهد. در طول دورهٔ زمانی نشان داده شده، بزرگترین جریان جابه‌جایی گذشته از سطح چقدر است؟



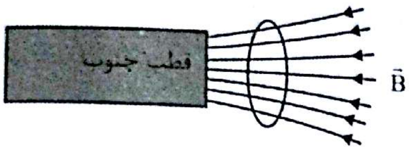
شکل ۲۸-۴۲ مسئلهٔ ۷۲

حل: با چشم‌پوشی از نقاطی که تعیین شیب در آنجا دشوار است، بازه‌ای که در آن $\Delta|\vec{E}|/\Delta t$ بیشترین مقدار است را $۶\mu s < t < ۷\mu s$ می‌یابیم. در طی این بازه، از معادله ۲۸-۱۴ داریم

$$i_d=\varepsilon_\circ A\frac{\Delta|\vec{E}|}{\Delta t}=(۸/۸۵\times۱۰^{۱۲})(۲/۰)(۲/۰\times۱۰^۶)$$
$$=۳/۵\times۱۰^{-۵}\ \text{A}$$

۷۳- شکل ۲۸-۳۸ یک مدل حلقه‌ای (حلقهٔ L) را برای یک مادهٔ دیامغناطیسی نشان می‌دهد. (الف) خطهای میدان مغناطیسی ناشی از آهنربا را که از میان و اطراف ماده می‌گذرند، رسم کنید. (ب) گشتاور دو قطبی مغناطیسی خالص حلقه $\vec{\mu}$، (پ) جریان قراردادی i در حلقه (ساعتگرد یا پادساعتگرد در شکل)، و (ت) نیروی مغناطیسی وارد برحلقه، در کدام جهت‌اند؟

حل: (الف) نمای از خطوط میدان (ناشی از حضور آهنربای میله‌ای) در پایین رسم شده است.



(ب) برای ماده‌های پارامغناطیسی، گشتاور دو قطبی $\vec{\mu}$ در همان جهت میدان خارجی $\vec{B}$ است. از شکل بالا درمی‌یابیم که $\vec{\mu}$ در جهت $x-$ می‌شود.

(پ) از قاعده دست راست درمی‌یابیم که چون $\vec{\mu}$ در جهت $x-$ است، جریان از دید آهنربای میله‌ای در جهت پادساعتگرد شارش می‌یابد.

(ت) اثر $\vec{F}$، حرکت ماده به سمت ناحیه‌هایی با مقادیر بزرگتر $|\vec{B}|$ است. چون $\vec{B}$ در جهت فلش‌های خطوط میدان افزایش می‌یابد، بنابراین جهت $\vec{F}$ به سمت چپ، یعنی $x-$ می‌شود.

۷۴- در پایینترین حالت انرژی اتم هیدروژن، محتملترین فاصلهٔ یک الکترون منفرد از پروتون مرکزی (هسته) برابر $۵/۲\times۱۰^{-۱۱}\text{m}$ است. (الف) بزرگی میدان الکتریکی پروتون در این فاصله را حساب کنید. بزرگی اندازه‌گیری شدهٔ مؤلفهٔ $\mu_{s,z}$ گشتاور دو قطبی مغناطیسی اسپینی پروتون روی محور z برابر $۱/۴\times۱۰^{-۲۶}\text{J/T}$ است.(ب) بزرگی میدان مغناطیسی پروتون را در فاصلهٔ $۵/۲\times۱۰^{-۱۱}\text{m}$ روی محور z حساب کنید. (راهنمایی: معادلهٔ ۲۵-۲۷ را به کار ببرید.) (پ) نسبت گشتاور دو قطبی مغناطیسی الکترون به گشتاور دو قطبی مغناطیسی پروتون چقدر است؟

حل:

$$E=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲}=\frac{(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{(۵/۲\times۱۰^{-۱۱})^۲}(۹\times۱۰^۹)$$
$$=۵/۳۳\times۱۰^{۱۱}\ \text{V/m}$$

(ب) از رابطه (۲۵-۲۷) داریم:

$$B=\frac{\mu_\circ}{۲\pi}\frac{\mu}{z^۳}$$

$$B=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})}{(۲\pi)}\frac{(۱/۴\times۱۰^{-۲۶})}{(۵/۲\times۱۰^{-۱۱})^۳}=۱/۹۹\times۱۰^{-۲}\ \text{T}$$

یا $۱۹/۹\text{mT}$

(ج) از رابطه (۳۲-۲۵) داریم:

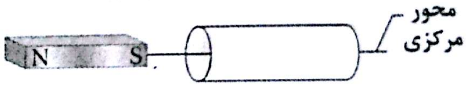
$$\mu_e=\frac{eh}{۴\pi n_e}$$

$$\mu_p=\frac{eh}{۴\pi m_p}$$

$$\frac{\mu_e}{\mu_p}=\frac{m_p}{m_e}=\frac{(۱/۶۷\times۱۰^{۲۶})}{(۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱})}=۱۸۳۳$$

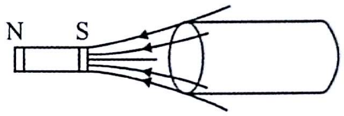
Scanned by CamScanner

۷۵- در شکل ۲۸-۴۳ یک آهنربای میله‌ای در نزدیکی یک استوانهٔ کاغذی قرار دارد. (الف) خطهای میدان مغناطیسی را که از سطح استوانه می‌گذرند رسم کنید. (ب) علامت $\vec{B}\cdot d\vec{A}$ برای هر مساحت $d\vec{A}$ چیست؟ (پ) آیا این با قانون گاوس برای مغناطیس مغایر است؟ توضیح دهید؟



شکل ۲۸-۴۳ مسئلهٔ ۷۵

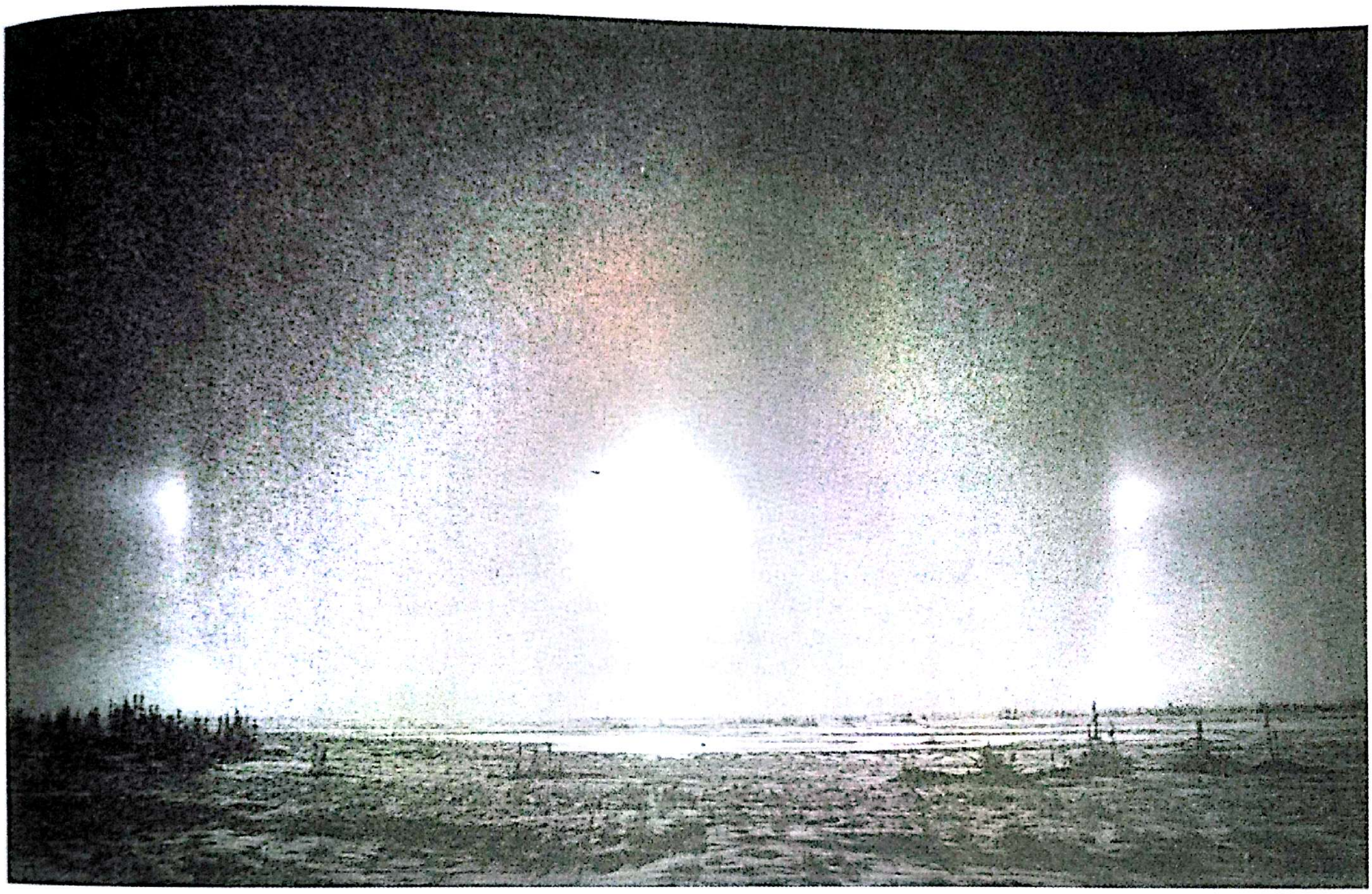
حل: (الف)



(ب) برای المان‌های روی سطح جداره استوانه، $\overrightarrow{dA}$ عمود بر سطح به طرف بیرون آن است.

(پ) خیر: چون شار کل روی سطح جانبی صفر نیست و این با قانون گاوس مغایرت ندارد زیرا قانون گاوس برای سطوح بسته است و نه سطوح باز.

۲۹ موج‌های الکترومغناطیسی



Scanned by CamScanner

بخش ۲۹-۲ رنگین کمان ماکسول

●۱- در شکل ۲۹-۲ تقریباً (الف) کوچکترین و (ب) بزرگترین طول موجی که در آنها چشم یک ناظر معمولی دارای نصف حساسیت بیشینهٔ چشم است کدام‌اند؟ مطلوب است (پ) طول موج، (ت) بسامد و (ث) زمان تناوب نوری که در آن چشم بیشترین حساسیت را دارد.

حل: (الف) از شکل ۲۹-۲ در می‌یابیم که طول موج کوتاهتر در حدود ۵۱۵nm است.

(ب) و طول موج بلندتر تقریباً ۶۱۰ nm است.

(پ) از شکل ۲۹-۲ در می‌یابیم طول موجی که در آن چشم بیشترین حساسیت را دراد برابر ۵۵۵nm است.

(ت)
$$f=\frac{c}{\lambda}=\frac{۳/۰۰\times ۱۰^{۸}}{۵۵۵\times ۱۰^{-۹}}=۵/۴۱\times ۱۰^{۱۴}\ \text{Hz}$$

(ث)
$$T=۱/f=(۵/۴۱\times ۱۰^{۱۱})^{-۱}=۱/۸۵\times ۱۰^{-۱۵}\ \text{s}$$

●۲- تقریباً دستهایتان را در چه فاصله‌ای از هم باید نگه دارید تا جدایی آنها ۱/۰ نانو ثانیهٔ نوری باشد (مسافتی که نور در ۱/۰ns طی می‌کند)؟

حل:
$$d=ct=(۳/۰\times ۱۰^{۸})(۱/۰\times ۱۰^{-۹})=۰/۳۰\ \text{m}$$

●۳- یک لیزر هلیوم- نئون نور قرمز را در نوار باریکی از طول موجها به مرکز ۶۳۲/۸nm و با «پهنای طول موج» ۰/۰۱۰۰nm (با مقیاس شکل ۲۹-۱) گسیل می‌کند. «پهنای بسامدی» مربوط به این گسیل چقدر است؟

حل: چون $\Delta\lambda << \lambda$ است، برای Δf خواهیم داشت

$$\Delta f=\left|\Delta\left(\frac{c}{\lambda}\right)\right|=\frac{c\Delta\lambda}{\lambda^{۲}}=\frac{(۳/۰\times ۱۰^{۸})(۰/۰۱۰۰\times ۱۰^{-۹})}{(۶/۳۲۸\times ۱۰^{-۹})^{۲}}$$
$$=۷/۴۹\times ۱۰^{۹}\ \text{Hz}$$

●۴- طرح سی فارر[1] یک برنامهٔ بلندپروازنه برای نصب آنتن عظیمی در زیرزمین در پایگاهی به مساحت تقریبی ۱۰۰۰۰km² بود. هدف طرح این بود که سیگنال‌ها را به زیر دریاییهایی که در عمق زیاد بودند ارسال کنند. اگر طول موج مؤثر سیگنالها $۱/۰\times ۱۰^{۴}$ برابر شعاع زمین باشد (الف) بسامد و (ب) زمان تناوب تابشهای گسیل شده چقدر است؟ تابشهای الکترومغناطیسی معمولی نمی‌توانند در رساناهایی نظیر آب دریا تا مسافت زیاد نفوذ کنند.

حل: (الف)
$$f=\frac{c}{\lambda}=\frac{۳/۰\times ۱۰^{۸}}{(۱/۰\times ۱۰^{۵})(۶/۴\times ۱۰^{۶})}=۴/۶۹\times ۱۰^{-۳}\ \text{Hz}$$

(ب)
$$T=\frac{۱}{f}=\frac{۱}{۴/۶۹\times ۱۰^{-۳}}=۲۱۳\text{s}=\text{min}\ ۳۳\ \text{s}$$

بخش ۲۹-۳ موج‌های الکترومغناطیسی پیشرونده، بررسی کیفی

1. Seafarer

●۵- چه القاگری باید به خازن ۱۷pF یک نوسانگر وصل شود تا بتواند موجهای الکترومغناطیسی ۵۵۰ nm (یعنی مرئی) ایجاد کند؟ پاسخ خود را توجیه کنید. **SSM**

حل:
$$T=\frac{\lambda}{C}=\frac{(۵۵۰\times ۱۰^{-۹})}{(۳\times ۱۰^{۸})}=۱/۸۳\times ۱۰^{-۱۵}\ \text{s}$$
$$T^{۲}=۴\pi^{۲}LC\Rightarrow L\frac{T^{۲}}{۴\pi^{۲}C}$$
$$L=\frac{(۱/۸۳\times ۱۰^{-۱۵})^{۲}}{(۴)(۳/۱۴)^{۲}(۱۷\times ۱۰^{-۱۲})}=۵\times ۱۰^{-۲۱}\ \text{H}$$

●۶- با دستگاه نوسانگر - آنتن شکل ۲۹-۳ اگر $L=۰/۲۵۳\mu\text{H}$ و $C=۲۵/۰\text{pF}$ باشد، چه طول موجی از موج الکترومغناطیسی گسیل می‌شود؟

حل:
$$T=۲\pi\sqrt{LC}=(۲)(۳/۴)\sqrt{(۰/۲۵۳\times ۱۰^{-۶})(۲۵\times ۱۰^{-۱۲})}$$
$$\simeq ۱/۵۸\times ۱۰^{-۸}\ \text{s}$$
$$\lambda=CT=(۳\times ۱۰^{۸})(۱/۵۸\times ۱۰^{-۸})=۴/۷۴\text{m}$$

بخش ۲۹-۵ انتقال انرژی و بردار پویین تینگ

●۷- برخی لیزرهای نئودیمیم- شیشه می‌توانند تپهایی در ۱/۰ns در طول موج ۰/۲۶μm و با توان ۱۰۰TW تولید کنند. چه مقدار انرژی در یک تپ تنها وجود دارد. **ILW**

حل: اگر P توان و Δt بازهٔ زمانی یک پالس (تپ) باشد، آنگاه انرژی یک پالس چنین می‌شود:

$$E=P\Delta t=(۱۰۰\times ۱۰^{۱۲})(۱/۰\times ۱۰^{-۹})=۱/۰\times ۱۰^{۵}\ \text{J}$$

●۸- یک موج الکترومغناطیسی تخت دارای میدان الکتریکی بیشینهٔ $۳/۲۰\times ۱۰^{-۴}$ V/m است. دامنهٔ میدان مغناطیسی را به دست آورید.

حل: دامنهٔ میدان مغناطیسی موج برابر است با

$$B_m\frac{E_m}{c}=\frac{۳/۲۰\times ۱۰^{-۴}}{۳\times ۱۰^{۸}}=۱/۰۷\times ۱۰^{-۱۲}\ \text{T}$$

●۹- یک موج الکترومغناطیسی تخت که در جهت مثبت محور x در خلأ حرکت می‌کند دارای مؤلفه‌های $E_x=E_y=۰$ و $E_z=(۲/۰)\cos[(\pi\times ۱۰^{۱۵}s^{-۱})(t-x/c)]$ است. (الف) دامنه و بزرگی مؤلفهٔ میدان مغناطیسی چقدر است؟ (ب) میدان مغناطیسی موازی با کدام محور نوسان می‌کند؟ (پ) وقتی مؤلفهٔ میدان الکتریکی در نقطهٔ مشخص P در جهت مثبت محور z باشد، مؤلفهٔ میدان مغناطیسی در آنجا در کدام جهت است؟

حل: (الف)
$$E_m=۲\ \text{V/m}$$
$$B_m=\frac{E_m}{c}=\frac{۲}{۳\times ۱۰^{۸}}=۶/۶۷\times ۱۰^{-۹}\ \text{T}$$

(ب) و (پ) در رابطهٔ $\vec{S}=\frac{۱}{\mu_۰}\vec{E}\times\vec{B}$ اگر $\vec{E}$ جهت میدان الکتریکی و $\vec{B}$ جهت میدان مغناطیسی باشد، جهت $\vec{B}$ در جهت محور y می‌باشد. ($\vec{S}$ در جهت $\hat{i}$ و $\vec{E}$ در جهت $\hat{k}$ می‌باشد). راستای ارتعاش B، محور y و در نقطهٔ P در خلاف محور y است.

Scanned by CamScanner

●۱۰- در یک موج رادیویی تخت بیشینهٔ مقدار مؤلفهٔ میدان الکتریکی برابر ۵/۰۰V/m است. مطلوب است محاسبهٔ (الف) مقدار بیشینهٔ مؤلفهٔ میدان مغناطیسی و (ب) شدت موج.

حل: (الف)

$$B_m = \frac{E_m}{c} = \frac{(۵/۰۰)}{۳\times ۱۰^{۸}} = ۱/۶۷\times ۱۰^{-۸}\ \mathrm{T}$$

(ب)

$$I = S_{avg} = \frac{E_m^{۲}}{۲\mu_۰ c} = \frac{(۵/۰۰)}{۲(۴\pi\times ۱۰^{-۷})(۳\times ۱۰^{۸})} = ۳/۳۱\times ۱۰^{-۲}\ \mathrm{W/m^{۲}}$$

●۱۱- شدت یک موج الکترومغناطیسی تخت پیشرونده اگر B_m برابر $۱/۰\times ۱۰^{-۴}$ T باشد، چقدر است؟

حل: شدت برابر با میانگین بردار پوئین تینگ است:

$$I = S_{avg} = \frac{cB_m^{۲}}{۲\mu_۰} = \frac{۳/۰\times ۱۰^{۸})(۱/۰\times ۱۰^{-۴})^{۲}}{۲(۴\pi\times ۱۰^{-۷})} = ۱/۲\times ۱۰^{۶}\ \mathrm{W/m^{۲}}$$

●۱۲- فرض کنید (به طور غیر واقعی) که یک ایستگاه TV همانند یک چشمهٔ نقطه‌ای عمل کند و به طور همسانگرد و در ۱/۰MW برنامه پخش کند. شدت تابش گسیل شده به نزدیکترین ستاره به منظومهٔ شمسی یعنی ستارهٔ پروکسیمای قنطورس که در فاصلهٔ ۴/۳ ly قرار دارد، چقدر است؟ (یک موجود هوشمند ممکن است در آن فاصله قادر به تماشای برنامهٔ پروندهٔ X باشد.) سال نوری (ly) مسافتی است که نور در یک سال طی می‌کند.

حل: شدت سیگنال در *پروکسیمای قنطورس* چنین می‌شود:

$$I = \frac{P}{۴\pi r^{۲}} = \frac{۱/۰\times ۱۰^{۶}}{۴\pi\left[(۴/۳)(۹/۴۶\times ۱۰^{۱۵})\right]^{۲}} = ۴/۸\times ۱۰^{-۲۹}\ \mathrm{W/m^{۲}}$$

●●۱۳- بیشینهٔ میدان الکتریکی در فاصلهٔ ۱۰m از یک چشمهٔ نور نقطه‌ای ۲/۰V/m است. (الف) بیشینهٔ مقدار میدان مغناطیسی و (ب) شدت میانگین در آنجا چقدر است؟ (پ) توان چشمه چقدر است؟

حل: الف)

$$B_m = \frac{E_m^{۲}}{c} = \frac{(۲/۰)}{۳\times ۱۰^{۸}} = ۶/۷\times ۱۰^{-۹}\ \mathrm{T}$$

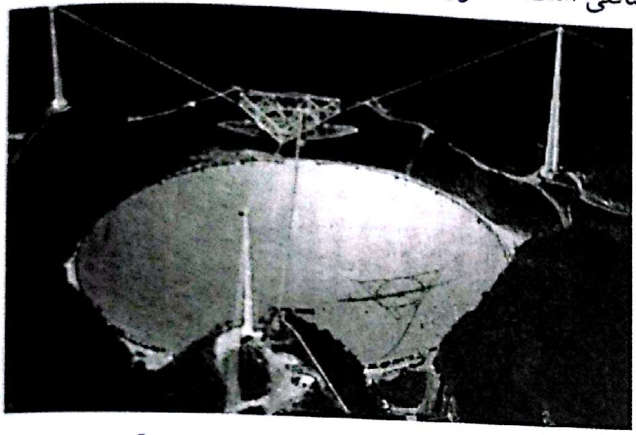
ب) از معادلهٔ ۲۹-۲۶ داریم

$$I = S_{avg} = \frac{E_m^{۲}}{۲\mu_۰ c} = \frac{(۲/۰)}{۲(۴\pi\times ۱۰^{-۷})(۳\times ۱۰^{۸})} = ۵/۳\times ۱۰^{-۳}\ \mathrm{W/m^{۲}}$$

پ)

$$P = ۴\pi r^{۲} I_{avg} = ۴\pi(۱۰)^{۲}(۵/۳\times ۱۰^{-۳}) = ۶/۶۷\mathrm{W}$$

●●۱۴- فرانک دی دریک[1] یک پژوهشگر فعال برنامهٔ SETI[2] (جستجو برای اطلاعات فرازمینی) گفته است که رادیو تلسکوپ بزرگ در آرچیبو، پورتوریکو (شکل ۲۹-۳۸) «می‌تواند سیگنالی را که به تمام سطح زمین می‌رسد و توان آن فقط یک پیکو وات است آشکار کند». (الف) توان واقعی که به وسیلهٔ آنتن آرچیبو برای چنین سیگنالی دریافت می‌شود چقدر است؟ قطر آنتن ۳۰۰m است. (ب) توان چشمه‌ای که در مرکز کهکشان می‌تواند چنین سیگنالی را ایجاد کند چقدر است؟ مرکز کهکشان در فاصلهٔ $۲/۲\times ۱۰^{۴}$ ly قرار دارد. سال نوری مسافتی است که نور در یک سال طی می‌کند.



شکل ۲۹-۳۸ مسئلهٔ ۱۴، رادیو تلسکوپ آرچیبو.

حل: الف) اگر r شعاع آنتن، R_e شعاع زمین، P_s توان کل سیگنال و P'_s توان دریافتی توسط آنتن باشد برای P_s و P'_s به ترتیب خواهیم داشت:

$$P_s = I/\pi r^{۲} \quad , \quad P'_s = I/۴\pi R_e^{۲}$$

با حذف I در این دو معادله به رابطهٔ زیر خواهیم رسید:

$$P'_s = \frac{۱}{۴}P_s\left(\frac{r}{R_e}\right)^{۲} = \frac{۱}{۴}(۱/۰\times ۱۰^{-۱۲}\ \mathrm{W})\left(\frac{۱۵۰\ \mathrm{m}}{۶/۳۷\times ۱۰^{۶}\ \mathrm{m}}\right)^{۲} = ۱/۳۹\times ۱۰^{-۲۲}\ \mathrm{W}$$

ب) حال اگر P_{os} را توان چشمه در مرکز کهکشان و $r_۰$ را فاصلهٔ مرکز کهکشان تا زمین بگیریم، خواهیم داشت:

$$P_{os}\pi r^{۲} = ۴\pi P'_s r_۰^{۲}$$

و از آنجا P_{os} چنین می‌شود

$$P_{os} = ۴P'_s\left(\frac{r_۰}{r}\right)^{۲} = ۴(۱/۳۹\times ۱۰^{-۲۲})\left[\frac{(۲/۲\times ۱۰)(۹/۴۶\times ۱۰^{۱۵})}{۱۵۰}\right]^{۲} = ۱/۰۷\times ۱۰^{۱۵}\ \mathrm{W}$$

تعبیر دیگر معادلهٔ بالا این است که می‌توان نوشت، $P_{os} = ۴\pi r_۰^{۲} I$ که در آن $I = P'_s/۴\pi R_e^{۲}$ است.

●●●۱۵- نور خورشید درست در خارج از جو زمین دارای شدت $۱/۴۰\ \mathrm{kW/m^{۲}}$ است. مطلوب است (الف) E_m و (ب) B_m برای نور خورشید در آنجا، با فرض تخت بودن موج.

حل: (الف) از معادلهٔ ۲۹-۲۶ می‌توان نوشت

$$E_m = \sqrt{۲\mu_۰ I_c} = \sqrt{۲(۴\pi\times ۱۰^{-۷})(۱/۴۰\times ۱۰^{۳})(۲/۹۹۸\times ۱۰^{۸})} = ۱/۰۳\times ۱۰^{۳}\ \mathrm{V/m}$$

---

1. Frank D.Drake
2. Search for Extra-Terrestrial Intelligence

Scanned by CamScanner

(ب)

$$B_m \frac{E_m}{c} = \frac{۱/۰۳\times۱۰^{۳}}{۳\times۱۰^{۸}} = ۳/۴۳\times۱۰^{-۶}\ \text{T}$$

●●۱۶- یک موج الکترومغناطیسی با بسامد $۴/۰۰\times۱۰^{۴}$ Hz در خلأ در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. میدان الکتریکی آن دارای دامنهٔ E_m و جهت آن موازی با محور y است. در زمان $t=۰$، میدان الکتریکی در نقطهٔ P روی محور x دارای مقدار $+E_m/۴$ و با زمان کاهش می‌یابد. فاصلهٔ نقطهٔ P در امتداد محور x تا اولین نقطه با $E=۰$ چقدر است، در صورتی که بررسی را در (الف) جهت منفی و (ب) جهت مثبت محور x انجام دهیم؟

حل: (الف)

$$\omega = ۲\pi f = (۲\pi)(۴\times۱۰^{۱۴}) = ۲/۵۱\times۱۰^{۱۵}\ \text{rad/s}$$

$$E = E_m \sin\omega t$$

$$\frac{E_m}{۴} = E_m \sin\omega t = \frac{۱}{۴} = \sin۱۴/۵^\circ = \sin۰/۲۵۳$$

که در آن زاویهٔ به جای درجه بر حسب رادیان بیان شده است.

$$(۲/۵۱\times۱۰^{۱۵})t = ۰/۲۵۳ \Rightarrow t = ۱\times۱۰^{-۱۶}\ \text{s}$$

مسافتی که در این مدت در امتداد محور x طی کرده است.

$$x = ct = (۳\times۱۰^{۸})(۱\times۱۰^{-۱۶})۳\times۱۰^{-۸}\ \text{m}$$

(ب) جایی که قبل از $t=۰$، $E=\frac{E}{۴}$ بوده است.

$$\sin\omega t = \sin(\pi - ۰/۲۵۳) = \sin۲/۸۸۷$$

$$\omega t = ۲/۸۸۷ \Rightarrow t = \frac{۲/۸۸۷}{۲/۵۱\times۱۰^{۱۵}} = ۱/۱۵\times۱۰^{-۷}\ \text{m}$$

●●۱۷- هواپیمایی که در فاصلهٔ ۱۰km پرواز می‌کند از یک فرستندهٔ رادیویی سیگنالی را با توان $۱۰\mu\text{W/m}^۲$ دریافت می‌کند. دامنهٔ مؤلفهٔ (الف) الکتریکی (ب) مغناطیسی در هواپیما چقدر است؟ (پ) اگر فرستنده در همهٔ جهتها به طور یکنواخت تابش کند، کل توان آن چقدر است؟

حل: (الف)

$$I = \frac{E_m^۲}{۲\mu_۰ c} \Rightarrow E_m = \sqrt{۲\mu_۰ cI}$$

$$E_m = \sqrt{(۲)(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۳\times۱۰^{۸})(۱۰\times۱۰^{-۶})}$$

$$\simeq ۸/۷\times۱۰^{-۲}\ \text{V/m}$$

(ب)

$$B_m = \frac{E_m}{c} = \frac{(۸/۷\times۱۰^{-۲})}{(۳\times۱۰^{۸})} = ۲/۹\times۱۰^{-۱۰}\ \text{T}$$

(پ)

$$P = IA = (۱۰\times۱۰^{-۶})(\frac{۱}{۲})(۴\pi)(۱۰\times۱۰^{۳})^۲ = ۶/۳\times۱۰^{۳}\ \text{W}$$

●●۱۸- یک چشمهٔ نقطه‌ای همسانگرد، نوری را با طول موج ۵۰۰nm و با آهنگ ۲۰۰W گسیل می‌کند. آشکارساز نوری ۴۰۰m از چشمه فاصله دارد. بیشینهٔ آهنگ $\partial B/\partial t$ که مؤلفهٔ مغناطیسی نور در محل آشکارساز با زمان تغییر می‌کند، چقدر است؟

حل: ابتدا دامنهٔ میدان مغناطیسی را در محل آشکارساز بدست می‌آوریم.

$$\lambda = \frac{c}{f}\frac{۲\pi c}{۲\pi f} = \frac{۲\pi c}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{۲\pi c}{\lambda}$$

$$\omega = \frac{(۲)(۳/۱۴)(۳\times۱۰^{۸})}{(۵۰۰\times۱۰^{-۹})} = ۳/۷۷\times۱۰^{۱۵}\ \text{rad/s}$$

$$I = \frac{P}{۴\pi r^۲} = \frac{(۲۰۰)}{(۴)(۳/۱۴)(۴۰۰)^۲} = ۹/۹۵\times۱۰^{-۵}\ \text{W/m}^۲$$

$$I = \frac{cB_m^۲}{۲\mu_۰} \Rightarrow B_m = \sqrt{\frac{۲I\mu_۰}{c}}$$

$$B_m = \sqrt{\frac{(۲)(۹/۹۵\times۱۰^{-۵})(۴\pi\times۱۰^{-۷})}{(۳\times۱۰^{۸})}}$$

$$= ۹/۱۳\times۱۰^{-۱۰}\ \text{T}$$

$$B = B_m \sin(\omega t + \phi_۰)$$

$$\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right) = B_m \omega \cos(\omega t + \phi_۰)$$

$$\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)_m = (۹/۱۳\times۱۰^{-۱۰})(۳/۷۷\times۱۰^{۱۵}) = ۳/۴۴\times۱۰^{۶}\ \text{T/s}$$

بخش ۲۹-۶ فشار تابشی

●۱۹- فشار تابشی در فاصلهٔ ۱/۵m از یک لامپ ۵۰۰W چقدر است؟ فرض کنید سطحی که به آن فشار وارد می‌شود در مقابل لامپ و جذب کنندهٔ کامل است و لامپ در همهٔ جهتها به طور یکنواخت تابش می‌کند. ILW

حل: چون سطح، جذب کنندهٔ کامل است، فشار تابشی با $p_r = I/c$ داده می‌شود که در آن I شدت است. همچنین چون لامپ به طور یکنواختی در تمام جهت‌ها تابش می‌کند، شدت درفاصلهٔ r از آن با $I = p/۴\pi r^۲$ داده می‌شود که P توان لامپ است. بنابراین P_r چنین می‌شود

$$p_r = \frac{P}{۴\pi r^۲ c} = \frac{۵۰۰}{۴\pi(۱/۵)^۲(۳\times۱۰^{۸})}$$

$$= ۵/۹\times۱۰^{-۸}\ \text{Pa}$$

●۲۰- قطعه مقوای سیاه کاملاً جذب کننده‌ای با مساحت $A = ۲/۰\text{cm}^۲$ نوری به شدت $۱۰\ \text{W/m}^۲$ را از فلاش دوربین عکاسی دریافت می‌کند. فشار تابشی نور روی مقوا چقدر است؟

حل: فشار تابشی درجذب کامل برابر است با

$$p_r = \frac{I}{c} = \frac{۱۰\ \text{W/m}^۲}{۳\times۱۰^{۸}\ \text{m/s}} = ۳/۳۳\times۱۰^{-۸}\ \text{Pa}$$

●۲۱- از فشار تابشی لیزرهای با توان بالا برای متراکم کردن پلاسما (گازی از ذره‌های باردار) استفاده می‌شود. لیزری که تپهای تابشی با توان بیشینهٔ $۱/۵\times۱۰^{۳}$ MW تولید می‌کند روی $۱/۰\text{mm}^۲$ از پلاسما با چگالی زیاد الکترون متمرکز شده است. اگر پلاسما تمام باریکهٔ نور را مستقیماً به عقب در امتداد مسیرشان بازتاب دهد، فشار وارد شده بر پلاسما را به دست آورید. SSM

حل: پلاسما کاملاً تمام انرژی تابیده به آن را باز می‌تاباند و بنابراین فشار تابشی با $p_r = ۲I/c$ داده می‌شود که I شدت

Scanned by CamScanner

است. شدت برابر $I=P/A$ است که P توان و A مساحت مقطعی است که تابش بر آن فرود می‌آید. بنابراین داریم

$$p_r=\frac{۲p}{Ac}=\frac{۲(۱/۵\times۱۰^{۹})}{(۱/۰۰\times۱۰^{-۶})(۲/۹۹۸\times۱۰^{۸})}$$
$$=۱/۰\times۱۰^{۷}\ \text{Pa}$$

●۲۲- تابش خورشید که به زمین می‌رسد (درست خارج از جو) دارای شدت $۱/۴\ \text{kW/m}^{۲}$ است. (الف) با فرض اینکه زمین (و جو آن) شبیه یک قرص مسطح رفتار می‌کند که بر پرتوهای خورشید عمود است و همهٔ انرژی تابشی را جذب می‌کند، نیرویی که بر اثر فشار تابشی به زمین وارد می‌شود چقدر است؟ (ب) برای مقایسه، نیروی وارد شده به خاطر جاذبهٔ گرانشی خورشید را محاسبه کنید.

حل: (الف) فشار تابشی، نیروی زیر را ایجاد می‌کند

$$F_r=p_r(\pi R_e^{۲})=\left(\frac{I}{c}\right)(\pi R_e^{۲})$$
$$=\frac{\pi(۱/۴\times۱۰)(۶/۳۷\times۱۰^{۶})^{۲}}{۲/۹۹۸\times۱۰^{۸}}=۶/۰\times۱۰^{۸}\ \text{N}$$

(ب) کشش گرانشی خورشید بر روی زمین برابر است با:

$$F_g=G\frac{M_sM_e}{r_{es}^{۲}}$$
$$=(۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱})\frac{(۱/۹۹\times۱۰^{۳۰})(۵/۹۸\times۱۰^{۲۴})}{(۱/۵\times۱۰^{۱۱})}$$
$$=۳/۵۴\times۱۰^{۲۲}\ \text{N}$$

●●۲۳- ثابت کنید، برای یک موج الکترومغناطیسی تخت که به طور عمود بر سطحی تخت فرود می‌آید، فشار تابشی روی سطح برابر است با چگالی انرژی باریکهٔ فرودی. (این رابطه بین فشار و چگالی انرژی بدون توجه به اینکه چه کسری از انرژی فرودی بازتابیده شده، برقرار است.) SSM

حل: فرض می‌کنیم موج تابشی با ضریب a جذب می‌گردد. در این صورت $(1-a)$ ضریب باز تابش است. در این صورت فشار تابشی برابر است با:

$$P_r=\frac{۲(1-a)I_{\circ}}{c}+\frac{aI_{\circ}}{c}=\frac{۲I_{\circ}}{c}-\frac{I_{\circ}a}{c}=\frac{I_{\circ}}{c}(۲-a) \qquad (۱)$$

شدت، میزان انرژی درواحد سطح درواحد زمان است. در نزدیکی سطح دو شدت داریم، یکی شدت اولیه $I_{\circ}$ و دیگری شدت باز تابش، لذا داریم:

$$I=I_{\circ}+(1-a)I_{\circ}=\frac{U}{A\cdot t}=\frac{u\cdot V}{A\cdot t}=\frac{uA\cdot l}{A\cdot t}$$
$$I=(۲-a)I_{\circ}=u\frac{l}{t}=uc\Rightarrow I_{\circ}=\frac{uc}{۲-a}$$

این نتیجه را در رابطهٔ (۱) قرار می‌دهیم:

$$p_r=\frac{uc(۲-a)}{c(۲-a)}=u$$

●●۲۴- لیزر کوچکی نور را با توان $۵/۰۰\text{mW}$ و طول موج $۶۳۳\ \text{nm}$ گسیل می‌کند. باریکهٔ لیزر متمرکز می‌شود (باریک می‌شود) تا قطر آن با قطر ۱۲۶۶nm کره‌ای که در مسیر قرار دارد برابر شود. کره کاملاً جذب کننده و دارای چگالی $۵/۰۰\times۱۰^{۳}\ \text{kg/m}^{۳}$ است. (الف) شدت باریکه در محل کره، (ب) فشار تابشی روی کره، (پ) بزرگی نیروی مربوطه، و (ت) بزرگی شتابی که این نیرو به تنهایی به کره خواهد داد چقدر است؟

حل: (الف) چون باریکه روی کره متمرکز شده است، سطح مقطع باریکه برابر $\pi d^{۲}/۴$ می شود که d قطر باریکه $(=۲/۰۰\lambda)$ است.بنابراین برای شدت باریکه داریم

$$I=\frac{P}{\pi d^{۲}/۴}=\frac{۵/۰۰\times۱۰^{-۳}}{\pi\left[(۲/۰۰)(۶۳۳\times۱۰^{-۹})\right]^{۲}/۴}$$

(ب)

$$p_r=\frac{I}{c}=\frac{۳/۹۷\times۱۰^{۹}}{۳\times۱۰^{۸}}=۱۳/۲۳\text{Pa}$$

(پ) چون نیرو به کره‌ای به قطر d وارد شده است، داریم

$$F_r=Ap_r=\left(\frac{\pi d^{۲}}{۴}\right)p_r=\left(\frac{p}{I}\right)p_r$$
$$=\frac{(۵/۰۰\times۱۰^{-۳})(۱۳/۲۳)}{۳/۹۷\times۱۰^{۹}}=۱/۶۷\times۱۰^{-۱۱}\ \text{N}$$

●●●۲۵- یک موج الکترومغناطیسی تخت با طول موج $۳/۰\text{m}$ در خلأ در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. میدان الکتریکی با دامنهٔ ۳۰۰V/m موازی با محور y نوسان می‌کند. (الف) بسامد، (ب) بسامد زاویه‌ای و (پ) عدد زاویه‌ای موج چقدر است؟ (ت) دامنهٔ مؤلفهٔ میدان مغناطیسی چقدر است؟ (ث) میدان مغناطیسی موازی با کدام محور نوسان می‌کند؟ (ج) آهنگ میانگین زمانی شار انرژی مربوط به موج بر حسب وات بر متر مربع چقدر است؟ موج به طور یکنواخت به سطحی به مساحت $۲/۰\text{m}^{۲}$ می‌تابد. اگر سطح، موج را کاملاً جذب کند (چ) آهنگ انتقال اندازه حرکت به سطح و (ح) فشار تابشی روی سطح چقدرند؟ SSM WWW

حل: (الف)

$$f=\frac{c}{\lambda}=\frac{۲/۹۹۸\times۱۰^{۸}}{۳/۰}=۱/۰\times۱۰^{۸}\ \text{Hz}$$

ب)

$$\omega=۲\pi f=۲\pi(۱/۰\times۱۰^{۸})=۶/۳\times۱۰^{۸}\ \text{rad/s}$$

(پ)

$$k=\frac{۲\pi}{\lambda}=\frac{۲\pi}{۳/۰m}=۲/۱\text{rad/m}$$

(ت)

$$B_m=\frac{E_m}{c}=\frac{۳۰۰}{۳\times۱۰^{۸}}=۱/۰\times۱۰^{-۶}\ \text{T}$$

(ث) برای آنکه جهت انتشار موج در سوی +x باشد باید جهت $\vec{E}\times\vec{B}$ در سوی مثبت محور x ها باشد. بنابراین چون $\vec{E}$ در سوی مثبت y است، $\vec{B}$ باید در سوی مثبت محور z باشد.

ج) شدت موج برابر است با

$$I=\frac{E_m^{۲}}{۲\mu_{\circ}c}=\frac{(۳/۰۰)^{۲}}{۲(۴\pi\times۰^{-۷})(۳\times۱۰^{۸})}$$
$$=۱۱۹/۳۶\text{W/m}^{۲}$$

(چ) چون سطح، جذب کنندهٔ کامل است، آهنگی که در یکای مساحت به سطح اندازهٔ حرکت می‌دهد برابر I/c است و بنابراین داریم

Scanned by CamScanner

$$\frac{dp}{dt}=\frac{IA}{c}=\frac{(۱۱۹/۳۶)}{۳\times۱۰^{۸}}=۷/۹۷\times۱۰^{-۷}\ \text{Pa}$$

ح) فشار تابشی چنین می‌شود

$$p_r=\frac{I}{c}=\frac{dp/dt}{A}=\frac{۷/۹۷\times۱۰^{۷}}{۲/۰}=۳/۹۸\times۱۰^{-۷}\ \text{Pa}$$

۲۶●● - پیشنهاد شده است که با به کار بردن بادبان بزرگی که از ورقهٔ فلزی ساخته شده است سفینهٔ فضایی می‌تواند بر اثر فشار تابشی در منظومهٔ شمسی حرکت کند. بزرگی این بادبان چقدر باید باشد تا بزرگی نیروی تابشی مساوی جاذبهٔ گرانشی خورشید شود؟ فرض کنید که جرم سفینه و بادبان رویهم ۱۵۰۰ kg و بادبان بازتاب کنندهٔ کامل است و عمود بر پرتوهای خورشید قرار دارد. برای اطلاعات مورد نیاز به پیوست پ نگاه کنید. (با بادبان بزرگتر سفینه پیوسته از خورشید دور می‌شود.)

حل:

$$F_g=F_r$$

اگر P_s توان تابشی خورشید باشد، با استفاده از پیوست ج داریم:

$$P_s=۳/۹۰\times۱۰^{۲۶}\ \text{خورشید}$$

$$P_s=I۴\pi r^{۲}\Rightarrow I=\frac{P_s}{۴\pi r^{۲}}$$

از طرف دیگر داریم:

$$F_r=P_rA=\frac{۲I}{c}A=\frac{۲P_sA}{c۴\pi r^{۲}}=\frac{P_sA}{۲\pi cr^{۲}}$$

که A مساحت بادبان است.

$$G\frac{mm_s}{r^{۲}}=\frac{P_sA}{۲\pi cr^{۲}}$$

با قرار دادن مقادیر داده شده داریم

$$A=۹/۶۲\times۱۰^{۵}\ \text{m}^{۲}$$

۲۷●● - سفینهٔ فضایی کوچکی که جرم آن $۱/۵\times۱۰^{۳}$ kg (شامل یک فضانورد) است به فضای خارج حرکت می‌کند و نیروی گرانشی وارد بر آن قابل چشم‌پوشی است. اگر فضانورد یک باریکهٔ لیزری ۱۰kW را روشن کند، بر اثر اندازه حرکت وارد شده توسط باریکه، سفینه در ۱/۰ روز چه سرعتی پیدا می‌کند؟ SSM

حل:

$$\text{توان}\quad P=\frac{E}{t}=\frac{\Delta Pc}{t}=c\frac{\Delta P}{t}$$

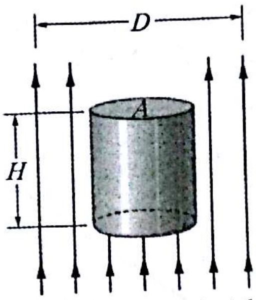
ΔP تکانهٔ اشعه تابیده شده و در نتیجه تغییر تکانهٔ سفینه است.

$$F=\frac{\Delta P}{t}=\frac{P}{c}=\frac{(۱۰\times۱۰^{۳})}{(۳\times۱۰^{۸})}=۳/۳\times۱۰^{-۵}\ \text{N}$$

$$F=ma\Rightarrow a=\frac{F}{m}=\frac{(۳/۳\times۱۰^{-۵})}{(۱/۵\times۱۰^{۳})}=۲/۲\times۱۰^{-۸}\ \text{m/s}^{۲}$$

$$V=at=(۲/۲\times۱۰^{-۸})(۲۴\times۳۶۰۰)=۱/۹\times۱۰^{-۸}\ \text{m/s}$$

۲۸●● - در شکل ۲۹-۳۹ یک باریکهٔ لیزری با توان ۴/۶۰ W و قطر $D=۲/۶۰$ mm در جهت رو به بالا به وجه دایره‌ای (با قطر $d<۲/۶۰$ mm) استوانهٔ کاملاً بازتاب کننده‌ای فرود می‌آید. استوانه به خاطر اینکه نیروی تابشی به سمت بالا با نیروی گرانش رو به پایین یکسان است معلق می‌ماند. اگر چگالی استوانه ۱/۲۰ $\text{g/cm}^{۳}$ باشد، ارتفاع H استوانه چقدر است؟



شکل ۲۹-۳۹ مسئلهٔ ۲۸

حل: نیروی ناشی از تابش با نیروی وزن استوانه برابر است.

$$I=\frac{P}{A}=\frac{P}{\pi r^{۲}}$$

$$F_r=P_rA=\frac{۲IA}{c}=\frac{۲P}{c}$$

$$F_r=\frac{۲(۴/۶۰)}{(۳\times۱۰^{۸})}=۳/۰۷\times۱۰^{-۸}\ \text{N}$$

$$F_r=mg\Rightarrow F_r=\rho AHg\Rightarrow H=\frac{F_r}{\rho Ag}$$

$$H=\frac{(۳/۰۷\times۱۰^{-۸})}{(۱/۲۰\times۱۰^{۳})(۳/۱۴)(۱/۳\times۱۰^{-۳})^{۲}(۹/۸)}$$

$$=۴/۹۲\times۱۰^{-۷}\ \text{m}$$

۲۹●● - شخصی می‌خواهد یک کرهٔ ۰/۵۰۰m کوچک و کاملاً جذب کننده را بالای یک چشمهٔ نقطه‌ای و همسانگرد نور غوطه‌ور کند به طوری که نیروی تابشی به سمت بالای نور با نیروی گرانشی رو به پایین یکسان باشد. چگالی کره ۱۹/۰ $\text{g/cm}^{۳}$ و شعاع آن ۲/۰۰mm است. (الف) توان مورد نیاز چشمهٔ نور چقدر باید باشد؟ (ب) حتی اگر چنین چشمه‌ای ساخته شود، چرا نگهداری کره ناپایدار است؟

حل: (الف) شدت نور درمحل کره برابر است با:

$$I=\frac{P}{A}=\frac{P}{۴\pi r^{۲}}$$

P_r فشار برابر است با:

$$P_r=\frac{I}{c}=\frac{P}{۴\pi r^{۲}c}$$

$$F_r=P_rA'=\frac{P\pi R^{۲}}{۴\pi r^{۲}}=mg\Rightarrow P=\frac{۴r^{۲}cmg}{R^{۲}}$$

$$m=\rho V=\rho\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}$$

$$m=(۱۹\times۱۰^{۳})(\frac{۴}{۳})(۳/۱۴)(۲\times۱۰^{-۳})^{۳}=۶/۳۶\times۱۰^{-۴}\ \text{kg}$$

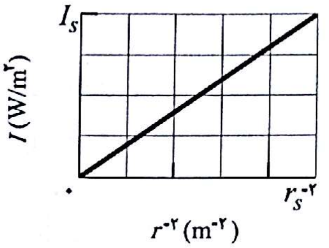
R شعاع کره و r فاصلهٔ کره از منبع تابش است

$$P=\frac{(۴)(۰/۵)^{۲}(۳\times۱۰^{۸})(۶/۳۶\times۱۰^{-۴})(۹/۸)}{(۲\times۱۰^{-۳})^{۲}}=۴/۶۷\times۱۰^{۱۱}\ \text{W}$$

Scanned by CamScanner

(ب) اگر کره در جهت افقی جابه‌جا شود، دیگر راستای وزن نیروی تابش یکسان نیستند و نمی‌توانند یکدیگر را خنثی کنند.

●●۳۰- شدت I نور از یک چشمهٔ نقطه‌ای همسانگرد برحسب تابعی از فاصلهٔ r از چشمه اندازه‌گیری شده است. شکل ۲۹-۴۰ شدت I را برحسب مربع معکوس $r^{-۲}$ فاصله به دست می‌دهد. مقیاس محور قائم $I_s = ۲۰۰\ W/m^۲$ و مقیاس محور افقی $r_s^{-۲} = ۸/۰\ m^{-۲}$ است. توان چشمه چقدر است؟



شکل ۲۹-۴۰ مسئلهٔ ۳۰

حل:

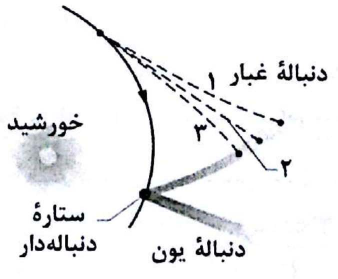
$$I = \frac{P}{۴\pi r^۲}$$

پس شیب I بر حسب $\frac{۱}{r^۲}$ برابر $\frac{P}{۴\pi}$ می‌باشد.

$$\frac{P}{۴\pi} = \frac{۲۰۰}{۱۰} = ۲۰$$

$$P = ۲۵۱\ W$$

●●●۳۱- وقتی ستارهٔ دنباله داری دور خورشید می‌چرخد، یخ روی سطح آن بخار شده ذره‌های غبار و یونهای گرفتار شده رها می‌شوند. چون یونها به طور الکتریکی بار دارند به وسیلهٔ *باد خورشیدی* که آن نیز به طور الکتریکی باردار است به صورت یک *دنبالهٔ یون* مستقیم رانده شده و به طور شعاعی از خورشید دور می‌شوند (شکل ۲۹-۴۱). ذره‌های غبار (که از نظر الکتریکی خنثی هستند) توسط نیروی تابشی وارد بر آنها از طرف نور خورشید به طور شعاعی به دور از خورشید رانده می‌شوند. فرض کنید که ذره‌های غبار کروی و دارای چگالی $\rho = ۳/۵ \times ۱۰^۳\ kg/m^۳$ هستند و تمام نور خورشید را که به آنها می‌رسد جذب می‌کنند. (الف) برای اینکه ذره مسیری مستقیم مانند مسیر ۲ را در شکل طی کند شعاع آن چقدر باید باشد؟ (ب) اگر شعاع بزرگتر باشد، آیا مسیر منحنی آن از خورشید دور می‌شود (مانند مسیرا) یا به سمت خورشید خواهد بود؟ (مانند مسیر ۳)



شکل ۲۹-۴۱ مسئلهٔ ۳۱

حل: (الف) نیروی گرانشی خورشید باید نیروی ناشی از جذب تابش خورشید را خنثی نماید تا حرکت ذره در راستای مستقیم باشد. از جدول پیوست (پ) داده‌های مورد نیاز را بدست می‌آوریم.

$$F = \frac{IA}{C} = G\frac{m\mu_s}{r^۲}$$

$$I = \frac{W}{۴\pi r^۲} \Rightarrow \frac{W}{۴\pi r^۲}\,\frac{\pi R^۲}{C} = \frac{G\rho \frac{۴}{۳}\pi R^۳}{r^۲}\mu_s$$

$$R = \frac{۳W}{۱۶\pi G\rho C\mu_s}$$

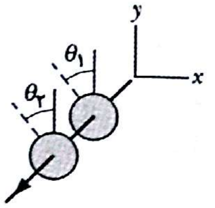
که با قرار دادن مقادیر عددی خواهیم داشت

$$R = ۱/۷ \times ۱۰^{-۷}\ m$$

(ب) به سمت خورشید خواهد بود.

بخش ۲۹-۷ قطبش

●۳۲- در شکل ۲۹-۴۲ یک باریکهٔ نور ناقطبیده با شدت $۴۳\ W/m^۲$ به سامانه‌ای با دو ورقهٔ قطبنده با جهتهای قطبیدگی با زاویهٔ $\theta_۱ = ۷۰^\circ$ و $\theta_۲ = ۹۰^\circ$ نسبت به محور y، می‌تابد. شدت نوری که از این سامانه عبور می‌کند چقدر است؟



شکل ۲۹-۴۲ مسئله‌های ۳۲، ۳۳ و ۳۶

حل: نور اولیهٔ قطبیده نیست بنابراین شدت نوری که از قطبندهٔ اول آن برابر است با:

$$I_۱ = \frac{۱}{۲}I_۰$$

این نور قطبیده است، بنابراین بعد از عبور از قطبندهٔ دوم، شدت آن برابر می‌شود با:

$$I_۱ = I_۱\cos^۲(\theta_۲ - \theta_۱) = \frac{I_۰}{۲}\cos^۲(\theta_۲ - \theta_۱)$$

$$I_۲ = \frac{(۴۳)}{۲}\cos^۲(۹۰ - ۷۰) = ۱۸/۹۸\ W/m^۲$$

●۳۳- در شکل ۲۹-۴۲، باریکهٔ نور با شدت $۴۳\ W/m^۲$ و قطبش موازی با محور y به سامانهٔ دو ورقهٔ قطبنده می‌تابد که جهتهای قطبیدگی آنها با محور y زاویهٔ $\theta_۱ = ۷۰^\circ$ و $\theta_۲ = ۹۰^\circ$ می‌سازند. شدت نوری که از دو ورقه عبور می‌کند چقدر است؟ **ILW**

حل: بر طبق قانون مالوس، اگر $I_۰$ شدت اولیهٔ نور باشد، بعد از عبور از عبور قطبندهٔ اول شدت آن برابر است با:

$$I_۱ = I_۰\cos^۲\theta_۱$$

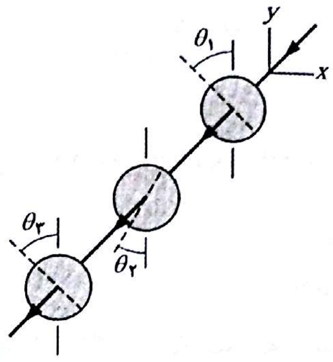
و بعد از عبور از قطبندهٔ دوم، شدت آن برابر است با:

$$I_۲ = I_۱\cos^۲(\theta_۲ - \theta_۱) = I_۰\cos^۲\theta_۱\cos^۲(\theta_۲ - \theta_۱)$$

Scanned by CamScanner

$I_۲ = (۴۳)\cos^۲ ۷۰.\cos^۲(۹۰-۷۰) = ۴/۴\ W/m^۲$

●۳۴- در شکل ۲۹-۴۳، نور ناقطبیدهٔ اولیه‌ای به سامانه‌ای شامل سه ورقهٔ قطبنده می‌تابد که جهت‌های قطبیدگی آنها با جهت محور y زاویه‌های $\theta_۱ = \theta_۲ = \theta_۳ = ۵۰^\circ$ می‌سازند. چه درصدی از شدت اولیه از سامانه عبور می‌کند؟ (راهنمایی: مراقب زاویه‌ها باشید.)



شکل ۲۹-۴۳ مسئله‌های ۳۴ و ۳۵

حل:

$$I_۱ = \frac{I_۰}{۲}$$

$$I_۲ = I_۱\cos^۲(\theta_۲+\theta_۱) = \frac{I_۰}{۲}\cos^۲(\theta_۲+\theta_۱)$$

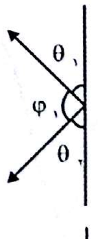
$$I_۳ = I_۲\cos^۲(\theta_۳+\theta_۲) = \frac{I_۰}{۲}\cos^۲(\theta_۲+\theta_۱)\times$$

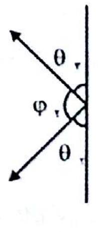
$$\cos^۲(\theta_۳+\theta_۲)$$

$$\frac{I_۳}{I_۰} = (\frac{۱}{۲})\cos^۲(۱۰۰)\cos^۲(۱۰۰) = ۴/۵۵\times۱۰^{-۴}$$ **یا** $\%۰/۰۴۵$

●۳۵- در شکل ۲۹-۴۳، نور ناقطبیدهٔ اولیه‌ای به سامانه‌ای شامل سه ورقهٔ قطبنده می‌تابد که جهت قطبیدگی آنها با جهت محور y زاویه‌های $\theta_۱ = ۴۰^\circ$ ، $\theta_۲ = ۲۰^\circ$ و $\theta_۳ = ۴۰^\circ$ می‌سازند. چه درصدی از شدت اولیه از سامانه عبور می‌کند؟ (راهنمایی: مراقب زاویه‌ها باشید). **SSM**

حل:





$$I_۱ = \frac{I_۰}{۲}$$

$$\varphi = ۱۸۰-(\theta_۱+\theta_۲) = ۱۲۰^\circ$$

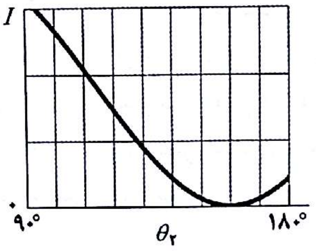
$$I_۲ = I_۱\cos^۲\varphi_۱ = \frac{I_۰}{۲}\cos^۲ ۱۲۰$$

$$\varphi_۲ = ۱۸۰-(\theta_۲+\theta_۳) = ۱۲۰$$

$$I_۳ = I_۲\cos^۲\varphi_۲ = \frac{I_۰}{۲}\cos^۲ ۱۲۰\cos^۲ ۱۲۰ = \frac{I_۰}{۲}\cos^۴(۱۲۰)$$

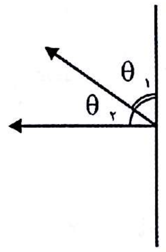
$$\frac{I_۳}{I_۰} = ۰/۰۳۱۳$$ **یا** $\%۳/۱۳$

●●۳۶- در شکل ۲۹-۴۲، نور ناقطبیده به سامانه‌ای شامل دو ورقهٔ قطبنده می‌تابد. زاویه‌های $\theta_۱$ و $\theta_۲$ جهت‌های قطبش ورقه‌ها به طور پادساعتگرد نسبت به جهت مثبت محور y اندازه‌گیری شده‌اند (آنها بدون مقیاس در شکل رسم شده‌اند). زاویهٔ $\theta_۱$ ثابت است اما زاویهٔ $\theta_۲$ می‌تواند تغییر کند. شکل ۲۹-۴۴ شدت نور خروجی از ورقهٔ ۲ را برحسب $\theta_۲$ به دست می‌دهد. (مقیاس محور شدت مشخص نشده است.) وقتی $\theta_۲ = ۹۰^\circ$ باشد، چه درصدی از شدت اولیه از دو ورقه عبور می‌کند؟



شکل ۲۹-۴۴ مسئلهٔ ۳۶

حل:



$$I_۱ = \frac{I_۰}{۲}$$

$$I_۲ = I_۱\cos^۲(\theta_۲-\theta_۱) = \frac{I_۰}{۲}\cos^۲(\theta_۲-\theta_۱)$$

هنگامی که $\theta_۲ = ۱۶۰^\circ$ می‌باشد، شدت $I_۲$ صفر است پس جهت قطبش آنها ابرهم عمود می‌باشد.

$$\theta_۲-\theta_۱ = ۹۰^\circ \Rightarrow ۱۶۰-\theta_۱ = ۹۰$$

$$\theta_۱ = ۷۰^\circ$$

$$\theta_۲ = ۹۰ \Rightarrow \theta_۲-\theta_۱ = ۹۰-۷۰ = ۲۰$$

$$I_۲ = \frac{I_۰}{۲}\cos^۲ ۲۰ \Rightarrow \frac{I_۲}{I_۰} = ۰/۴۴۲$$ یا $\%۴۴/۲$

●●۳۷- نور ناقطبیده‌ای با شدت $۱۰\ mW/m^۲$ مطابق شکل ۲۹-۱۱ به ورقهٔ قطبنده‌ای می‌تابد. (الف) دامنهٔ مؤلفهٔ میدان الکتریکی نور عبوری و (ب) فشار تابشی روی ورقه به خاطر جذب قسمتی از نور، چقدر است؟

حل: (الف)

$$I = \frac{I_0}{2} = 5\,mW/m^2$$

$$I = \frac{E_m^2}{2\mu_0 c} \Rightarrow E_m = \sqrt{2\mu_0 c I}$$

$$E_m = \sqrt{(2)(4\pi\times10^{-7})(3\times10^{8})(5\times10^{-3})} \simeq 1.9\ V/m$$

(ب)

$$P_r = \frac{I}{c} = \frac{(5\times10^{-3})}{(3\times10^{8})} = 1.67\times10^{-11}\ Pa$$

●●۳۸- نور در ساحل معمولاً به علت بازتابهایی که از ماسه و آب صورت می‌گیرد قطبیدهٔ جزئی است. در یک ساحل معین و در یک روز معین، نزدیک غروب مؤلفهٔ افقی بردار میدان الکتریکی ۲/۳ برابر مؤلفهٔ عمودی است. شخصی که در ساحل ایستاده است عینکی با شیشه‌های قطبنده را به چشم می‌زند و عینک مؤلفهٔ افقی میدان را حذف می‌کند. (الف) چه کسری از شدت نوری که قبل از گذاشتن عینک به چشم شخص می‌رسید، حالا به چشمهای او می‌رسد؟ (ب) شخصی که هنوز عینک را به چشم دارد، به پهلو دراز می‌کشد، چه کسری از شدت نوری که قبل از گذاشتن عینک به چشم شخص می‌رسید، اکنون به چشم او می‌رسد؟

حل:

$$E_h = 2.3 E_v$$

$$E = \sqrt{E_h^2 + E_v^2} = \sqrt{(2.3E_v} = 2.51 E_v$$

$$I_1 \,\alpha\, E^2 \,\alpha\, (2.51)^2 E_v^2$$

(الف) با حذف مؤلفهٔ افقی، فقط مؤلفهٔ قائم به چشم می‌رسد.

$$I_2 \,\alpha\, E_v^2$$

بنابراین:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{E_v^2}{(2.5)^2 E_v^2} = 0.16$$ یا ۱۶%

(ب) وقتی شخصی دراز می‌کشد، عینک او مؤلفهٔ قائم را حذف می‌کند. در این صورت:

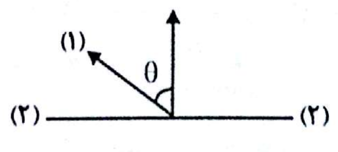
$$I_2 \,\alpha\, E_h^2 \,\alpha\, (2.3)^2 E_v^2$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{(2.3)^2 E_v^2}{(2.5)^2 E_v^2} = 0.84$$ یا ۸۴%

●●۳۹- باریکهٔ نور قطبیده‌ای به سامانه‌ای شامل دو ورقهٔ قطبنده می‌تابد. نسبت به جهت قطبش نور تابیده جهتهای قطبیدگی ورقه‌ها عبارت‌اند از زاویهٔ θ برای اولین ورقه و 90° برای دومین ورقه. اگر ۰/۱۰ شدت فرودی از دو ورقه عبور کند، θ چقدر است؟

حل:

جهت قطبندگی نور ورودی



$$I_1 = \frac{I_0}{2}$$

برای قطبندگی صفحهٔ دوم، مطابق شکل دو جهت امکان دارد

بنابراین:

حالت اول $I_2 = I_1 \cos^2(\theta_2 + \theta_1) = I_0 \cos^2\theta \cos^2(90-\theta)$

$= I_0 \cos^2\theta \sin^2\theta$

حالت دوم $I'_2 = I_1 \cos^2(\theta_2 + \theta) = I_0 \cos^2\theta \cos^2(90+\theta)$

$= I_0 \cos^2\theta \sin^2\theta$

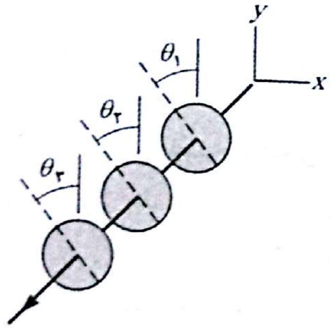
$$I_2 = \frac{I_0}{4}\sin^2\theta$$

$$\frac{I_2}{I_0} = 0.1 = \frac{1}{4}\sin^2 2\theta \Rightarrow \sin 2\theta = 0.632 = \sin 40^\circ, \sin 140^\circ$$

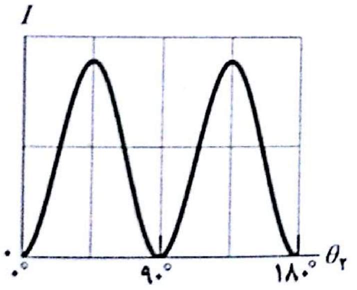
$$2\theta = 40^\circ \Rightarrow \theta = 20^\circ$$

$$2\theta = 140^\circ \Rightarrow \theta = 70^\circ$$

●●۴۰- در شکل ۲۹-۴۵، نور ناقطبیده به سامانه‌ای شامل سه ورقهٔ قطبنده می‌تابد. زاویه‌های θ_1 ، θ_2 و θ_3 جهتهای قطبش به طور پادساعتگرد از جهت مثبت محور y اندازه‌گیری شده‌اند (آنها بدون مقیاس رسم شده‌اند). زاویه‌های θ_1 و θ_3 ثابت‌اند اما θ_2 می‌تواند تغییر کند. شکل ۲۹-۴۶ شدت نور خروجی از ورقهٔ ۳ را بر حسب تابعی از θ_2 به دست می‌دهد. (مقیاس محور شدت مشخص نشده است). وقتی $\theta_2 = 30^\circ$ باشد، چه درصدی از شدت نور اولیه از سه ورقه عبور می‌کند؟



شکل ۲۹-۴۵ مسئله‌های ۴۰، ۴۲ و ۴۴



شکل ۲۹-۴۶ مسئلهٔ ۴۰

حل:

$$I_1 = \frac{I_0}{2}$$

$$I_2 = I_1 \cos^2(\theta_2 - \theta_1) = \frac{I_0}{2}\cos^2(\theta_2 - \theta_1)$$

$$I_3 = I_2 \cos^2(\theta_3 - \theta_2) = \frac{I_0}{2}\cos^2(\theta_2 - \theta_1)\times \cos^2(\theta_3 - \theta_2)$$

Scanned by CamScanner

از نمودار مشخص است که در ۱۸۰ و ۹۰ و ۰ = $\theta_۲$ شدت $I_۳$ صفر و در ۱۳۵ و ۴۵ = θ بیشینه است. پس:

$$\theta_۲ = ۰ \Rightarrow I_۳ = \frac{I_۰}{۲}\cos^۲\theta_۱\cos^۲\theta_۳ = ۰$$

$$\cos\theta_۱\cos\theta_۳ = ۰ \qquad (۱)$$

$$\theta_۲ = ۹۰^\circ \Rightarrow I_۳ = \frac{I_۰}{۲}\cos^۲(۹۰-\theta_۱)\cos^۲(\theta_۳-۹۰) = ۰$$

$$\sin\theta_۱\sin\theta_۳ = ۰ \qquad (۲)$$

از دو رابطهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$\cos\theta_۳ = ۰ \Rightarrow \theta_۳ = \frac{\pi}{۲}$$

$$\sin\theta_۱ = ۰ \Rightarrow \theta_۱ = ۰$$

و یا:

$$\cos\theta_۱ = ۰ \Rightarrow \theta_۱ = \frac{\pi}{۲}$$

$$\sin\theta_۳ = ۰ \Rightarrow \theta_۳ = ۰$$

بنابراین اگر $\theta_۲ = ۳۰^\circ$ باشد.

$$\frac{I_۳}{I_۰} = (\frac{۱}{۲})\cos^۲(۳۰-۰)\cos^۲(۹۰-۳۰) = ۰/۰۹۴ \text{ یا } \%۹/۴$$

$$\frac{I_۳}{I_۰} = (\frac{۱}{۲})\cos^۲(۳۰-۹۰)\cos^۲(۱۸۰-۳۰) = ۰/۰۹۴ \text{ یا } \%۹/۴$$

۴۱●●- یک باریکهٔ نور را که به طور جزئی قطبیده است می‌توان ترکیب نور قطبیده و ناقطبیده در نظر گرفت. فرض کنید چنین باریکه‌ای را به یک پالایهٔ قطبنده بتابانیم و سپس در حالی که پالایه را عمود بر باریکه نگه داشته‌ایم آن را ۳۶۰° بچرخانیم. اگر در این چرخش شدت نور عبوری با ضریب ۵/۰ تغییر کند، چه کسری از شدت باریکهٔ اولیه به نور باریکهٔ قطبیده مربوط بوده است؟

حل: فرض می‌کنیم $I_۰$ شدت نور غیر قطبیده و $I_۱$ نور قطبیده در نور ورودی می‌باشد. در این صورت بعد از عبور از یک صفحهٔ قطبیده، شدت نور I' برابر است با:

$$I' = \frac{I_۰}{۲} + I_۱\cos^۲\theta$$

که θ زاویهٔ بین جهت قطبنده و جهت قطبندگی نور ورودی است. در $\theta = ۰$، شدت نور I' بیشینه و در $\theta = \frac{\pi}{۲}$ این شدت کمینه است.

$$I'_۱ = \frac{I_۰}{۲} + I_۱$$

$$I'_۲ = \frac{I_۰}{۲}$$

بر طبق فرض مسئله $I'_۱ = ۵I'_۲$

$$I'_۱ = ۵I'_۲ \Rightarrow ۵(\frac{I_۰}{۲}) = \frac{I_۰}{۲} + I_۱$$

$$I_۱ = ۲I_۰$$

شدت نور غیر قطبیده برابر است با:

$$\frac{I_۰}{I_۱ + I_۰} = \frac{۲}{۳} \text{ یا } \%۳۳/۳$$

شدت نور قطبیده برابر است با:

$$\frac{I_۱}{I_۱ + I_۰} = \frac{۲}{۳} \text{ یا } \%۶۶/۷$$

۴۲●●- در شکل ۲۹-۴۵، نور ناقطبیده به سامانه‌ای شامل سه ورقه می‌تابد که ۰/۰۵۰۰ شدت نور اولیه را عبور می‌دهد. جهتهای قطبیدگی اولین و سومین ورقه زاویه‌های $\theta_۱ = ۰^\circ$ و $\theta_۳ = ۹۰^\circ$ می‌سازند. مطلوب است مقدار (الف) کمتر و (ب) بیشتر زاویهٔ ممکن $\theta_۲ (<۹۰^\circ)$ برای جهت قطبیدگی ورقهٔ ۲.

حل: (الف) و (ب)

$$I_۱ = \frac{I_۰}{۲}$$

$$I_۲ = I_۱\cos^۲(\theta_۲ - ۰) = I_۱\cos^۲\theta_۲ = \frac{I_۰}{۲}\cos^۲\theta_۲$$

$$I_۳ = I_۲\cos^۲(\theta_۳ - \theta_۲) = \frac{I_۰}{۲}\cos^۲\theta_۲\cos^۲(۹۰-\theta_۲)$$

$$= \frac{I_۰}{۲}\cos^۲\theta_۲\sin^۲\theta_۲$$

$$\frac{I_۳}{I_۲} = ۰/۰۵ = \frac{۱}{۲}\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲\theta_۲ = \frac{۱}{۸}\sin^۲ ۲\theta_۲$$

و جواب دیگر برابر است با:

$$\sin ۲\theta_۲ = ۰/۴ \Rightarrow ۲\theta_۲ = ۲۳/۶^\circ \Rightarrow \theta_۲ = ۱۱/۸^\circ$$

$$۲\theta_۲ = ۱۵۶/۴^\circ \Rightarrow \theta_۲ = ۷۸/۲^\circ$$

۴۳●●- می‌خواهیم جهت قطبیدگی یک باریکهٔ نور قطبیده را با تابانیدن باریکه به یک ورقهٔ قطبنده یا بیشتر به اندازهٔ ۹۰° بچرخانیم. (الف) کمترین تعداد ورقه‌های لازم چند تا است؟ (ب) در صورتی که بخواهیم شدت عبوری بیشتر از ٪۶۰ شدت اولیه باشد، کمترین تعداد ورقه‌های لازم چندتا است؟
SSM WWW

حل: (الف) اگر از یک قطبنده استفاده نماییم، و زاویهٔ بین جهت اولیه و جهت قطبنده را ۹۰° انتخاب نماییم. جهت قطبندگی ۹۰° تغییر می‌کند ولی شدت عبوری صفر می‌باشد. پس حداقل باید از دو صفحه استفاده نماییم.

(ب) اگر از N صفحه استفاده نماییم:

$$N\theta = ۹۰ \qquad (۱)$$

$$I = I_۰\cos^{۲N}\theta \Rightarrow ۰/۶ = \cos^{۲N}\theta \qquad (۲)$$

که یک دستگاه دو معادله و دو مجهول است.

ساده‌ترین راه حل این دستگاه دو معادله و دو مجهول، روش سعی و خطا می‌باشد.

$$N = ۲ \Rightarrow \theta = ۴۵^\circ \Rightarrow \frac{I}{I_۰} = (\cos ۴۵)^۴ = ۰/۲۵ < ۰/۶$$

$$N = ۳ \Rightarrow \theta = ۳۰^\circ \Rightarrow \frac{I}{I_۰} = (\cos ۳۰)^۴ = ۰/۳۲ < ۰/۶$$

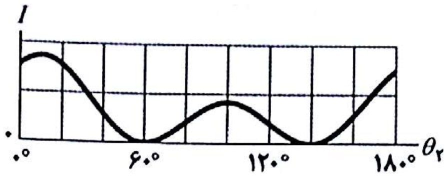
$$N = ۴ \Rightarrow \theta = ۲۲/۵^\circ \Rightarrow \frac{I}{I_۰} = (\cos ۲۲/۵)^۸ = ۰/۵۳ < ۰/۶$$

$$N = ۵ \Rightarrow \theta = ۱۸^\circ \Rightarrow \frac{I}{I_۰} = (\cos ۱۸)^{۱۰} = ۰/۶۰۵$$

پس می‌توان $N = ۵$ را فرض نمود.

Scanned by CamScanner

●●۴۴- در شکل ۲۹-۴۵، نور ناقطبیده به سامانه‌ای شامل سه ورقهٔ قطبنده می‌تابد. زاویه‌های θ_1 ، θ_2 و θ_3 جهتهای قطبیدگی به طور پاد ساعتگرد از جهت مثبت محور y اندازه‌گیری شده‌اند (آنها بدون مقیاس رسم شده‌اند). زاویه‌های θ_1 و θ_3 ثابت‌اند اما زاویهٔ θ_2 می‌توانند تغییر کند. شکل ۲۹-۴۷ شدت نور خروجی از ورقهٔ ۳ را برحسب تابعی از θ_2 به دست می‌دهد. (مقیاس محور شدت مشخص نشده است.) وقتی $\theta_2 = 90°$ باشد، چه درصدی از شدت نور اولیه از سامانه عبور می‌کند؟



شکل ۲۹-۴۷ مسئلهٔ ۴۴

حل:

$$I_1 = \frac{I_0}{2}$$

$$I_2 = I_1 \cos^2(\theta_2 - \theta_1) = \frac{I_0}{2}\cos^2(\theta_2 - \theta_1)$$

$$I_3 = I_2 \cos^2(\theta_3 - \theta_2) = \frac{I_0}{2}\cos^2(\theta_2 - \theta_1) \times \cos^2(\theta_3 - \theta_2)$$

از نمودار مشخص است اگر $\theta_2 = 60°$ ، ۱۴۰ باشد، I_3 صفر می‌گردد. بنابراین:

$$\theta_2 = 60° \Rightarrow I_3 = I_3 = \frac{I_0}{2}\cos^2(60 - \theta_1)\cos^2(\theta_3 - 60) = 0$$

$$\cos(60 - \theta_1)\cos(\theta_3 - 60) = 0$$

یکی از دو جملهٔ مربوط به کسینوس صفر است بنابراین:

$$\cos(160 - \theta_1) = 0 = \cos - 90° \Rightarrow 60 - \theta_1 = -90 \Rightarrow$$

$$\theta_1 = 150°$$

$$\cos(\theta_3 - 60) = \cos - 90° \Rightarrow \theta_3 = 150°$$

$$\theta_2 = 140°$$

$$\cos(\theta_3 - 140) = \cos(-90°) \Rightarrow \theta_1 = 50°$$

$$\cos(140 - \theta_1) = \cos(90°) \Rightarrow \theta_1 = 50°$$

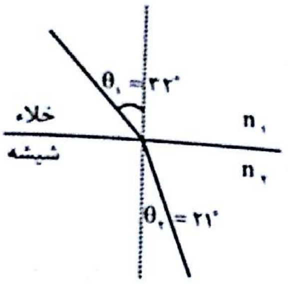
$$\theta_2 = 90° \quad \theta_1 = 50° \quad \theta_3 = 150°$$

$$\frac{I_3}{I_0} = (\frac{1}{2})\cos^2(90 - 50)\cos^2(150 - 90) = 0/073 = \%7/3$$

بخش ۲۹-۸ بازتاب و شکست

●۴۵- نوری در خلأ به سطح یک تیغهٔ شیشه‌ای می‌تابد. باریکه در خلأ با عمود بر سطح زاویهٔ $32/0°$ می‌سازد، در حالی که در شیشه با عمود زاویهٔ $21/0°$ می‌سازد. ضریب شکست شیشه چقدر است؟

حل:

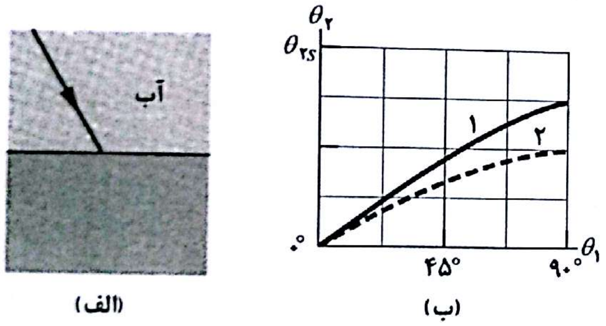


$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

$$(1)\sin 32 = n_2 \sin 21$$

$$n_2 = \frac{\sin 32}{\sin 21} = 1/48$$

●۴۶- در شکل ۲۹-۴۸ الف، یک پرتو نور در آب با زاویهٔ θ_1 روی مرزی که زیر آن ماده است فرود می‌آید، قسمتی از نور شکسته شده به داخل ماده می‌رود. دو انتخاب برای ماده وجود دارد. برای هر یک، زاویهٔ شکست θ_2 برحسب زاویهٔ فرود θ_1 در شکل ۲۹-۴۸ ب داده شده است. مقیاس محور قائم با $\theta_{2s} = 90°$ مشخص شده است. بدون محاسبه معین کنید، آیا ضریب شکست (الف) مادهٔ ۱ و (ب) مادهٔ ۲ بزرگتر یا کوچکتر از ضریب شکست آب $(n = 1/33)$ است؟ ضریب شکست (پ) مادهٔ ۱ و (ت) مادهٔ ۲ چقدر است؟



شکل ۲۹-۴۸ مسئلهٔ ۴۶

حل: (الف) و (ب) پرتو نور از آب وارد محیط دیگر شده است. اگر $n > n_w$ (n_w ضریب شکست آب) باشد، پرتو شکست به خط عمود نزدیک می‌گردد و اگر $n < n_w$ باشد، پرتو شکست از خط عمود دورتر می‌گردد.

از نمودار مشخص است، برای زاویهٔ $\theta_1 = 45°$، برای مادهٔ (۱) و (۲) $\theta_2 < 45°$ می‌باشد، یعنی ضریب شکست هر دو بیشتر از آب است.

(ج) و (د) در $\theta_1 = 90°$، برای مادهٔ (۱) $\theta = 67/5°$ و برای مادهٔ (۲) $\theta = 45°$ می‌باشد. این زاویه، برای هر دو ماده، زاویهٔ بحرانی است.

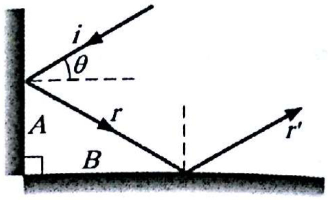
$$n_w \sin 90 = n_1 \sin 67/5 \quad \text{مادهٔ (۱)}$$

$$n_1 = \frac{(1/33)(1)}{(0/92)}$$

$$n_2 = \frac{(1/33)(1)}{\sin 45} = 1/88 \quad \text{مادهٔ (۲)}$$

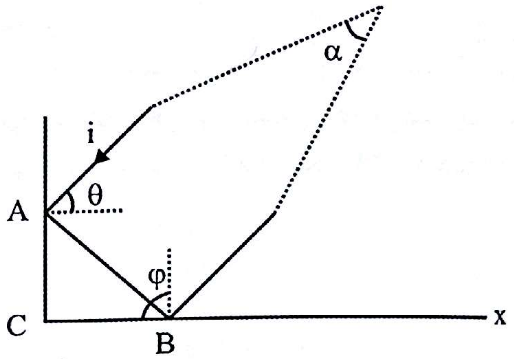
Scanned by CamScanner

●۴۷- شکل ۲۹-۴۹ نور بازتابیده را از دو سطح بازتاب دهندهٔ عمود بر هم A و B نشان می‌دهد. زاویهٔ بین پرتو ورودی i و پرتو خروجی r' را به دست آورید.



شکل ۲۹-۴۹ مسئلهٔ ۴۷

حل:



$\hat{A} = ۹۰ - \theta$

$\hat{B} = ۹۰ - A = \theta$

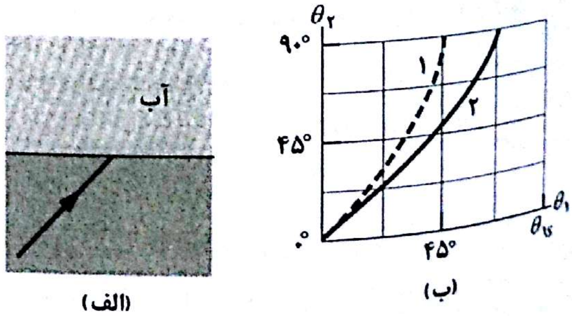
$\varphi = ۹۰ - B = ۹۰ - \theta \Rightarrow \varphi + \theta = ۹۰$

اگر دو پرتو همدیگر را قطع کنند. زاویهٔ α بین آنها برابر است با:

$$\alpha = ۱۸۰ - ۲(\theta + \varphi) = ۰$$

یعنی دو پرتو موازی هستند.

●۴۸- در شکل ۲۹-۵۰ الف، پرتو نور از مادهٔ زیر با زاویهٔ $\theta_۱$ روی سطح جدایی با آب فرود می‌آید. و مقداری از نور در آب می‌شکند. دو انتخاب برای مادهٔ زیر وجود دارد. برای هر یک، زاویهٔ شکست $\theta_۲$ برحسب زاویهٔ فرود $\theta_۱$ در شکل ۲۹-۵۰ ب نشان داده شده است. مقیاس محور افقی با $\theta_{۱s} = ۹۰°$ مشخص شده است. بدون محاسبه، مشخص کنید که آیا ضریب شکست (الف) مادهٔ ۱ و (ب) مادهٔ ۲ بزرگتر یا کوچکتر از ضریب شکست آب $(n = ۱/۳۳)$ است؟ ضریب شکست (پ) مادهٔ ۱ و (ت) مادهٔ ۲ چقدر است؟



شکل ۲۹-۵۰ مسئلهٔ ۴۸

حل: پرتو نور از درون ماده با زاویهٔ $\theta_۱$ به سطح آب برخورد کرده و با زاویهٔ $\theta_۲$ به درون آن وارد شده است اگر $\theta_۱ > \theta_۲$ باشد، $n < n_w$ است و برعکس اگر $\theta_۱ < \theta_۲$ باشد $n > n_w$ می‌باشد. (الف) و (ب) به ازای زاویهٔ $\theta_۱ = ۴۸°$ برای مادهٔ (۱) $\theta_۲ = ۹۰$ برای مادهٔ (۲) $\theta_۲' = ۴۸°$ می‌باشد، پس هر دو ماده دارای ضریب شکستی بیشتر از آب هستند. (اشعه‌ها موقع ورود به آب از خط عمود دور شده‌اند).

(ج) برای مادهٔ (۱) داریم:

$$\theta_۲ = ۹۰ \Rightarrow \theta_۱ = ۴۵°$$

از قانون اسنل- دکارت داریم:

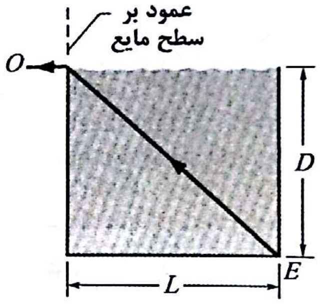
$$n_w \sin ۹۰ = n_۱ \sin ۴۵ \Rightarrow n_۱ = \frac{(۱/۳۳)(۱)}{\left(\sqrt{۲}/۲\right)} = ۱/۸۸$$

(د) برای مادهٔ (۲) داریم:

$$\theta_۲ = ۹۰° \Rightarrow \theta_۱ = ۶۷/۵°$$

$$n_۲ = \frac{n_w \sin \theta_۱}{\sin \theta_۲} = \frac{(۱/۳۳)(۱)}{(\sin ۶۷/۵)} = ۱/۴۴$$

●۴۹- وقتی مخزن مکعب مستطیل فلزی در شکل ۲۹-۵۱ پر از مایع نامشخصی است، ناظری که چشمهایش هم سطح بالای مخزن است فقط می‌تواند گوشهٔ E را ببیند؛ پرتوی که در سطح بالای مایع به سمت O شکسته می‌شود نشان داده شده است. اگر $L = ۱/۱۰\ \text{m}$ و $D = ۸۵/۰\ \text{cm}$ باشد، ضریب شکست مایع چقدر است؟



شکل ۲۹-۵۱ مسئلهٔ ۴۹

حل: در سطح مایع،نور با زاویهٔ بحرانی برخورد کرده است.

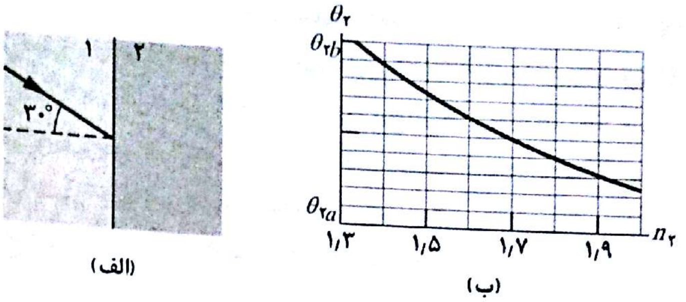
$$\tan \theta_c = \frac{L}{D} = \frac{۱/۱}{۰/۸۵} = ۱/۲۹۴$$

$$\theta_c = ۵۲/۳°$$

$$n = \frac{۱}{\sin \theta_c} = \frac{۱}{\sin ۵۲/۳} = ۱/۲۶$$

●●۵۰- در شکل ۲۹-۵۲ الف، یک باریکهٔ نوری در محیط ۱ با زاویهٔ $\theta_۱ = ۳۰°$ به سطح جدایی فرود می‌آید. میزان شکست نور به داخل محیط ۲ بخشی به ضریب شکست $n_۲$ محیط ۲ بستگی دارد. شکل ۲۹-۵۲ ب، زاویهٔ شکست $\theta_۲$ را برحسب $n_۲$ برای گسترهٔ ممکنی از مقدارهای $n_۲$ به دست می‌دهد. مقیاس محور قائم با $\theta_{۲a} = ۲۰/۰°$ و $\theta_{۲b} = ۴۰/۰°$ مشخص شده است. (الف) ضریب شکست مادهٔ ۱ چقدر است؟ (ب)

اگر زاویهٔ فرود به $۶۰°$ تغییر کند و مادهٔ ۲ دارای $n_2 = ۲/۴$ باشد، آنگاه زاویهٔ θ_2 چقدر است؟



شکل ۲۹-۵۲ مسئلهٔ ۵۰

حل:

(الف)

$n_2 = ۱/۶ \Rightarrow \theta_2 = ۳۲°$

$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$

$n_1 \sin ۳۰ = (۱/۶۰)\sin ۳۲ \Rightarrow n_1 = ۱/۶۹۵$

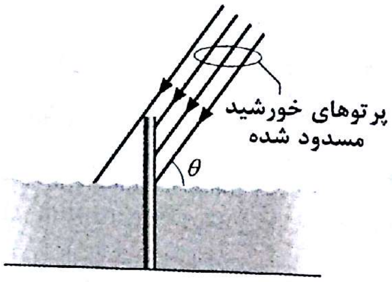
(ب)

$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$

$(۱/۶۹۵)\sin ۶۰ = (۲/۴)\sin\theta_2$

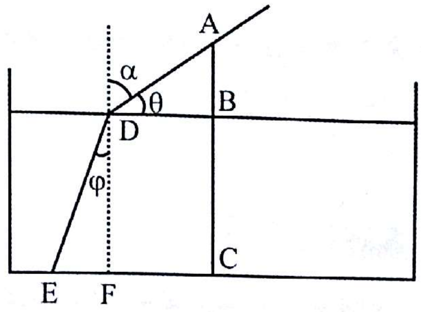
$\sin\theta_2 = ۰/۶۱ \Rightarrow \theta_2 = ۳۷/۶°$

●●۵۱- در شکل ۲۹-۵۳، میله‌ای به طول ۲/۰۰m به طور قائم از ته استخر شنا تا ۵۰/۰cm بالای آب قرار دارد. نور خورشید با زاویهٔ $\theta = ۵۵/۰°$ می‌تابد. طول سایهٔ میله در کف استخر چقدر است؟ SSM



شکل ۲۹-۵۳ مسئلهٔ ۵۱

حل:



$\alpha = ۹۰ - \theta = ۳۵°$

$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\varphi \Rightarrow (۱)\sin ۳۵ = (۱/۳۳)\sin\varphi$

$\sin\varphi = ۰/۴۳۱ \Rightarrow \varphi = ۲۵/۵°$

$\tan\varphi = \frac{EF}{DF} \Rightarrow EF = (DF)\tan\varphi$

$EF = (۱/۵)\tan ۲۵/۵ = ۰/۷۲\,m$

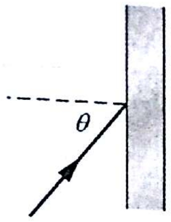
$\tan\theta = \frac{AB}{DB} \Rightarrow DB = \frac{AB}{\tan\theta}$

$DB = \frac{(۰/۵)}{\tan ۵۵} = ۰/۳۵$

EC طول سایه در کف استخر است.

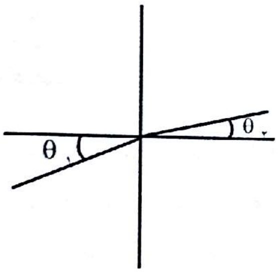
$EC = ۰/۷۲ + ۰/۳۵ = ۱/۰۷$

●●۵۲- *پاشندگی در شیشهٔ پنجره.* در شکل ۲۹-۵۴، یک باریکهٔ نور سفید با زاویهٔ $\theta = ۵۰°$ روی شیشهٔ یک پنجرهٔ معمولی (سطح مقطع نشان داده شده است) فرود می‌آید. برای چنین شیشه‌هایی ضریب شکست برای نور مرئی از ۱/۵۲۴ برای آبی در یک طرف طیف تا ۱/۵۰۹ برای ترمز در طرف دیگر طیف تغییر می‌کند. دو طرف شیشه موازی‌اند. (الف) وقتی نور وارد شیشه می‌شود و (ب) وقتی از طرف دیگر خارج می‌شود، گسترش زاویه‌ای رنگها در باریکه چقدر است؟ (راهنمایی: وقتی از میان شیشهٔ پنجره به جسمی نگاه می‌کنید، آیا رنگها در نور پاشیده شده از جسم مثلاً مثل شکل ۲۹-۲۰ هستند؟)



شکل ۲۹-۵۴ مسئلهٔ ۵۲

حل: (الف) وقتی نور وارد شیشه می‌شود



$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$

$(۱)\sin ۵۰ = ۱/۵۲۴ \sin\theta_2$

$\sin\theta_2 = ۰/۵۰۳ \Rightarrow$ آبی $\theta_2 = ۳۰/۱۹۸$

$(۱)\sin ۵۰ = ۱/۵۰۹ \sin\theta_2$

$\sin\theta_2 = ۰/۵۰۸ \Rightarrow$ قرمز $\theta_2 = ۳۰/۵۳۱$

باشندگی زاویه‌ای درون شیشه برابر است با:

$\Delta\theta = ۳۰/۵۳۱ - ۳۰/۱۹۸ = ۰/۳۳۳°$ پاشندگی

(ب) موقع خروج از شیشه:

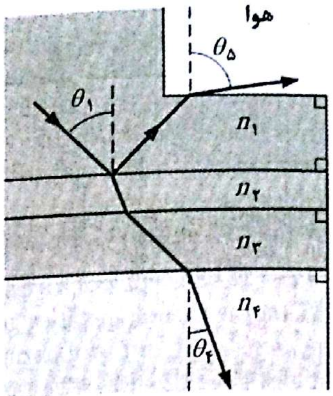
$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 = n_3 \sin\theta_3$

که $n_1 = n_3$ می‌باشد پس $\theta_3 = \theta_1 = ۵۰$

●●۵۳- در شکل ۲۹-۵۵، نور با زاویهٔ $\theta_1 = ۴۰/۱°$ به سطح جدایی دو محیط شفاف فرود می‌آید. قسمتی از نور به سمت پایین و از میان سه محیط شفاف دیگر حرکت می‌کند، در حالی که قسمت دیگری از آن به سمت بالا بازتابیده شده و سپس وارد هوا می‌شود. اگر $n = ۱/۳۰$ ، $n_2 = ۱/۴۰$ ، $n_3 = ۱/۳۲$ و

Scanned by CamScanner

$n_۴ = ۱/۴۵$ باشد، مقدار (الف) $\theta_۵$ و (ب) $\theta_۴$ چقدر است؟



شکل ۲۹-۵۵ مسئلهٔ ۵۳

حل: (الف) برای نوری که از محیط (۱) وارد هوا می‌شود:

$n_۱ \sin\theta_۱ = n_۲ \sin\theta_۲$

$(۱/۳۰)\sin ۴۰/۱ = (۱)\sin\theta_۵$

$\sin\theta_۵ = ۰/۸۳۷ \Rightarrow \theta_۵ = ۵۶/۹^\circ$

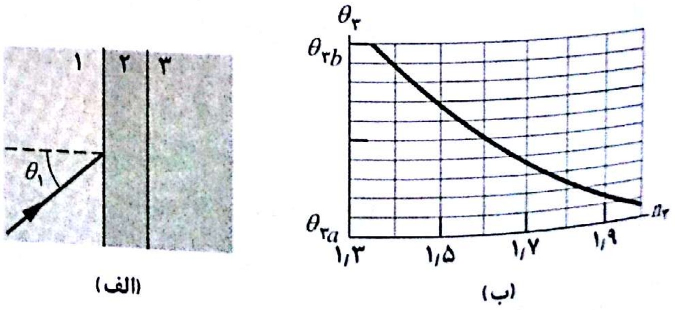
(ب)

$n_۱ \sin\theta_۱ = n_۲ \sin\theta_۲ = n_۳ \sin\theta_۳ = n_۴ \sin\theta_۴$

$(۱/۳۰)\sin ۴۰/۱ = (۱/۴۵)\sin\theta_۴$

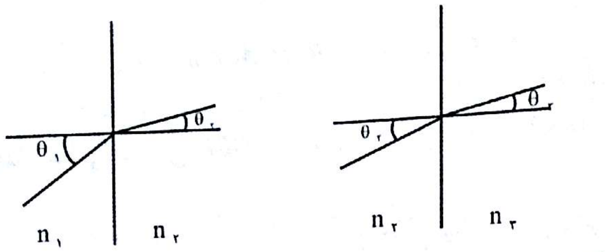
$\sin\theta_۴ = ۰/۵۷۸ \Rightarrow \theta_۴ = ۳۵/۳^\circ$

••۵۴- در شکل ۲۹-۵۶ الف، باریکهٔ نوری در محیط ۱ با زاویهٔ $\theta_۱ = ۴۰^\circ$ روی سطح جدایی فرود می‌آید. بخشی از نور وارد محیط ۲ و سپس بخشی وارد محیط ۳ می‌شود. دو سطح جدایی میان سه محیط موازی‌اند. راستای نهایی باریکه بستگی به ضریب شکست $n_۳$ محیط ۳ دارد. شکل ۲۹-۵۶ ب زاویهٔ شکست $\theta_۳$ در آن محیط را بر حسب $n_۳$ برای حدود مقدارهای ممکن $n_۳$، به دست می‌دهد. مقیاس محور قائم با $\theta_{۳a} = ۳۰/۰^\circ$ و $\theta_{۳b} = ۵۰/۰^\circ$ مشخص شده است. (الف) ضریب شکست محیط ۱ چقدر است، یا بدون اطلاعات بیشتر محاسبهٔ ضریب ممکن نیست؟ (ب) ضریب شکست محیط ۲ چقدر است، یا بدون اطلاعات بیشتر محاسبهٔ ضریب ممکن نیست؟ (پ) اگر $\theta_۱$ به ۷۰° تغییر کند و ضریب شکست محیط ۳ برابر ۲/۴ باشد، $\theta_۳$ چقدر است؟



شکل ۲۹-۵۶ مسئلهٔ ۵۴

حل:



(الف) از نمودار مشخص است:

در $\theta_۳ = ۴۰^\circ$ ، $n_۳ = ۱/۶$ می‌باشد.

$n_۱ \sin\theta_۱ = n_۲ \sin\theta_۲ = n_۳ \sin\theta_۳$

$n_۱ \sin ۴۰ = (۱/۶)\sin ۴۰ \Rightarrow n_۱ = ۱/۶$

(ب) ضریب شکست مادهٔ (۲) را نمی‌توان بدون اطلاعات دیگر بدست آورد.

(پ)

$\theta_۱ = ۷۰^\circ, n_۳ = ۲/۴$

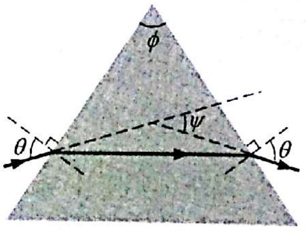
$n_۱ \sin\theta_۱ = n_۳ \sin\theta_۳ \Rightarrow (۱/۶)\sin ۷۰ = ۲/۴ \sin\theta_۳$

$\sin\theta_۳ = ۰/۶۲۶ \Rightarrow \theta_۳ = ۳۸/۸^\circ$

••۵۵- در شکل ۲۹-۵۷، پرتوی به یک وجه منشور شیشه‌ای مثلثی شکل واقع در هوا می‌تابد. زاویهٔ فرود θ طوری انتخاب شده است که پرتو خروجی نیز همان زاویهٔ θ را با عمود بر سطح می‌سازد. نشان دهید که ضریب شکست منشور شیشه‌ای با این رابطه داده می‌شود

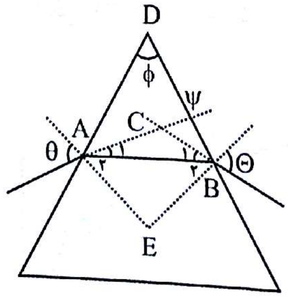
$$n = \frac{\sin\frac{۱}{۲}(\Psi + \phi)}{\sin\frac{۱}{۲}\phi}$$

که در آن ϕ زاویهٔ رأس منشور و Ψ *زاویهٔ انحراف* یعنی کل زاویه‌ای است که باریکه موقع عبور از منشور چرخیده است. (در این شرایط زاویهٔ انحراف کوچکترین مقدار ممکن را دارد که **زاویه** *کمینهٔ انحراف* نامیده می‌شود.) **SSM ILW WWW**



شکل ۲۹-۵۷ مسئله‌های ۵۵ و ۶۶

حل:



$\hat{A}_۱ = \hat{B}_۱$

$\hat{\psi}$ زاویهٔ خارجی مثلث ABC است. پس:

$\hat{\psi} = \hat{A}_۱ + \hat{B}_۱ = ۲\hat{A}_۱$

(۱)

Scanned by CamScanner

$\hat{A}_2 = 90 - \hat{A}_1$, $\hat{B}_2 = 90 - \hat{B}_1 \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B}_2$

$\hat{E} = 180 - (A_2 + B_2) = 180 - 2\hat{A}_2$ (۲)

در چهار ضلعی محاطی $ADBE$، مجموع زوایای روبرو $180°$ است.

$\hat{E} + \hat{\phi} = 180 \Rightarrow \hat{\phi} = 2\hat{A}_2$

از روابط (۱) و (۳) داریم:

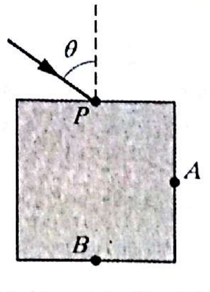
$$\hat{A}_1 = \frac{\hat{\psi}}{2},\ \hat{A}_2 = \frac{\hat{\phi}}{2}$$

$$\hat{\theta} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \frac{1}{2}(\hat{\psi} + \hat{\phi})$$

$$n_1 \sin\theta = n \sin A_2 \Rightarrow (1)\sin\frac{1}{2}(\hat{\psi} + \hat{\phi}) = n \sin\frac{1}{2}\hat{\phi}$$

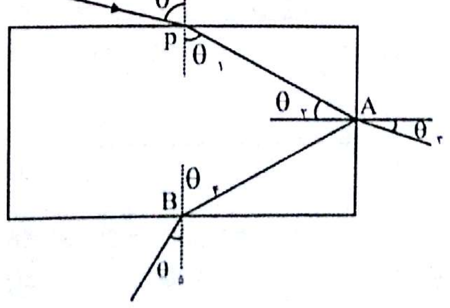
$$n = \frac{\sin\frac{1}{2}(\hat{\psi} + \hat{\phi})}{\sin(\frac{1}{2}\hat{\phi})}$$

●●۵۶- **رنگین کمان از قطرهٔ مربع شکل.** فرض کنید در یک دنیای خیالی، قطره‌های باران دارای سطح مقطع مربعی و همیشه در حین سقوط یک وجه آن افقی است. شکل ۲۹-۵۸ سقوط چنین قطره‌هایی را با باریکهٔ سفید نور خورشید که با زاویهٔ $\theta = 70/0°$ در نقطهٔ P فرود می‌آید نشان می‌دهد. قسمتی از نور وارد قطره می‌شود و سپس به نقطهٔ A می‌رود، جایی که قسمتی از آن به سمت خارج شکسته شده و وارد هوا می‌شود و بقیه باز می‌تابد. سپس این نور بازتابیده به نقطهٔ B می‌رود و در آنجا دوباره قسمتی به سمت خارج شکسته شده و وارد هوا می‌شود و بقیه بازمی‌تابد. اختلاف بین زاویه‌های نور قرمز $(n = 1/331)$ و نور آبی $(n = 1/343)$ که از (الف) نقطهٔ A و (ب) نقطهٔ B خارج می‌شوند چقدر است؟ (این اختلاف زاویه در نور خروجی مثلاً در نقطهٔ A باید پهنای رنگین کمانی باشد که شما در هنگام خروج از آن نقطه مشاهده می‌کنید.)



شکل ۲۹-۵۸ مسئلهٔ ۵۶

حل:



$n_r = 1/331$ نور قرمز

$n_b = 1/343$ نور آبی

$n_a \sin\theta = n \sin\theta_1$

که در آن n_a ضریب شکست هوا و n ضریب شکست قطره‌های باران می‌باشد. برای نور قرمز از زاویهٔ θ و برای نور آبی از زاویهٔ ϕ استفاده می‌شود.

(الف) برای نور قرمز:

$(1)\sin 70 = (1/331)\sin\theta_1$

$\sin\theta_1 = 0/706 \Rightarrow \theta_1 = 44/9$

برای نور آبی:

$(1)\sin 70 = (1/343)\sin\phi_1$

$\sin\phi_1 = 0/700 \Rightarrow \phi_1 = 44/43$

$\theta_2 = 90 - \theta_1 = 45/1°$

در برخورد به نقطهٔ A:

$n\sin\theta_2 = n_a \sin\theta_3$

$(1/331)\sin 45/1 = (1)\sin\theta_3$

$\sin\theta_3 = 0/943 \Rightarrow \theta_3 = 70/60°$

$\phi_2 = 90 - \phi_1 = 45/35°$

$(1/343)\sin 45/35 = (1)\sin\phi_3$

$\sin\phi_3 = 0/960 \Rightarrow \phi_3 = 73/7°$

در برخورد به نقطهٔ B

$\theta_4 = 90 - \theta_2 = 44/9 = \theta_1$

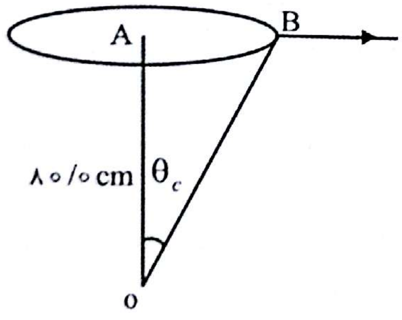
$\phi_4 = 90 - \phi_2 = 44/43 = \phi_1$

هر دو پرتو با همان زاویه از قطره خارج می‌شوند.

بخش ۲۹-۹ بازتاب داخلی کلی

●۵۷- یک چشمهٔ نقطه‌ای نور $80/0\,cm$ زیر سطح آب قرار دارد. قطر دایره‌ای در سطح آب را که نور از آن خارج می‌شود به دست آورید.

حل:



پرتو نوری که با زاویهٔ بزرگتر از θ_c زاویهٔ بحرانی به سطح آب برخورد کند از سطح خارج نمی‌شود.

$$\sin\theta_c = \frac{1}{1/33} = 0/752$$

$\theta_c = 48/8$

$$\tan\theta_c = \frac{R}{OA} \Rightarrow R = 0/80 \tan 48/8 = 0/91 cm$$

قطر دایره برابر است با:

$D = 2R = 1/82 m$

●۵۸- ضریب شکست بنزن ۱/۸ است. برای یک پرتو نور که در بنزن به سمت لایهٔ مسطح هوا در بالای بنزن حرکت می‌کند، زاویهٔ حد چقدر است؟

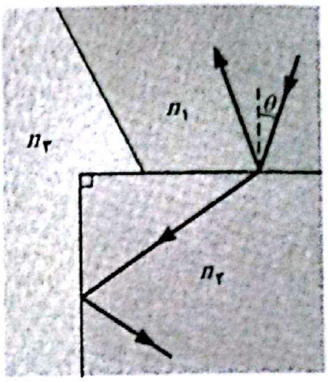
Scanned by CamScanner

حل: اگر نور از محیط (۲) وارد محیط (۱) شود و $n_۲ > n_۱$ باشد:

$$\sin\theta_c = \frac{n_۱}{n_۲} = \frac{(۱)}{(۱/۸)} = ۰/۵۵۶$$

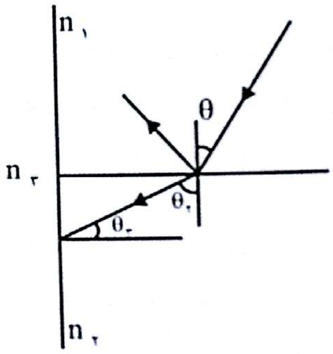
$$\theta_c = ۳۳/۸°$$

۵۹●●- در شکل ۲۹-۵۹، نور ابتدا در محیط ۱ شکسته شده و وارد محیط ۲ می‌شود و سپس با زاویهٔ بحرانی به سطح جدایی میان محیط ۲ و ۳ فرود می‌آید. ضریب شکستها عبارت‌اند از $n_۱=۱/۶۰$ ، $n_۲=۱/۴۰$ و $n_۳=۱/۲۰$. (الف) زاویهٔ θ چقدر است؟ (ب) اگر θ افزایش یابد، آیا شکست نور به محیط ۳ رخ می‌دهد؟



شکل ۲۹-۵۹ مسئلهٔ ۵۹

حل: (الف) نور تحت زاویهٔ بحرانی به سطح جدایی محیط ۲ و ۳ برخورد کرده است.



$$\sin\theta_c = \frac{n_۳}{n_۲} = \frac{(۱/۲۰)}{(۱/۴۰)} = ۰/۸۵۷$$

$$\theta_۳ = \theta_c = ۵۹°$$

$$\theta_۲ = ۹۰ - \theta_۳ = ۳۱°$$

$$n_۱ \sin\theta = n_۲ \sin\theta_۲$$

$$(۱/۶)\sin\theta = (۱/۴۰)\sin ۳۱$$

$$\sin\theta = ۰/۴۵۱ \Rightarrow \theta = ۲۶/۸°$$

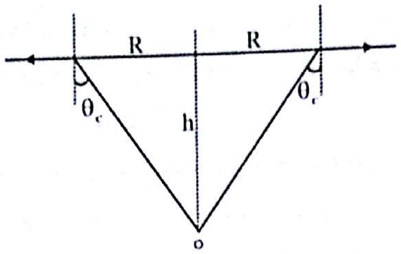
(ب) با افزایش θ ، $\theta_۲$ نیز زیاد می‌شود. با افزایش $\theta_۲$ ، $\theta_۳$ کاهش می‌یابد

$$\theta_۳ = ۹۰ - \theta_۲$$

با کاهش $\theta_۳$ اشعه وارد محیط (۳) نیز می‌شود.

۶۰- یک گربه ماهی ۲/۰۰m زیر سطح یک دریاچهٔ آرام قرار دارد. قطر دایره‌ای روی سطح که ماهی می‌تواند از میان آب دنیای خارج را ببیند چقدر است؟ (ب) اگر ماهی پایین برود آیا قطر دایره کاهش می‌یابد یا افزایش یا تغییر نمی‌کند؟

حل:



(الف)

آب $n = ۱/۳۳$

$$\sin\theta_c = \frac{۱}{n} = ۰/۷۵۲$$

$$\theta_c = ۴۸/۸°$$

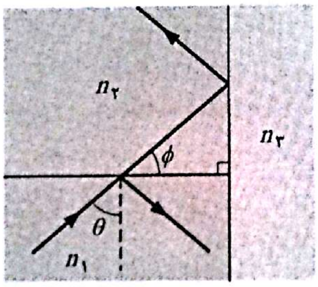
$$\tan\theta_c = \frac{R}{h} \Rightarrow \tan ۴۸/۸ = \frac{R}{۲}$$

$$R = ۲/۲۸\,\text{m}$$

قطر $D = ۲R = ۴/۵۶\,\text{m}$

(ب) چون θ_c ثابت است، اگر ماهی پایین‌تر برود، h زیاد شده و R و D نیز زیاد می‌شوند.

۶۱●●- در شکل ۲۹-۶۰ که در آن، زاویه‌ها بدون مقیاس رسم شده‌اند، پرتو با زاویهٔ بحرانی به سطح جدایی میان محیط ۲ و ۳ فرود می‌آید. زاویهٔ $\phi = ۶۰/۰°$ و دو ضریب شکست عبارت‌اند از $n_۱=۱/۷۰$ و $n_۲=۱/۶۰$ است. مطلوب است (الف) ضریب شکست $n_۳$ و (ب) زاویهٔ θ . (پ) اگر θ افزایش یابد آیا نور به داخل محیط ۳ شکسته می‌شود؟



شکل ۲۹-۶۰ مسئلهٔ ۶۱

حل: (الف) زاویهٔ ϕ با زاویهٔ θ_c برابر است. پس:

$$\theta_c = ۶۰°$$

$$\sin\theta_c = \frac{n_۳}{n_۲} \Rightarrow n_۳ = n_۲ \sin\theta_c$$

$$n_۳ = (۱/۶۰)\sin ۶۰ = ۱/۳۹$$

(ب)

$$\theta_۲ = ۹۰ - \phi = ۳۰°$$

$$n_۱ \sin\theta = n_۲ \sin\theta_۲$$

$$(۱/۷۰)\sin\theta = (۱/۶۰)\sin ۳۰°$$

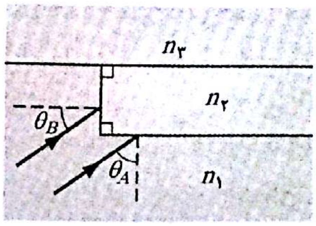
$$\sin\theta = ۰/۴۷۱ \Rightarrow \theta = ۲۸/۱°$$

(پ) اگر θ کاهش یابد، ϕ زیاد می‌شود و با افزایش ϕ زاویهٔ برخورد با سطح (۳) بیشتر از زاویهٔ بحرانی شده و اشعه وارد محیط (۳) نمی‌شود.

Scanned by CamScanner

۶۲- در شکل ۲۹-۶۱، پرتو A از محیط ۱ (n_1=۱/۶۰) شکسته شده وارد لایهٔ نازک محیط ۲ (n_2=۱/۸۰) می‌شود، از آن عبور می‌کند و سپس با زاویهٔ بحرانی به سطح جدایی میان محیط ۲ و ۳ (n_3=۱/۳۰) فرود می‌آید. (الف) مقدار زاویهٔ فرودی θ_A چقدر است؟ (ب) اگر θ_A کاهش یابد، آیا قسمتی از نور شکسته شده و وارد محیط ۳ می‌شود؟

پرتو B از محیط ۱ شکسته شده و وارد لایهٔ نازکی می‌شود و از آن عبور می‌کند و سپس با زاویهٔ بحرانی به سطح جدایی میان محیط ۲ و ۳ فرود می‌آید. (پ) مقدار زاویهٔ فرود θ_B چقدر است؟ (ت) اگر θ_B کاهش یابد، آیا قسمتی از نور به داخل محیط ۳ شکسته می‌شود؟



شکل ۲۹-۶۱ مسئلهٔ ۶۲

حل: (الف) برای آنکه $\theta_2=\theta_c$ باشد لازم است که $\theta_3=90°$ باشد. آنگاه خواهیم داشت

$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2=n_3\sin\theta_3$$

و از آنجا

$$\theta_1=\theta_A=\sin^{-1}\frac{n_3}{n_1}=\sin^{-1}\left(\frac{۱/۳۰}{۱/۶۰}\right)=۵۴/۳°$$

(ب) بله. با کاهش θ_A، θ_2 نیز کاهش می‌یابد به گونه‌ای که کمتر از زاویهٔ بحرانی می‌شود. بنابراین قدری گذار نور به مادهٔ ۳ داریم.

(پ) توجه کنید متمم زاویهٔ شکست (در مادهٔ ۲) برابر با زاویهٔ بحرانی است. در نتیجه داریم

$$n_1\sin\theta_B=n_2\cos\theta_c=n_2\sqrt{1-\left(\frac{n_3}{n_2}\right)^2}=\sqrt{n_2^2-n_3^2}$$

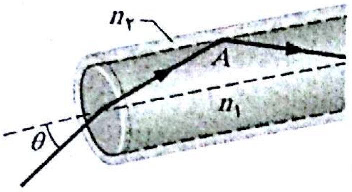
و از آنجا

$$\theta_B=\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{n_2^2-n_3^2}}{n_1}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{(۱/۸۰)^2-(۱/۳۰)^2}}{۱/۶۰}\right)$$

$$=۵۱/۱°$$

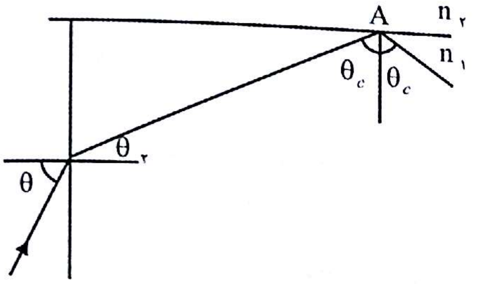
(ت) نه. کاهش θ_B به افزایش زاویه‌ای که نور به سطح مشترک ماده‌های ۲ و ۳ می‌تابد، می‌انجامد. بنابراین این زاویه بزرگتر از زاویهٔ بحرانی می‌شود و در نتیجه هیچ نوری از مادهٔ ۳ عبور نمی‌کند.

●●۶۳- شکل ۲۹-۶۲ یک تار نوری را به صورت ساده نشان می‌دهد: یک مغزی پلاستیکی (n_1=۱/۵۸) که با ورقهٔ پلاستیکی (n_2=۱/۵۳) احاطه شده است. یک پرتو نور با زاویهٔ θ به یک سر آن فرود می‌آید. پرتو در نقطهٔ A بازتاب داخلی کلی پیدا می‌کند، جایی که با مرز مغز- ورقه مواجه می‌شود. (بنابراین، اتلاف نوری در آن مرز وجود ندارد) بیشینهٔ مقدار θ که بازتاب داخلی کلی را در A ممکن می‌سازد، چقدر است؟



شکل ۲۹-۶۲ مسئلهٔ ۶۳

حل:



$$\sin\theta_c=\frac{n_2}{n_1}=\frac{۱/۵۳}{۱/۵۸}=۰/۹۶۸۴$$

$$\theta_c=۷۵/۵۶°$$

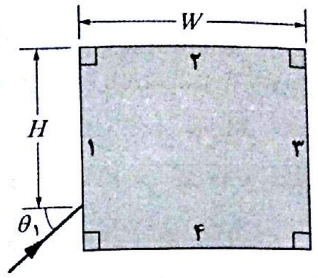
$$\theta_2=۹۰-\theta_c=۱۴/۴۴$$

$$n\sin\theta=n_1\sin\theta_2\Rightarrow(۱)\sin\theta=(۱/۵۸)\sin۱۴/۴۴$$

$$\sin\theta=۰/۳۹۴\Rightarrow\theta=۲۳/۲°$$

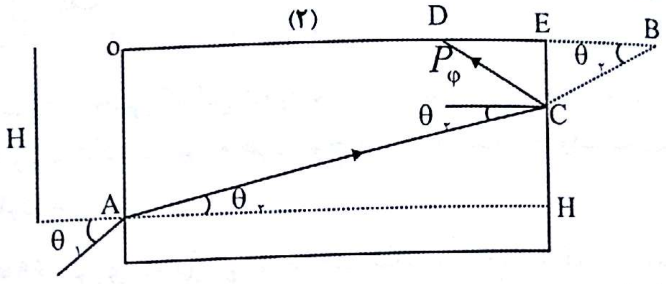
●●۶۴- در شکل ۲۹-۶۳ پرتو نور در هوا با زاویهٔ θ_1 بر یک قطعه پلاستیک شفاف با ضریب شکست ۱/۵۶ فرود می‌آید. ابعاد مشخص شده عبارت‌اند از H=۲/۰۰cm و W=۳/۰۰cm . نور داخل قطعه حرکت کرده و به یکی از وجه‌ها می‌رسد و در آنجا بازتاب می‌کند (داخل قطعه) و احتمالاً شکست نیز می‌یابد (به سمت خارج داخل هوا). این نقطهٔ *اولین بازتاب* است. سپس نور بازتابیده شده در داخل قطعه به سمت وجه دیگر می‌رود، نقطهٔ *دومین بازتاب*. اگر θ_1=۴۰° باشد، روی کدام وجه نقطهٔ (الف) اولین بازتاب و (ب) دومین بازتاب واقع است. اگر شکست در نقطهٔ (پ) اولین بازتاب و (ت) دومین بازتاب وجود داشته باشد، زاویهٔ شکست را حساب کنید؛ در صورت عدم شکست پاسخ «هیچ‌کدام» است. اگر θ_1=۷۰° باشد روی کدام وجه نقطهٔ (ث) اولین بازتاب و (ج) دومین بازتاب واقع است. اگر شکست در نقطهٔ (چ) اولین بازتاب و (ح) دومین بازتاب وجود داشته باشد، زاویهٔ شکست را حساب کنید؛ در صورت عدم شکست پاسخ «هیچ‌کدام» است.

Scanned by CamScanner



شکل ۲۹–۶۳ مسئلهٔ ۶۴

حل:



(الف)

$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$

$(1)\sin ۴۰ = ۱/۵۶ \sin\theta_2$

$\sin\theta_2 = ۰/۴۱۲ \Rightarrow \theta_2 = ۲۴/۳^\circ$

$\varphi = ۹۰ - \theta_2 = ۶۵/۷^\circ$

زاویهٔ حد برای این پلاستیک برابر است با:

$$\sin\theta_c = \frac{1}{n} = \frac{1}{۱/۵۶} = ۰/۶۴۱ \Rightarrow \theta_c = ۳۹^\circ$$

اشعه در نقطه‌ای مانند B به سطح برخورد می‌کند.

$$\sin\theta_c = \frac{oB}{oA} \Rightarrow \tan ۶۵/۷ = \frac{oB}{۲}$$

$oB = ۴/۴۳\text{cm} > W$

یعنی نور قبل از برخورد به وجه (۲) به وجه (۳) برخورد می‌کند. محل نقطهٔ C از این رابطه بدست می‌آید:

$$\tan\theta_2 = \frac{CH}{W} \Rightarrow \tan ۲۴/۳ = \frac{CH}{۳}$$

$CH = ۱/۳۵\ \text{cm}$

$EC = H - CH = ۲ - ۱/۳۵ = ۰/۶۵\,\text{cm}$

(ب) قسمتی از پرتو در سطح ۳ می‌شکند و با زاویهٔ θ_1 خارج می‌شود و قسمتی از پرتو بازتابش می‌یابد و به نقطهٔ D می‌رسد. در نقطهٔ D، پرتو با زاویهٔ φ به سطح (۲) برخورد می‌کند و چون $\varphi > \theta_c$ است بازتابش کلی می‌یابد.

(پ) و (ت) در اولین بازتابش یعنی در نقطهٔ C شکست نیز وجود دارد، اما در سطح (۲) بازتابش کلی روی می‌دهد.

ه) اگر $\theta_1 = ۷۰^\circ$ باشد.

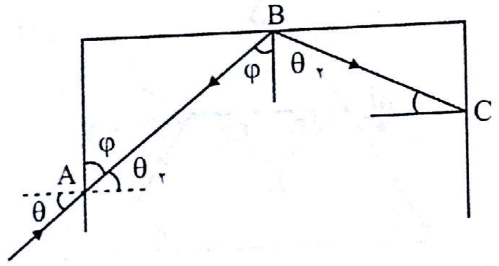
$(1)\sin ۷۰ = (۱/۵۶)\sin\theta_2$

$\sin\theta_2 = ۰/۶۰۲ \Rightarrow \theta_2 = ۳۷^\circ$

$\varphi = ۹۰ - ۳۷ = ۵۳^\circ$

$$\tan\varphi = \frac{pB}{۲} \Rightarrow ۲\tan ۵۳ = ۲/۶۵\,\text{cm} < W$$

نور مطابق شکل با زاویهٔ φ به نقطهٔ B روی سطح (۲) برخورد می‌کند.

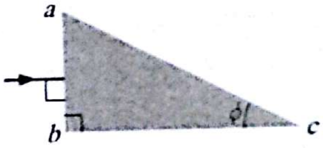


اولین بازتابش روی سطح (۲) روی می‌دهد.

(ث) دومین نقطهٔ بازتابش در نقطهٔ C روی سطح ۳ روی می‌دهد.

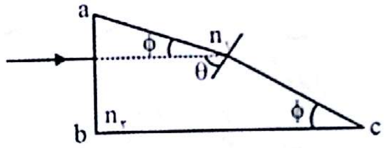
(ج) و (چ) در اولین بازتابش (B) شکست وجود ندارد. در سطح ۳ (نقطهٔ C) شکست وجود دارد. زاویهٔ شکست برابر $\theta_1 = ۷۰^\circ$ می‌باشد.

●●۶۵- در شکل ۲۹–۶۴، یک پرتو نور بر وجه ab یک منشور شیشه‌ای $(n = ۱/۵۲)$ عمود است. اگر منشور (الف) در هوا و (ب) در آب قرار داشته باشد، بزرگترین مقدار زاویهٔ ϕ را پیدا کنید در صورتی که پرتو در وجه ac بازتاب کلی پیدا کند.
SSM ILM



شکل ۲۹–۶۴ مسئلهٔ ۶۵

حل:



زاویهٔ بحرانی برابر است با:

$$\sin\theta_c = \frac{n_1}{n_2}$$

(الف)
$$\sin\theta_c = \frac{(1)}{(۱/۵۲)} = ۰/۶۵۸ \Rightarrow \theta_c = ۴۱/۱^\circ$$

شرط بازتابش کلی از سطح ac برابر است با:

$\theta \geq ۴۱/۱^\circ$

$۹۰ - \phi \geq ۴۱/۱^\circ \Rightarrow \phi \leq ۴۸/۹^\circ$

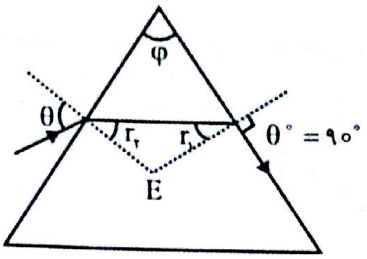
(ب)
$$\sin\theta_c = \frac{(۱/۳۳)}{(۱/۵۲)} = ۰/۸۷۵ \Rightarrow \theta_c = ۶۱^\circ$$

$\theta \geq ۶۱^\circ \Rightarrow ۹۰ - \phi \geq ۶۱^\circ \Rightarrow \phi \leq ۲۹^\circ$

●●۶۶- فرض کنید که منشور شکل ۲۹–۵۷ دارای زاویهٔ رأس $\phi = ۶۰/۰^\circ$ و ضریب شکست $n = ۱/۶۰$ است. (الف) برای اینکه پرتو بتواند از وجه سمت چپ منشور وارد و از وجه سمت راست خارج شود، کمترین زاویهٔ فرود θ باید چقدر باشد؟ (ب) برای چه زاویهٔ فرود θ، مطابق شکل ۲۹–۵۷، پرتو خروجی از منشور دارای زاویهٔ شکست برابر با زاویهٔ θ است.

حل:

Scanned by CamScanner



(الف)

$\hat{\varphi}+\hat{E}=۱۸۰$

$\hat{r}_1+\hat{r}_2=۱۸۰-E \Rightarrow \hat{\varphi}=\hat{r}_1+\hat{r}_2$

$n=\frac{\sin\theta'}{\sin r_2}\Rightarrow ۱/۶۰=\frac{\sin ۹۰}{\sin r_2}$

$\sin r_2=۰/۶۲۵\Rightarrow \hat{r}_2=۳۸/۷°$

$\hat{r}_1=\hat{\varphi}-\hat{r}_2=۶۰-۳۸/۷=۲۱/۳°$

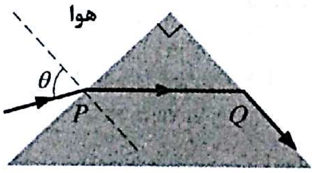
$n=\frac{\sin\theta}{\sin r_1}\Rightarrow (۱/۶۰)=\frac{\sin\theta}{\sin ۲۱/۳}$

$\sin\theta=۰/۵۸۱\Rightarrow \theta=۳۵/۵°$

(ب) $\theta_1=\theta_2\Rightarrow r_1=r_2=\frac{\varphi}{۲}=۳۰°$

$\sin\theta=(۱/۶)\sin r=۰/۸\Rightarrow \theta=۵۳/۱°$

●●۶۷- در شکل ۲۹-۶۵، نوری با زاویهٔ فرود θ از نقطهٔ P وارد منشور مثلثی شکل °۹۰ می‌شود و سپس قسمتی از آن در نقطهٔ Q با زاویهٔ شکست °۹۰ شکسته می‌شود. (الف) ضریب شکست منشور برحسب θ چقدر است؟ (ب) به طور عددی، ضریب شکست چه مقدار بیشینه‌ای را می‌تواند داشته باشد؟ اگر زاویهٔ فرود در Q (پ) کمی افزایش و (ت) کمی کاهش یابد، آیا نور از Q خارج می‌شود؟



شکل ۲۹-۶۵ مسئلهٔ ۶۷

حل:

(الف)

$\varphi=۹۰°$

$r_2=\theta_c$

$\sin r_2=\sin\theta_c=\frac{۱}{n}$

$r_1+r_2=\varphi=۹۰\Rightarrow \hat{r}_2=۹۰-\hat{r}_1$

$\sin\hat{r}_2=\sin(۹۰-\hat{r}_1)=\cos r_1$

$\cos r_1=\frac{۱}{n}\Rightarrow \sin r_1=\sqrt{۱-\frac{۱}{n^2}}=\sqrt{\frac{n^2-۱}{n^2}}$

$n=\frac{\sin\theta}{\sin r_1}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{\frac{n^2-۱}{n^2}}}\Rightarrow \sin^2\theta=n^2\left(\frac{n^2-۱}{n^2}\right)=n^2-۱$

$n=\sqrt{۱+\sin^2\theta}$

(ب) بیشینهٔ n موقعی که $\sin\theta=۱$ و $\theta=\pi/۲$ باشد.

$n_{max}=\sqrt{۲}$

(پ) اگر زاویه r_2 افزایش یابد، بیشتر از زاویه حد بر می‌گردد. $r_2>\theta_c$ و پرتو نور بازتابش کامل می‌یابد.

(ت) اگر کمتر شود. $r_2>\theta_c$ می‌گردد و بنابراین نور از این سطح می‌شکنند.

●۶۸- (الف) در چه زاویهٔ فرودی نور بازتابیده از آب کاملاً قطبیده است؟ (ب) آیا این زاویه به طول موج نور بستگی دارد؟

حل: (الف)

$n=\tan\theta_b=۱/۳۳$

$\theta_b=۵۳°$

(ب) از آنجایی که این زاویه به ضریب شکست مادهٔ شفاف و ضریب شکست نیز به طول موج وابسته است. θ_b وابسته به طول موج می‌باشد.

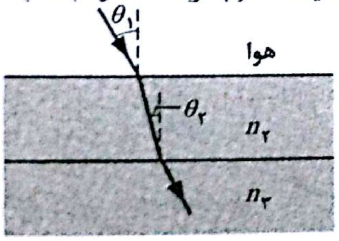
●۶۹- نوری که در آب با ضریب شکست ۱/۳۳ حرکت می‌کند به یک صفحهٔ شیشه‌ای با ضریب شکست ۱/۵۳ فرود می‌آید. در چه زاویهٔ فرودی نور بازتابیده قطبیدهٔ کامل است؟ SSM

حل:

$\tan\theta_b=\frac{n_2}{n_1}=\frac{۱/۵۳}{۱/۳۳}=۱/۱۵$

$\theta_b=۴۹°$

●۷۰- در شکل ۲۹-۶۶، یک پرتو نور در هوا روی لایهٔ تخت محیط ۲ با ضریب شکست $n_2=۱/۵$ فرود می‌آید. زیر محیط ۲، محیط ۳ با ضریب شکست n_3 قرار دارد. پرتو روی سطح جدایی هوا- محیط ۲ با زاویهٔ بروستر فرود می‌آید. پرتو نور اتفاقاً با زاویهٔ بروستر روی سطح جدایی میان دو محیط ۲ و ۳ شکسته و وارد محیط ۳ می‌شود. مقدار n_3 چقدر است؟



شکل ۲۹-۶۶ مسئلهٔ ۷۰

حل:

$\tan\theta_{b,1}=\frac{n_2}{n_1}=\frac{(۱/۵)}{(۱)}=۱/۵$

$\theta_{b,1}=۵۶/۳°$

$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2$

$(۱)\sin ۵۶/۳=(۱/۵)\sin\theta_2$

$\sin\theta_2=۰/۵۵۵\Rightarrow \theta_2=۳۳/۷°$

$\tan\theta_2=\tan\theta_{2,b}=\frac{n_3}{n_2}$

$\tan ۳۳/۷=\frac{n_3}{۱/۵}\Rightarrow n_3=۱$ هوا

مسئله‌های اضافی

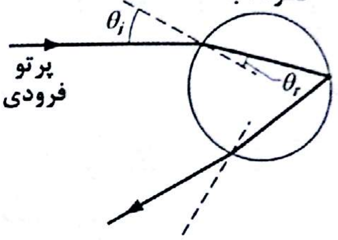
۷۱- *رنگین کمان.* شکل ۲۹-۶۷ پرتو نوری را نشان می‌دهد که وارد یک قطره باران کروی در حال سقوط شده و پس از یک

Scanned by CamScanner

بازتاب داخلی کلی از آن خارج می‌شود (به شکل ۲۹-۲۱ الف نگاه کنید). راستای نهایی حرکت با راستای اولیهٔ به اندازهٔ زاویهٔ θ_{dev} انحراف دارد (می‌چرخد). (الف) نشان دهید که θ_{dev} برابر است با:

$$\theta_{dev}=۱۸۰^\circ+۲\theta_i-۴\theta_r$$

که در آن θ_i زاویهٔ فرود پرتو روی قطره و θ_r زاویهٔ شکست پرتو در قطره است. (ب) با به کار بردن قانون اسنل، برای θ_r بر حسب θ_i و ضریب شکست n آب قرار دهید. سپس با ماشین حسابی که رسم منحنی دارد یا با رایانه، θ_{dev} را برحسب θ_i در ناحیهٔ ممکن برای مقدارهای θ_i ، $n=۱/۳۳۱$ برای نور قرمز و $n=۱/۳۳۳$ برای نور آبی، رسم کنید.



شکل ۲۹-۶۷ مسئلهٔ ۷۱

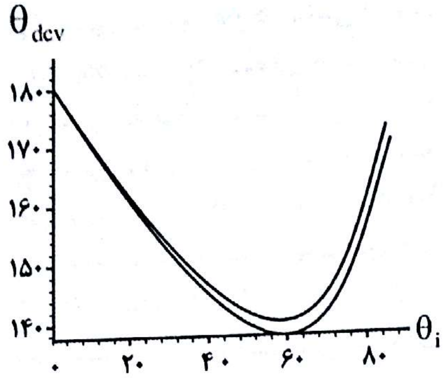
منحنی نور قرمز و منحنی نور آبی دارای کمینه‌های متفاوتی هستند که بدان معناست که زاویهٔ *کمینهٔ انحراف* متفاوتی برای هر رنگ وجود دارد. نور هر رنگ داده شده که قطره را ترک می‌کند در آن زاویهٔ انحراف کمینهٔ رنگ، به خصوص درخشان است چون پرتوها در آن زاویه جمع می‌شوند. بنابراین، نور قرمز درخشان قطره را در یک زاویه و نور آبی درخشان در زاویه دیگری قطره را ترک می‌کنند.

زاویهٔ کمینهٔ انحراف را از منحنی θ_{dev} برای (پ) نور قرمز و (ت) نور آبی حساب کنید. (ث) اگر این رنگها لبهٔ داخلی و خارجی رنگین کمان را تشکیل دهند (شکل ۲۹-۲۲ الف)، پهنای زاویه‌ای رنگین کمان چقدر است؟

حل: (الف) اولین سهم در انحراف ناشی از اولین شکست است و داریم: $\delta\theta_1=\theta_i-\theta_r$. سهم بعدی در انحراف کل ناشی از بازتابش است. توجه کنید که زاویهٔ میان پرتو نور پیش از بازتابش و خط عمود بر سطح عقبی کره برابر با θ_r است و با استفاده از قانون بازتابش نتیجه می‌گیریم زاویه‌ای که با آن پرتو باز می‌گردد (در مقایسه با جهت تابش پیش و پس از بازتابش) برابر $\delta\theta_2=۱۸۰^\circ-۲\theta_r$ می‌شود. سهم نهایی در انحراف ناشی از شکست نور در حال خروج از کره است و دوباره داریم: $\delta\theta_3=\theta_i-\theta_r$. بنابراین زاویهٔ انحراف کل چنین می‌شود

$$\theta_{dev}=\delta\theta_1+\delta\theta_2+\delta\theta_3=۱۸۰^\circ+۲\theta_i-۴\theta_r$$

(ب) $\theta_r=\sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\sin\theta_i\right)$ را در رابطه‌ای که در قسمت (الف) به دست آوردیم اثر می‌دهیم. منحنی بالایی در شکل زیر مربوط به نور آبی و منحنی پایینی مربوط به نور قرمز است.



(پ) از روی شکل بالا در می‌یابیم که مقدار کمینهٔ θ_{dev} برای نور قرمز تقریباً $۱۳۷/۶۳^\circ$ است که این در $\theta_i=۵۹/۵۲^\circ$ رخ می‌دهد.

(ت) برای نور آبی از روی شکل درمی‌یابیم که مقدار کمینهٔ θ_{dev} تقریباً $۱۳۹/۳۵^\circ$ است که این در $\theta_i=۵۹/۵۲^\circ$ رخ می‌دهد.

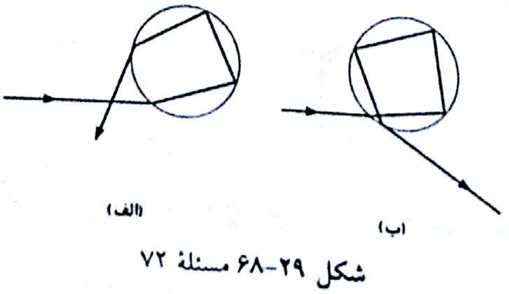
(ث) اختلاف در θ_{dev} در دو قسمت قبل برابر $۱/۷۲^\circ$ می‌شود.

۷۲- *رنگین کمان اولیه* که در مسئلهٔ ۷۱ شرح داده شد یک نوع معمول است که در ناحیه‌هایی که رنگین کمان ظاهر می‌گردد دیده می‌شود. این رنگین کمان با یک بار شکست داخل قطره ایجاد می‌شود. نوع نادرتر *رنگین کمان نوع ثانویه* است که در بخش ۲۹-۸ شرح داده شد و با دو بار شکست داخل قطره (شکل ۲۹-۶۸ الف) ایجاد می‌شود. (الف) نشان دهید که انحراف زاویه‌ای نوری که وارد قطرهٔ آب کروی شده و سپس خارج می‌شود برابر است با

$$\theta_{dev}=(۱۸۰^\circ)k+۲\theta_i-۲(k+۱)\theta_r$$

که در آن k تعداد بازتابهای داخلی است. روش مسئلهٔ ۷۱ را به کار برید و زاویهٔ کمینهٔ انحراف را برای (ب) نور قرمز و (پ) نور آبی در رنگین کمان ثانوی به دست آورید. (ت) پهنای زاویه‌ای این رنگین کمان (شکل ۲۹-۲۱ ت) چقدر است؟

رنگین کمان سوم بستگی به سه بازتاب داخلی (شکل ۲۹-۶۸ ب) دارد. این امر احتمالاً رخ می‌دهد، اما همان‌طور که در بخش ۲۹-۸ اشاره شد نمی‌توان آن را دید چون خیلی کم سو است و در آسمان درخشان اطراف خورشید واقع است. زاویهٔ کمینهٔ انحراف را برای (ث) نور قرمز و (ج) نور آبی در این رنگین کمان به دست آورید (ح) پهنای زاویه‌ای این رنگین کمان چقدر است؟



شکل ۲۹-۶۸ مسئلهٔ ۷۲

Scanned by CamScanner

حل: الف) اولین سهم در انحراف کل ناشی از اولین شکست است: $\delta\theta_۱=\theta_i-\theta_r$. دومین سهم‌های بعد ناشی از بازتابش هستند. توجه کنید زاویهٔ میان پرتو نور پیش از بازتابش و خط عمود به سطح پشتی کره برابر با θ_r است و با استفاده از قانون اسنل نتیجه می‌گیریم زاویه‌ای که با آن پرتو باز می‌گردد (در مقایسه با جهت تابش پیش و پس از هر بازتابش) برابر با $\delta\theta_r=۱۸۰°-۲\theta_r$ است. بنابراین برای k بازتاب، $\delta\theta_۲=k\theta_r$ می‌شود. آخرین سهم ناشی از شکست نور در هنگام ترک از کره است و دوباره داریم: $\delta\theta_۳=\theta_i-\theta_r$. بنابراین زاویهٔ انحراف کل چنین می‌شود

$$\theta_{dev}=\delta\theta_۱+\delta\theta_۲+\delta\theta_۳=۲(\theta_i-\theta_r)+k(۱۸۰°-۲\theta_r)$$
$$=k(۱۸۰°)+۲\theta_i-۲(k+۱)\theta_r$$

(ب) به ازای $k=۲$ و $n=۱/۳۳۱$ (در مسئله ۶۷ داده شده است) به طور عددی زاویهٔ رنگین کمان مرتبهٔ دوم را به دست می‌آوریم. در می‌یابیم که کمینهٔ θ_{dev} برای نور قرمز برابر با $۳۱۷/۵°$ است و در $\theta_i=۷۶/۸۸°$ رخ می‌دهد.

(پ) به همان ترتیب در می‌یابیم که کمینهٔ θ_{dev} برای نور آبی (که برای آن $n=۱/۳۴۳$ است) برابر با $۲۳۳/۴۸°$ است و این در $\theta_i=۷۱/۵۲°$ رخ می‌دهد.

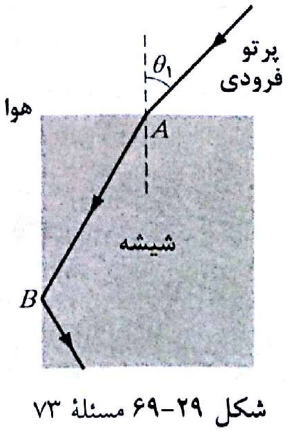
(ت) اختلاف در θ_{dev} دو قسمت قبل تقریباً برابر $۳/۱°$ است.

(ث) با قراردادن $k=۳$ ، به طور عددی زاویهٔ میانگین مرتبهٔ سوم را به دست می‌آوریم. در می‌یابیم که کمینهٔ θ_{dev} برای نور قرمز برابر $۳۱۷/۵°$ است و این در $\theta_i=۷۶/۸۸°$ رخ می‌دهد.

(ج) به همان ترتیب برای کمینهٔ θ_{dev} برای نور آبی $۳۲۱/۹°$ را می‌یابیم که این در $\theta_i=۷۶/۶۲°$ رخ می‌دهد.

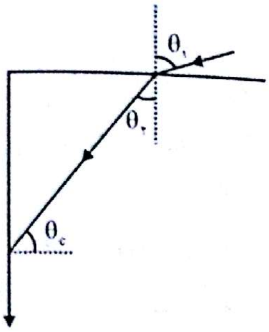
(چ) اختلاف در θ_{dev} دو قسمت قبل برابر $۴/۴°$ می‌شود.

۷۳- در شکل ۲۹-۶۹، پرتو نور با زاویهٔ $\theta_۱=۴۰°$ از نقطهٔ A وارد یک قطعه شیشه می‌شود و سپس در نقطهٔ B بازتاب داخلی کلی می‌یابد. با این اطلاعات می‌توان ضریب شکست شیشه را حساب کرد، کمینهٔ مقدار آن چقدر است؟ **SSM**



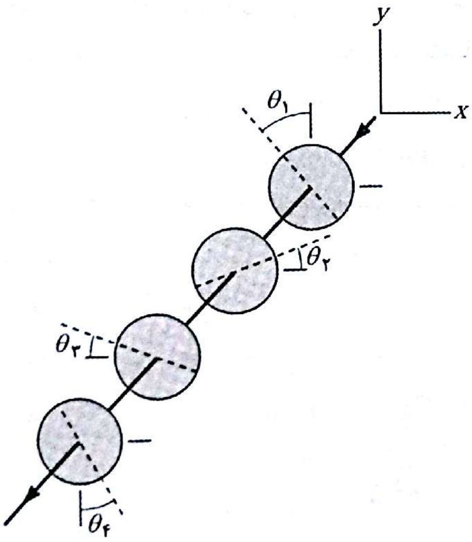
شکل ۲۹-۶۹ مسئلهٔ ۷۳

حل: فرض می‌شود در نقطهٔ B تحت زاویهٔ بحرانی به سطح جدایی برخورد کرده است.



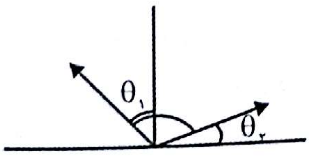
$$\sin\theta_c=\frac{۱}{n}$$
$$\theta_۲=۹۰-\theta_c$$
$$n=\frac{\sin\theta_۱}{\sin\theta_۲}=\frac{\sin ۴۵}{\sin(۹۰-\theta_c)}=\frac{\sqrt{۲}}{۲\cos\theta_c}$$
$$\frac{۱}{\sin\theta_c}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos\theta_c\Rightarrow\tan\theta_c=\sqrt{۲}\Rightarrow\theta_c=۵۴/۷°$$
$$n=\frac{۱}{\sin ۵۴/۷}=۱/۲۲$$

۷۴- در شکل ۲۹-۷۰، نور ناقطبیده‌ای با شدت $۲۵\,W/m^۲$ وارد سامانه‌ای شامل چهار ورقهٔ قطبنده می‌شود، که جهت قطبیدگی ورقه‌های آن عبارت‌اند از $\theta_۱=۴۰°$ ، $\theta_۲=۲۰°$ ، $\theta_۳=۲۰°$ و $\theta_۴=۳۰°$. شدت نور خروجی از این سامانه چقدر است؟



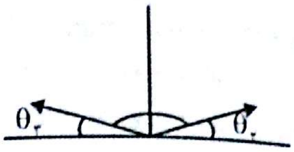
شکل ۲۹-۷۰ مسئلهٔ ۷۴

حل:

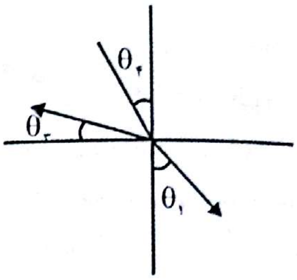


$$I_۱=\frac{I_۰}{۲}=۱۲/۵\ w/m^۲$$
$$I_۲=I_۱\cos^۲(\theta_۱+۹۰-\theta_۲)=(۱۲/۵)\cos^۲(۱۱۰)$$
$$=۱/۴۶۲\ w/m^۲$$
$$I_۳=I_۲\cos^۲(۱۸۰-\theta_۲-\theta_۳)=(۱/۴۶۲)\cos^۲ ۴۰$$
$$I_۳=۰/۸۵۸\ w/m^۲$$

Scanned by CamScanner



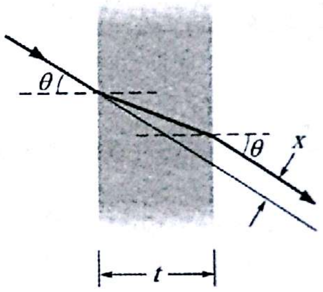
$$I_4 = I_3 \cos^2(۹۰-\theta_1-\theta_2) = (۰/۸۵۸)\cos^2 ۴۰$$
$$= ۰/۵۰۳\ \mathrm{w/m^2}$$



۷۵- (الف) ثابت کنید که یک پرتو نور که روی سطح یک تیغهٔ تخت شیشه‌ای به ضخامت t می‌تابد، مطابق شکل ۲۹-۷۱ از وجه دیگر موازی راستای اولیه ولی جابه‌جا شده به یک طرف خارج می‌شود. (ب) نشان دهید که برای زاویه‌های کوچک فرود، این جابه‌جایی با رابطهٔ زیر داده می‌شود

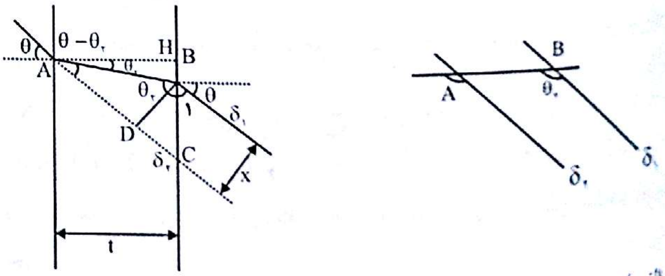
$$x = t\theta\frac{n-1}{n}$$

که در آن n ضریب شکست شیشه است و θ برحسب رادیان اندازه‌گیری می‌شود.



شکل ۲۹-۷۱ مسئلهٔ ۷۵

حل:



(الف) دو خط δ_1 و δ_2 که امتداد اشعه‌های ورودی و خروجی هستند را در نظر می‌گیریم:

$$A_1 = \theta - \theta_2\ ,\ B_1 = \theta_2 + ۱۸۰ - \theta$$
$$A_1 + B_1 = (\theta - \theta_2) + (\theta_2 + ۱۸۰ - \theta) = ۱۸۰$$

دو خط δ_1 و δ_2 و AB که آنها را قطع می‌کند در نظر میگیریم، چون زوایای داخلی مکمل یکدیگرند، δ_1 و δ_2 موازی هستند.

(ب) در مثلث AHB داریم:

$$AH = AB\cos\theta_2 \Rightarrow AB = \frac{AH}{\cos\theta_2} = \frac{t}{\cos\theta_2} \qquad (۱)$$

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \Rightarrow (۱)\sin\theta = n\sin\theta_2$$

$$\sin\theta_2 = \frac{\sin\theta}{n} \qquad (۲)$$

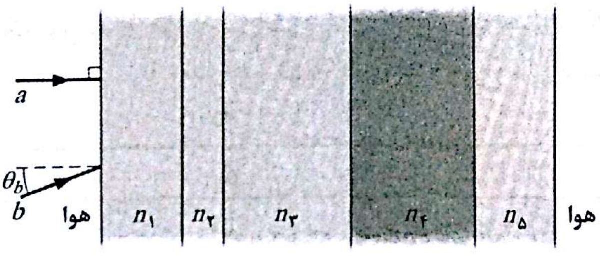
از مثلث ABD داریم:

$$x = BD = AB\sin(\theta-\theta_2) = \frac{t}{\cos\theta_2}\sin(\theta-\theta_2) \qquad (۳)$$

برای زوایای کوچک:

$$\sin x \simeq x\ ,\ \cos x \simeq ۱$$
$$(۲) \Rightarrow \theta_2 = \frac{\theta}{n}$$
$$(۳) \Rightarrow x = \frac{t(\theta-\theta_2)}{۱} = t\left(\theta - \frac{\theta}{n}\right)$$
$$x = t\theta\left(۱-\frac{۱}{n}\right) = t\theta\frac{n-۱}{n}$$

۷۶- در شکل ۲۹-۷۲، دو پرتو نور از هوا به درون پنج لایهٔ پلاستیک شفاف می‌تابند و پس از عبور از آنها دوباره به هوا برمی‌گردند. سطح جدایی لایه‌ها موازی و ضخامت آنها نامشخص است؛ ضریب شکست آنها عبارت‌اند از $n_1 = ۱/۷$ ، $n_2 = ۱/۶$ ، $n_3 = ۱/۵$ ، $n_4 = ۱/۴$ و $n_5 = ۱/۶$. پرتو b با زاویهٔ $\theta_b = ۲۰^\circ$ فرود می‌آید. در آخرین سطح جدایی، با چه زاویه‌ای نسبت به عمود (الف) پرتو a و (ب) پرتو b خارج می‌شوند؟ (راهنمایی: حل مسئله به طریق جبری می‌تواند موجب صرفه‌جویی در وقت باشد.) اگر به جای هوا در سمت چپ و سمت راست شکل شیشه‌ای با ضریب شکست ۱/۵ وجود داشته باشد، با چه زاویه‌ای (ب) پرتو a و (ت) پرتو b خارج می‌شوند؟



شکل ۲۹-۷۲ مسئلهٔ ۷۶

حل: (الف) در اشعه (a) چون زاویهٔ تابش صفر درجه است، بدون هیچ انحرافی خارج می‌گردد.

(ب)
$$n_a \sin\theta_b = n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2 = n_3\sin\theta_3$$
$$= n_4\sin\theta_4 = n_5\sin\theta_5 = n_a\sin\theta_6$$

θ_6 زاویهٔ ورود به هوا و n_a ضریب شکست هوا است.

(پ) باریکه a بدون انحراف خارج می‌گردد.

$$\theta_6 = \theta_b = ۲۰^\circ$$

(ت) دوباره زاویهٔ خروج اشعه b همان ۲۰° بود.

۷۷- (الف) چقدر طول می‌کشد تا یک سیگنال رادیویی فاصلهٔ ۱۵۰km میان فرستنده و آنتن گیرنده را طی کند؟ (ب) ما ماه

Scanned by CamScanner

کامل را به خاطر بازتاب نور خورشید می‌بینیم. قبل از اینکه این نور به چشم ما برسد چه مدت قبل از آن خورشید را ترک کرده است؟ فاصلهٔ زمین – ماه و زمین– خورشید به ترتیب عبارت‌اند از ۳/۸×۱۰^۵ km و ۱/۵×۱۰^۸ km . (پ) چه مدت برای زمان رفت و برگشت طول می‌کشد تا نور بین زمین و ماهوارهٔ فضایی به فاصلهٔ ۱/۳×۱۰^۹ km را طی کند؟ (ت) بر این باورند که سحابی خرچنگ که حدوداً در فاصلهٔ ۶۵۰۰ سال نوری (ly) قرار دارد، نتیجهٔ انفجار یک ابرنواختر است که ۱۰۵۴ سال پس از میلاد توسط منجمین چینی ثبت شده است. در حدود چه سالی واقعاً این انفجار رخ داده است؟

حل: (الف) $x = ct \Rightarrow t = \frac{x}{c}$

$t = \frac{(۱۵۰×۱۰^۳)}{(۳×۱۰^۸)} = ۵×۱۰^{-۴}\ s$ یا ۰/۵(ms)

(ب) $x = (۳/۸×۱۰^۸)+(۱/۵×۱۰^{۱۱}) = ۱/۵۰۳۸×۱۰^{۱۱}\ m$

$t = \frac{x}{c} = \frac{(۱/۵۰۳۸×۱۰^{۱۱})}{(۳×۱۰^۸)} = ۵۰۱/۲۷s$ یا $۸/۴'$

(پ) $x = ۲/۶×۱۰^{۱۲}\ m$

$t = \frac{(۲/۶×۱۰^{۱۲})}{(۳×۱۰^۸)} = ۸/۶۷×۱۰^۳\ s$ یا ۲/۴h

(ت) هر سال نوری، مسافتی است که نور در یک سال طی می‌کند.

$1ly = ۹/۳۳×۱۰^{۱۵}\ m$

این انفجار در ۶۵۰۰ سال قبل روی داده است.

$۱۰۵۴ - ۶۵۰۰ = -۵۴۴۶\ B\cdot C$

BC یعنی قبل از میلاد مسیح (ع)

۷۸– حدود ۱۵۰ سال پس از میلاد، کلادیوس بطلمیوس برای باریکهٔ نور که از هوا داخل آب می‌شود برای زاویهٔ فرود $\theta_۱$ و زاویهٔ شکست $\theta_۲$ مقدارهای اندازه‌گیری شدهٔ زیر را به دست آورد:

$\theta_۱$	$\theta_۲$	$\theta_۱$	$\theta_۲$
۱۰°	۸°	۵۰°	۳۵°
۲۰°	۱۵°۳۰′	۶۰°	۴۰°۳۰′
۳۰°	۲۲°۳۰′	۷۰°	۴۵°۳۰′
۴۰°	۲۹°	۸۰°	۵۰°

فرض کنید این داده‌ها با قانون شکست سازگارند، با به کاربردن آنها ضریب شکست آب را به دست آورید. این داده‌ها شاید به عنوان قدیمی‌ترین اندازه‌گیریهای فیزیکی ثبت شده قابل توجه باشند.

حل:

$n_۱ \sin\theta_۱ = n_۲ \sin\theta_۲$

$(۱)\sin ۱۰ = n\sin ۸ \Rightarrow n = ۱/۲۸۰$

$(۱)\sin ۲۰ = n\sin ۱۵/۵° \Rightarrow n = ۱/۲۸۰$

$(۱)\sin ۳۰ = n\sin ۲۲/۵° \Rightarrow n = ۱/۳۰۷$

$(۱)\sin ۴۰ = n\sin ۲۹ \Rightarrow n = ۱/۳۲۶$

$(۱)\sin ۵۰ = n\sin ۳۵ \Rightarrow n = ۱/۳۳۶$

$(۱)\sin ۶۰ = n\sin ۴۰/۵ \Rightarrow n = ۱/۳۳۳$

$(۱)\sin ۷۰ = n\sin ۴۵/۵ \Rightarrow n = ۱/۳۱۷$

$(۱)\sin ۸۰ = n\sin ۵۰ \Rightarrow n = ۱/۲۸۶$

$\bar{n} = ۱/۳۰۸$

۷۹– مؤلفهٔ الکتریکی یک باریکهٔ نور قطبیده عبارت است از $E_y = (۵/۰۰V/m)\sin[۱/۰۰×۱۰^۶\ m^{-۱})z + \omega t]$. (الف) عبارتی برای مؤلفهٔ میدان مغناطیسی موج بنویسید که شامل مقدار ω باشد. (ب) طول موج و (پ) زمان تناوب و (ت) شدت این نور چقدر است؟ (ث) میدان مغناطیسی موازی با کدام محور نوسان می‌کند؟ (ج) این موج در چه ناحیه‌ای از طیف الکترومغناطیسی واقع است؟

حل:

$B_m = \frac{E_m}{c} = \frac{۵}{۳×۱۰^۸} = ۱/۶۷×۱۰^{-۸}$

(الف) $V = \frac{\omega}{k} \Rightarrow ۳×۱۰^۸ = \frac{\omega}{۱×۱۰^۶}$

$\omega = ۳×۱۰^{۱۴}\ rad/s$

$B_x = ۱/۶۷×۱۰^{-۸} \sin(۱×۱۰^۶\ z + ۳×۱۰^{۱۴}\ t)$

(ب) $\lambda = \frac{۲\pi}{k} = \frac{(۲\pi)}{(۱×۱۰^۶)} = ۶/۲۸×۱۰^{-۶}\ m$

(پ)

$\omega = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{\omega}$

$T = \frac{(۲)(۳/۱۴)}{۳×۱۰^{۱۴}} = ۲/۰۹×۱۰^{-۱۴}\ s$

(ت)

$I = \frac{E_m^۲}{۲\mu_۰ c} = \frac{(۵)^۲}{(۲)(۴\pi×۱۰^{-۷})(۳×۱۰^۸)} = ۳/۳۲×۱۰^{-۲}\ W/m^۲$

(ث) موازی محور xها

(ج) با توجه به مقدار طول موج، در ناحیه فروسرخ قرار دارد.

۸۰– مؤلفهٔ مغناطیسی یک موج الکترومغناطیسی در خلأ دارای دامنهٔ ۸۵/۸nT و عدد موج زاویه‌ای $۴/۰۰m^{-۱}$ است. (الف) بسامد موج، (ب) مقدار rms مؤلفهٔ الکتریکی و (پ) شدت نور چقدرند؟

حل: (الف)

$k = \frac{۲\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{۲\pi}{k} = \frac{۲\pi}{۴} = ۱/۵۷\ m$

$\lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow f = \frac{c}{\lambda} = \frac{۳×۱۰^۸}{۱/۵۷} = ۱/۹۱×۱۰^۸\ Hz$

(ب) $E_m = cB_m = (۳×۱۰^۸)(۸۵/۸×۱۰^{-۹}) = ۲۵/۷\ V/m$

(پ) $I = \frac{E_m^۲}{۲\mu_۰ c} = \frac{(۲۵/۷)^۲}{۲(۴\pi×۱۰^{-۷})(۳×۱۰^۸)}$

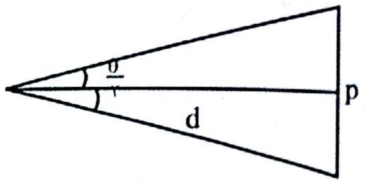
$= ۰/۸۸\ W/m^۲$

Scanned by CamScanner

۸۱- یک لیزر هلیوم- نئون، که در ۶۳۲/۸nm تابش می‌کند دارای توان خروجی ۳/۰mW و واگرایی (گستردگی) زاویه‌ای $\theta = ۰/۱۷\,\text{mrad}$ (شکل ۲۹-۷۳) است. (الف) شدت باریکه در فاصلهٔ ۴۰m از لیزر چقدر است؟ (ب) توان یک چشمهٔ نقطه‌ای که همان توان را در همان فاصله ایجاد کند چقدر است؟

شکل ۲۹-۷۳ مسئلهٔ ۸۱

حل: (الف) مطابق شکل مساحت سطح A برابر است با:



$$\frac{\theta}{۲} = \frac{۰/۱۷\times۱۰^{-۳}}{۲} = ۸/۵\times۱۰^{-۵}\ \text{rad}$$

$$R = d\tan\frac{\theta}{۲} \simeq (d)\frac{\theta}{۲}$$

$$R = (۴۰)(۸/۵\times۱۰^{-۵}) = ۳/۴\times۱۰^{-۳}\ \text{m}$$

$$A = \pi R^{۲} = (۳/۱۴)(۳/۴\times۱۰^{-۳})^{۲} = ۳/۶۲\times۱۰^{-۵}\ \text{m}^{۲}$$

$$I = \frac{P}{A} = \frac{(۳\times۱۰^{-۳})}{(۳/۶۲\times۱۰^{-۵})} = ۸۲/۸۷\ \text{W/m}^{۲}$$

(ب)

$$P = IA = (۸۲/۸۷)(۴\pi)(۴۰)^{۲} = ۱/۶۷\times۱۰^{۶}\ \text{W}$$

۸۲- شدت میانگین تابش خورشیدی که به طور عمود درست روی سطح خارجی جو زمین فرود می‌آید ۱/۴W/m² است. (الف) فشار تابشی p_r وارد بر سطح، با درنظر گرفتن جذب کامل چقدر است؟ (ب) برای مقایسه نسبت p_r را به فشار جو در زمین و در سطح دریا که ۱×۱۰^{۵} Pa است به دست آورید.

حل:

(الف) با فرض آنکه جذب کامل باشد برای فشار تابشی داریم

$$P_r = \frac{I}{c} = \frac{۱/۴\times۱۰^{۳}\ W/m^{۲}}{۳\times۱۰^{۸}} = ۴/۶۷\times۱۰^{-۶}\ \text{N/m}^{۲}$$

(ب) مقادیر را با تشکیل نسبت زیر مقایسه می‌کنیم

$$\frac{P_r}{P_۰} = \frac{۴/۶۷\times۱۰^{-۶}}{۳\times۱۰^{۸}} = ۴/۶۷\times۱۰^{-۱۱}$$

۸۳- در یک آزمون، دستگاه رادار نظامی ناتو که با توان ۱۸۰kW در ۱۲GHz کار می‌کند اقدام به آشکارسازی یک هواپیمای استیلت در فاصلهٔ ۹۰km می‌کند. فرض کنید که باریکهٔ رادار به طور یکنواخت در یک نیمکره گسیل می‌شود. (الف) شدت باریکه وقتی به محل هواپیما می‌رسد چقدر است؟ هواپیما موجهای رادار را بازتاب می‌دهد به طوری که گویی سطح مقطع آن فقط ۰/۲۲m² است. (ب) توان بازتاب هواپیما چقدر است؟ فرض کنید که باریکه به طور یکنواخت در یک نیمکره بازتابیده شده است. در برگشت باریکه به پایگاه رادار (پ) شدت، (ت) بیشینهٔ مقدار بردار میدان الکتریکی و (ث) جذر میانگین مربعی بیشینهٔ میدان مغناطیسی باریکهٔ رادار بازتابیده چقدر است؟

حل: (الف)

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{۲\pi R^{۲}} = \frac{(۱۸۰\times۱۰^{۳})}{(۲\pi)(۹۰\times۱۰^{۳})^{۲}} = ۳/۵\times۱۰^{-۶}\ \text{W/m}^{۲}$$

(ب)

$$P = IA_a = (۳/۵\times۱۰^{-۶})(۰/۲۲) = ۷/۷\times۱۰^{-۷}$$

(پ)

$$I = \frac{P}{۴\pi R^{۲}} = \frac{(۷/۷\times۱۰^{-۷})}{(۲\pi)(۹۰\times۱۰^{۳})^{۲}} = ۱/۵\times۱۰^{-۱۷}\ \text{W/m}^{۲}$$

(ت)

$$I = \frac{E_m^{۲}}{۲\mu_۰ c} \Rightarrow (۱/۵\times۱۰^{-۱۷}) = \frac{E_m^{۲}}{(۲)(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۳\times۱۰^{۸})}$$

$$E_m = ۱/۱\times۱۰^{-۷}\ \text{V/m}$$

(ث)

$$B_m = \frac{E_m}{c} = \frac{۱/۱\times۱۰^{-۷}}{۳\times۱۰^{۸}} = ۳/۶۷\times۱۰^{-۱۶}\ \text{T}$$

$$B_{rms} = \frac{B_m}{\sqrt{۲}} = ۲/۵\times۱۰^{-۱۶}\ \text{T}$$

۸۴- یک باریکهٔ ناقطبیدهٔ نور به سامانه‌ای شامل چهار ورقهٔ قطبنده می‌تابد، ورقه‌ها به گونه‌ای سمتگیری کرده‌اند که زاویهٔ میان جهتهای قطبندهٔ هر دو ورقهٔ مجاور ۳۰° است. چه کسری از شدت اولیه از این سامانه عبور می‌کند؟

حل:

$$I_۱ = \frac{I_۰}{۲}$$

$$I_۲ = I_۱\cos^{۲}\theta = \frac{I_۰}{۲}\cos^{۲}\theta$$

$$I_۳ = I_۲\cos^{۲}\theta = \frac{I_۰}{۲}\cos^{۴}\theta$$

$$\frac{I_۴}{I_۰} = \frac{۱}{۲}\cos^{۶}۳۰ = ۰/۲۱\ \text{یا}\ ٪۲۱$$

۸۵- یک باریکهٔ نور ناقطبیدهٔ اولیه به سامانه‌ای شامل دو ورقهٔ قطبنده که یکی روی دیگری واقع است می‌تابد. اگر شدت نور گسیل شده یک سوم شدت نور فرودی باشد، زاویهٔ میان جهتهای قطبیدگی ورقه‌ها چقدر است؟

حل:

$$I_۱ = \frac{I_۰}{۲}$$

$$I_۲ = I_۱\cos^{۲}(\theta_۲ - \theta_۱) = \frac{I_۰}{۲}\cos^{۲}(\Delta\theta)$$

$$\frac{I_۲}{I_۰} = \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۲}\cos^{۲}\Delta\theta \Rightarrow \cos^{۲}\Delta\theta = \frac{۲}{۳}$$

$$\cos\Delta\theta = ۰/۸۱۶$$

$$\Delta\theta = ۳۵/۳^{\circ}$$

Scanned by CamScanner

۸۶- یک موج الکترومغناطیسی در جهت منفی محور y حرکت می‌کند. در یک وضعیت و زمان مشخص، میدان الکتریکی در امتداد مثبت محور z و دارای بزرگی ۱۰۰V/m است. مطلوب است تعیین (الف) بزرگی و (ب) جهت میدان مغناطیسی متناظر.

حل: (الف)
$$B=\frac{E}{C}=\frac{۱۰۰}{۳\times ۱۰^{۸}}=۳/۳۳\times ۱۰^{-۷}\ \mathrm{T}$$

(ب) این میدان در خلاف محور xها ارتعاش می‌نماید. جهت $\vec{B}$ از تعریف بردار پواین تینگ به دست می‌آید. $\vec{S}$ جهت انتشار موج یعنی خلاف جهت محور y می‌باشد.

۸۷- مطلوب است محاسبهٔ حد (الف) بالا و (ب) پایین زاویهٔ بروستر برای نور فرودی بر یک کوارتز گداخته. فرض کنید حدود طول موج نور عبارت‌اند از ۴۰۰ و ۷۰۰nm .

حل: از شکل ۲۹-۱۹ درمی‌یابیم که به ازای $\lambda=۴۰۰nm$، $n_{\max}=۱/۴۷۰$ و به ازای $\lambda=۷۰۰nm$، $n_{\max}=۱/۴۵۶$ است.

(الف) و (ب) زاویه‌های بروستر مربوطه عبارتند از:

$$\theta_{B,\max}=\tan^{-1}n_{\max}=\tan^{-1}(۱/۴۷۰)=۵۵/۸^{\circ}$$

و

$$\theta_{B,\min}=\tan^{-1}n_{\min}=\tan^{-1}(۱/۴۵۶)=۵۵/۵^{\circ}$$

۸۸- ذره‌ای در منظومهٔ شمسی تحت تاثیر ترکیب جاذبهٔ گرانشی خورشید و نیروی تابشی به خاطر پرتوهای خورشیدی قرار دارد. فرض کنید این ذره کروی با چگالی $۱\times ۱۰^{۳}\ \mathrm{kg/m^{۳}}$ است و همهٔ شدت نور را جذب می‌کند. (الف) نشان دهید که، اگر شعاع آن کمتر از یک شعاع بحرانی R باشد، به سمت خارج منظومهٔ شمسی رانده می‌شود. (ب) شعاع بحرانی را محاسبه کنید.

حل: (الف) و (ب) نیروی گرانشی که از طرف خورشید بر آن وارد می‌شود برابر است با:

$$F_g=G\frac{M_s m}{r^{۲}}=G\frac{M_s}{r^{۲}}\rho\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}$$

که r فاصله جرم از مرکز خورشید است.

شدت نور خورشید در محل کره برابر است با:

$$I=\frac{P_{\circ}}{۴\pi r^{۲}}$$

که $P_{\circ}$ توان تابشی خورشید است.

$$F_r=\frac{IA}{C}=\frac{\pi R^{۲}P_{\circ}}{C۴\pi r^{۲}}$$

اگر نیروی گرانشی کمتر از F_r باشد، کره به بیرون منظومه شمسی فرستاده می‌شود.

$$F_r\geq F_g\Rightarrow\frac{\pi R^{۲}P_{\circ}}{۴\pi r^{۲}}\geq G\frac{M_s}{r^{۲}}P\frac{۴\pi}{۳}R^{۳}$$

$$\frac{۳P_{\circ}}{۱۶\pi GM_s\rho}\geq R$$

حالت تساوی شعاع بحرانی را به دست می‌دهد.

$$R_c=\frac{(۳)(۳/۹\times ۱۰^{۲۶})}{(۱۶)(۳/۱۴)(۳\times ۱۰^{۸})(۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱})(۱/۹۹\times ۱۰^{۳۰})(۱\times ۱۰^{۳})}$$

$$R_c=۵/۸۴\times ۱۰^{-۷}\ \mathrm{m}$$

(مقادیر بالا از پیوست انتهای کتاب به دست آمده است.)

۸۹- مؤلفهٔ مغناطیسی موج نور قطبیده‌ای برابر با $\mathrm{B_x}=(۴/۰\times ۱۰^{-۶}\ \mathrm{T})\sin[(۱/۵۷\times ۱۰^{۷}\ \mathrm{m^{-1}})y+\omega t]$ است. (الف) موازی کدام محور نور قطبیده شده است؟ (ب) بسامد و (پ) شدت نور چقدرند؟

حل: (الف) موازی محور xها قطبیده شده است.

(ب)
$$k=\frac{۲\pi}{\lambda}\Rightarrow\lambda=\frac{۲\pi}{k}$$

$$\lambda=\frac{(۲\pi)}{(۱/۵۷\times ۱۰^{۷})}=۴\times ۱۰^{-۷}\ \mathrm{m}$$

$$\lambda=\frac{C}{f}\Rightarrow f=\frac{C}{\lambda}=\frac{(۳\times ۱۰^{۸})}{(۴\times ۱۰^{-۷})}=۷/۵\times ۱۰^{۱۴}\ \mathrm{Hz}$$

(پ)
$$I=\frac{CB_m^{۲}}{۲\mu_{\circ}}=\frac{(۳\times ۱۰^{۸})(۴\times ۱۰^{-۶})^{۲}}{(۲)(۴\pi\times ۱۰^{-۷})}=۱/۹۱\times ۱۰^{۳}\ \mathrm{W/m^{۲}}$$

۹۰- سه ورقهٔ قطبنده سامانه‌ای را تشکیل می‌دهند. اولی و سومی چلیپایی‌اند: جهت قطبیدگی میانی با جهت قطبیدگی دوتای دیگر زاویهٔ ۴۵° می‌سازد. چه کسری از شدت باریکهٔ نور ناقطبیدهٔ اولیه از این سامانه می‌گذرد؟

حل:
$$I_۱=\frac{I_{\circ}}{۲}$$

$$I_۲=I_۱\cos^{۲}\theta=\frac{I_{\circ}}{۲}\cos^{۲}۴۵=\frac{I_{\circ}}{۴}$$

$$I_۳=I_۲\cos^{۲}\theta=\frac{I_{\circ}}{۴}\cos^{۲}۴۵^{\circ}=\frac{I_{\circ}}{۸}$$

$$\frac{I_۳}{I_{\circ}}=\frac{۱}{۸}=۰/۱۲۵\quad \text{یا}\quad \%۱۲۵$$

۹۱- پرتو نور سفید که در کوارتز گداخته حرکت می‌کند با زاویهٔ $\theta_۱$ به سطح جدایی کوارتز- هوا فرود می‌آید. فرض کنید که ضریب شکست کوارتز در قرمز انتهای ناحیهٔ مرئی برابر ۱/۴۵۶ و در آبی انتها برابر $n=۱/۴۷۰$ است. اگر $\theta_۱$ برابر (الف) $۴۲/۰۰^{\circ}$، (ب) $۴۳/۱۰^{\circ}$ و $۴۴/۰۰^{\circ}$ باشد، آیا در نور سفید شکسته شده، قرمز انتهای ناحیهٔ مرئی غالب است یا آبی انتهای ناحیهٔ مرئی، یا اصلاً نور شکسته وجود ندارد؟

حل:
$$\sin\theta_c=\frac{۱}{n}$$

برای نور قرمز
$$\sin\theta_c=\frac{۱}{۱/۴۵۶}=۰/۶۸۷\Rightarrow\theta_c=۴۳/۴^{\circ}$$

برای نور آبی
$$\sin\theta_c=\frac{۱}{۱/۴۷۰}=۰/۶۸۰\Rightarrow\theta_c=۴۲/۸^{\circ}$$

(الف) $\theta_۱=۴۲^{\circ}$

تمام نور عبور می‌کند و نور عبوری به رنگ سفید است.

(ب) $\theta_۱=۴۳/۱^{\circ}$

Scanned by CamScanner

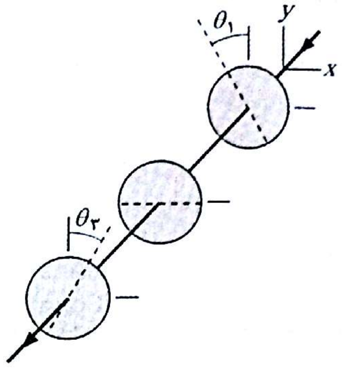
که قسمت مربوط به نور قرمز شکسته می‌شود ولی قسمت مربوط به نور آبی شکسته نمی‌گردد. بنابراین نور خارج‌شده به رنگ قرمز می‌باشد.

$\theta_۱ = ۴۴^\circ$

(پ)

هیچ نوری عبور نمی‌نماید. $(\theta_۱ > \theta_۲)$

۹۲- در شکل ۲۹-۷۴، نور ناقطبیده‌ای به سامانه‌ای با سه ورقهٔ قطبنده می‌تابد، که جهتهای قطبیدگی اولی و سومی در زاویه‌های $\theta_۱ = ۳۰^\circ$ (پاد ساعتگرد) و $\theta_۳ = ۳۰^\circ$ (ساعتگرد) هستند. چه کسری از شدت نور اولیه از این سامانه خارج می‌شود.



شکل ۲۹-۷۴ مسئلهٔ ۹۲

حل: نور فرودی ناقطبیده است و در نتیجه شدت پرتو فرودی نصف می‌شود. آنگاه با دو بار به کار بردن معادله ۲۹-۴۲ به سادگی خواهیم داشت

$$I = \frac{۱}{۲} I_۰ \cos^۲\theta'_۱ \cos^۲\theta'_۳$$

که در آن $\theta'_۱ = ۹۰^\circ - \theta_۱ = ۶۰^\circ$ و $\theta'_۳ = ۹۰^\circ - \theta_۳ = ۶۰^\circ$ است. در نتیجه $I/I_۰ = ۰/۰۳۱$ می‌شود.

۹۳- در ناحیه‌ای از فضا که نیروی گرانشی قابل چشمپوشی است، کره‌ای به وسیلهٔ یک باریکهٔ نوری یکنواخت با شدت $۶/۰\,\mathrm{mW/m^۲}$ شتاب می‌گیرد. کره کاملاً جذب کننده و دارای شعاع $۲/۰\,\mu m$ و چگالی یکنواخت $۵/۰\times۱۰^۳\,\mathrm{kg/m^۳}$ است. بزرگی شتاب کره بر اثر نور چقدر است؟

حل: سطح مقطع مقابل نور برابر است با:

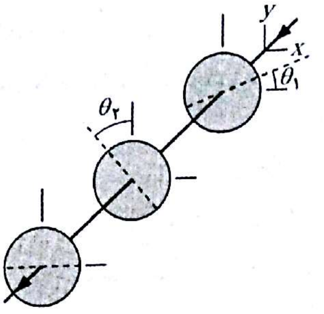
$$A = \pi R^۲ = (۳/۱۴)(۲\times۱۰^{-۶}) = ۱/۲۵۶\times۱۰^{-۱۱}\,\mathrm{m^۲}$$

$$F = \frac{I}{c}A = \frac{(۶\times۱۰^{-۳})}{(۳\times۱۰^۸)}(۱/۲۵۶\times۱۰^{-۱۱}) = ۲/۵۱۲\times۱۰^{-۲۲}\,\mathrm{N}$$

$$m = \rho V = (۵\times۱۰^۳)(۴/۳)(۳/۱۴)(۲\times۱۰^{-۶})^۳$$
$$= ۱/۶۷\times۱۰^{-۱۳}\,\mathrm{kg}$$

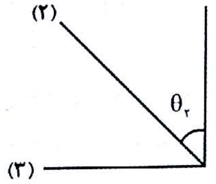
$$F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{(۲/۵۱۲\times\ ۰^{-۲۲})}{(۱/۶۷\times۱۰^{-۱۳})}$$
$$= ۱/۵\times۱۰^{-۹}\,\mathrm{m/s^۲}$$

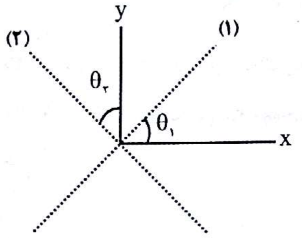
۹۴- در شکل ۲۹-۷۵، نور ناقطبیده به سامانه‌ای شامل سه ورقهٔ قطبنده می‌تابد که جهتهای قطبیدگی اولی و دومی در زاویه‌های $\theta_۱ = ۲۰^\circ$ و $\theta_۲ = ۴۰^\circ$ هستند. چه کسری از شدت نور اولیه از این سامانه خارج می‌شود؟



شکل ۲۹-۷۵ مسئلهٔ ۹۴

حل:





$$I_۱ = \frac{I_۰}{۲}$$

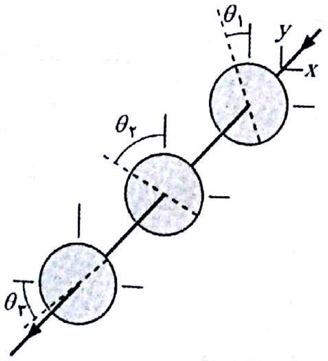
$$I_۲ = I_۱\cos^۲(\theta_۲ + ۹۰ - \theta_۱) = \frac{I_۰}{۲}\cos^۲(۴۰ + ۹۰ - ۲۰)$$

$$I_۲ = \frac{I_۰}{۲}\cos^۲(۱۱۰) = ۰/۰۵۸$$

$$I_۳ = I_۲\cos^۲(۹۰ - \theta_۲) = ۰/۰۵۸\, I_۰\cos^۲(۵۰)$$

$$\frac{I_۳}{I_۰} = ۰/۰۲۴ \text{ یا } \%۲/۴$$

۹۵- در شکل ۲۹-۷۶، نور ناقطبیده به سامانه‌ای شامل سه ورقهٔ قطبنده با جهتهای قطبیدگی با زاویهٔ $\theta_۱ = ۲۰^\circ$ ، $\theta_۲ = ۶۰^\circ$ و $\theta_۳ = ۴۰^\circ$ می‌تابد. چه کسری از شدت نور اولیه از این سامانه خارج می‌شود؟



شکل ۲۹-۷۶ مسئلهٔ ۹۵

حل: باریکه نور فرودی ناقطبیده است و بنابراین شدت آن در عبور از قطبیده اول، نصف می‌شود. آنگاه با دو بار به کار بردن متوالی معادله ۲۹-۴۲، برای شدت نهایی خواهیم داشت

$$I = \frac{I_۰}{۲}\cos^۲\theta'\cos^۲\theta''$$

که در آن، زاویه‌ها برابر با $\theta' = \theta_۲ - \theta_۱ = ۶۰^\circ - ۲۰^\circ = ۴۰^\circ$ و $\theta'' = \theta_۳ + (\pi/۲ - \theta_۲) = ۴۰^\circ + ۳۰^\circ = ۷۰^\circ$ است. از آنجا به $I/I_۰ = ۰/۰۳۴$ می‌رسیم.

۹۶- یک مربع که سطحی کاملاً بازتاب دهنده است در فضا عمود بر پرتوهای نور خورشید قرار دارد. طول ضلع ۲/۰ m و در فاصلهٔ $۳/۰ \times ۱۰^{۱۱}$ m از مرکز خورشید قرار دارد. نیروی تابشی پرتوهای نور بر این سطح چقدر است؟

حل: از جدول پیوست (پ)، توان تابشی خورشید $۳/۹۰ \times ۱۰^{۲۶}$ W می‌باشد.

$$I = \frac{P}{۴\pi r^۲} = \frac{(۳/۹۰ \times ۱۰^{۲۶})}{(۴)(۳/۱۴)(۳ \times ۱۰^{۱۱})^۲} = ۳۴۵ \text{ W/m}^۲$$

$$F = \frac{۲IA}{C} = \frac{(۲)(۳۴۵)(۴)}{(۳ \times ۱۰^۸)} = ۹/۲ \times ۱۰^{-۶} \text{ N}$$

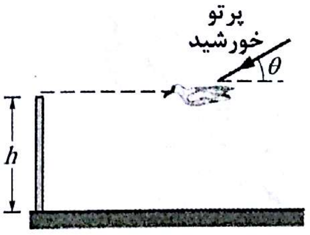
۹۷- مقدار rms میدان الکتریکی در یک موج نوری معین برابر ۰/۲۰۰V/m است. دامنهٔ میدان مغناطیسی وابسته چقدر است؟

حل:

$$E_m = \sqrt{۲} E_{rms} = ۰/۲۸۳ \text{ V/m}$$

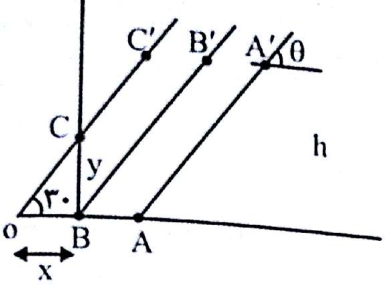
$$B_m = \frac{E_m}{c} = \frac{(۰/۲۸۳)}{(۳ \times ۱۰^۸)} = ۹/۴۳ \times ۱۰^{-۱۰} \text{ T}$$

۹۸- در شکل ۲۹-۷۷ یک مرغ دریایی با تندی ثابت 15m/s به طور افقی بالای سطح زمین پرواز می‌کند، و حرکت آن در صفحهٔ قائمی که شامل خورشید است انجام می‌گیرد. او به سمت دیواری به ارتفاع $h = ۲/۰$ m که به سختی دیده می‌شود پرواز می‌کند. در آن موقع روز، زاویهٔ خورشید نسبت به زمین $\theta = ۳۰^\circ$ است. سایهٔ مرغ دریایی با چه تندی (الف) روی سطح زمین و سپس (ب) به بالای دیوار حرکت می‌کند. فرض کنید بعداً عقابی در همان امتداد و با همان تندی 15m/s پرواز کند، مشاهده می‌کنید که وقتی سایه آن به دیوار می‌رسد، تندی سایه به طور چشمگیری افزایش می‌یابد. (پ) خورشید اکنون نسبت به وقتی که قبلاً مرغ دریایی پرواز می‌کرد در آسمان بالاتر است یا پایینتر؟ (ت) اگر تندی سایهٔ عقاب روی دیوار 45m/s باشد، درست در آن موقع زاویهٔ θ خورشید چقدر است؟



شکل ۲۹-۷۷ مسئلهٔ ۹۸

حل:



(الف) فرض می‌کنیم در مدت Δt، شاهین به A' به B' می‌رود و سایه آن از A به B می‌رسد. چون شاهین مسیر افقی $A'B'$ را با سرعت افقی $۱۵ m/s$ طی می‌کند، پس سرعت حرکت سایه آن نیز روی زمین همان $۱۵ m/s$ است.

(ب) اگر $B'C'$ را با x و BC را با y نمایش دهیم.

$$\tan ۳۰ = \frac{y}{x} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{۳}}{۳} x$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)(۱۵)$$

$$\frac{dy}{dt} = ۸/۶۶ m/s$$

(پ) اگر $\frac{dy}{dt}$ افزایش یابد، باید θ نیز افزایش یابد. یعنی ارتفاع خورشید باید بالاتر باشد.

(ت)

$$۴۵ = (\tan \theta) ۱۵$$

$$\tan \theta = \frac{۴۵}{۱۵} = ۳$$

$$\theta = ۷۲^\circ$$

۹۹- مؤلفهٔ مغناطیسی یک موج نوری قطبیده با رابطهٔ $B_x = (۴/۰۰ \mu T)\sin[ky + (۲/۰۰ \times ۱۰^{۱۵} s^{-۱})t]$ داده می‌شود. (الف) موج در چه جهتی حرکت می‌کند، (ب) موازی با کدام محور قطبیده است و (پ) شدت آن چقدر است؟ (ت) رابطه‌ای برای میدان الکتریکی موج بنویسید که شامل مقدار عدد موج زاویه‌ای باشد. (ث) طول موج چقدر است؟ (ج) این موج در چه ناحیه‌ای از طیف الکترومغناطیسی قرار دارد؟

حل:

(الف) از جملهٔ درون پرانتز مقابل سینوس مشخص است که جهت حرکت خلاف محور y می‌باشد.

$$ky = \omega t \Rightarrow v = \frac{y}{t} = -\frac{\omega}{k}$$

(ب) چون B_x داریم، موازی محور Z قطبیده شده است.

(پ) $$I = \frac{cB_m^۲}{۲\mu_۰} = \frac{(۳ \times ۱۰^۸)(۴ \times ۱۰^{-۶})^۲}{(۲)(۴\pi \times ۱۰^{-۷})} = ۱/۹۱ \times ۱۰^۳ \text{ W/m}^۲$$

(ت) $$v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \frac{۲ \times ۱۰^{۱۵}}{k} = ۳ \times ۱۰^۸ \Rightarrow k = ۶/۶۷ \times ۱۰^۶ \text{ rad/m}$$

$$E_m = CB_m = (۳ \times ۱۰^۸)(۴ \times ۱۰^{-۶}) = ۱۲۰۰ \text{ V/m}$$

$$E_z = ۱۲۰۰ \sin(۶/۶۷ \times ۱۰^۶ y + ۲ \times ۱۰^{۱۵} t)$$

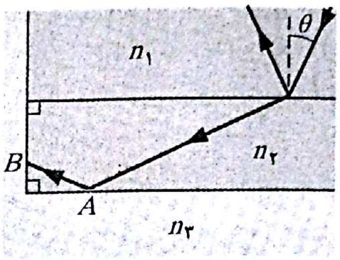
(ث)

$$\lambda = \frac{۲\pi}{k} = ۹/۴۲ \times ۱۰^{-۷} \text{ m} \text{ یا } ۹۴۲ \text{nm}$$

Scanned by CamScanner

ج) در محدوده فروسرخ می‌باشد.

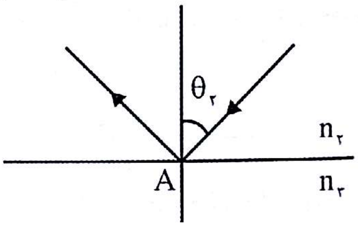
۱۰۰●●- در شکل ۲۹-۷۸ که در آن $n_۱=۱/۷۰$ ، $n_۲=۱/۵۰$ و $n_۳=۱/۳۰$ است، نور از محیط ۱ به محیط ۲ می‌شکند. اگر نور با زاویهٔ بحرانی به نقطهٔ A در سطح جدایی بین محیط ۲ و ۳ فرود آید، (الف) زاویهٔ شکست در نقطهٔ B و (ب) زاویهٔ اولیهٔ θ چقدر است؟ حال اگر نور در B با زاویهٔ بحرانی روی سطح جدایی میان محیط ۲ و ۳ فرود آید (پ) زاویهٔ شکست در نقطهٔ A و (ت) زاویهٔ اولیهٔ θ چقدر است؟ اگر به جای همهٔ اینها، نور با زاویهٔ بروستر به نقطهٔ A روی سطح جدایی میان محیط ۲ و ۳ فرود آید (ث) زاویهٔ شکست در نقطهٔ B و (ج) زاویهٔ اولیهٔ θ چقدر است؟



شکل ۲۹-۷۸ مسئلهٔ ۱۰۰

حل: چون نور در نقطه A تحت زاویه بحرانی باز می‌گردد.

$$\sin\theta_c=\frac{n_۳}{n_۲}=\frac{(۱/۳۰)}{(۱/۵۰)}=۰/۸۶۷$$

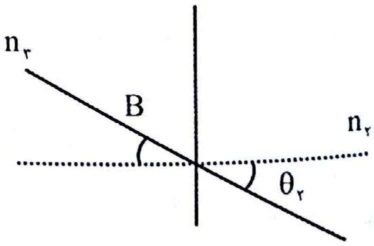


(الف)

$$\theta_c=۶۰/۱$$

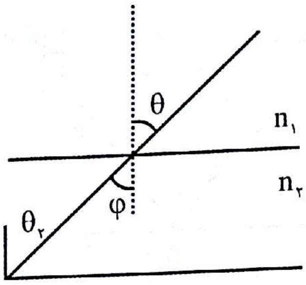
زاویه پرتو تابشی در نقطه B برابر است با:

$$\theta_۲=۹۰-\theta_c=۲۹/۹^\circ$$
$$n_۳\sin\theta_۳=n_۲\sin\theta_۲$$
$$(۱/۳)\sin\theta_۳=(۱/۵۰)\sin ۲۹/۹$$
$$\sin\theta=۰/۵۷۵\Rightarrow\theta_۳=۳۵/۱^\circ$$

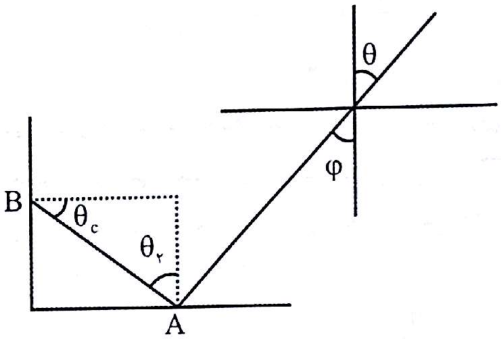


(ب)

$$\hat{\varphi}=\hat{\theta}_c=۶۰/۱^\circ$$
$$n_۱\sin\theta=n_۲\sin\varphi$$
$$(۱/۷۰)\sin\theta=(۱/۵۰)\sin ۶۰/۱$$
$$\sin\theta=۰/۷۶۵\Rightarrow\theta=۴۹/۹^\circ$$



(پ) اگر به جای نقطه A پرتو نور با زاویه بحرانی به نقطه B برخورد نماید.

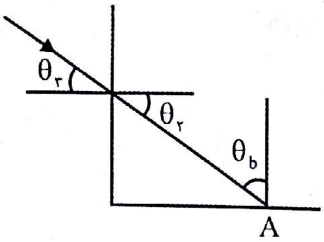


$$\theta_c=۶۰/۱$$
$$\theta_۲=۹۰-۶۰/۱=۲۹/۹^\circ$$
$$\varphi=\theta_۲=۲۹/۹^\circ$$

(ت)

$$n_۲\sin ۲۹/۹=n_۳\sin A_r$$
$$۱/۵\sin ۲۹/۹=۱/۳\sin A_r$$
$$\sin A_r=۰/۵۷۵\Rightarrow A_r=۳۵/۱$$
$$n_۱\sin\theta=n_۲\sin\varphi$$
$$(۱/۷۰)\sin\theta=(۱/۵۰)\sin ۲۹/۹^\circ$$
$$\sin\theta=۰/۴۴\Rightarrow\theta=۲۶/۱^\circ$$

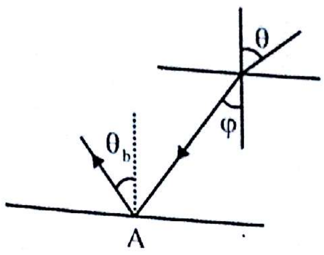
(ث)



$$\tan\theta_b=\frac{n_۳}{n_۲}=\frac{۱/۳۰}{۱/۵۰}=۰/۸۶۷\Rightarrow\theta_b=۴۰/۹$$
$$\theta_۲=۹۰-\theta_b=۴۹/۱$$
$$n_۲\sin\theta_۲=n_۳\sin\theta_۳$$
$$(۱/۵۰)\sin ۴۹/۱=(۱/۳۰)\sin\theta_۳$$
$$\sin\theta_۳=۰/۸۷۲\Rightarrow\theta_۳=۶۰/۷^\circ$$

(ج)

Scanned by CamScanner



$$\varphi = \theta_b = 40.9^\circ$$
$$n_1 \sin\theta = n_2 \sin\varphi$$
$$(1.70)\sin\theta = (1.50)\sin 40.9$$
$$\sin\theta = 0.578 \Rightarrow \theta = 35.3^\circ$$

۱۰۱- وقتی نور قرمز در خلأ با زاویهٔ بروستر روی قطعه شیشه‌ای معین فرود می‌آید، زاویهٔ شکست برابر 32.0° است. (الف) ضریب شکست شیشه و (ب) زاویهٔ بروستر چقدر است؟

حل: (الف) و (ب)

$$\tan\theta_1 = \frac{n_2}{n_1} = \frac{n_2}{(1)} \qquad (1)$$
$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$
$$(1)\sin_1 - n_2 \sin 32 \qquad (2)$$

معادله (۱) و (۲) یک دستگاه تشکیل می‌دهند.

$$\sin\theta_1 = (\tan\theta_1)(0.53) \Rightarrow \cos\theta_1 = 0.53$$
$$\theta_1 = 58^\circ$$
$$n_2 = \tan 58^\circ = 1.6$$

۱۰۲- با معادله‌های ۲۹-۱۱ و ۲۹-۱۷ شروع کنید و نشان دهید که $E(x,t)$ و $B(x,t)$ ، مؤلفه‌های الکتریکی و مغناطیسی موج الکتریکی پیشرونده تخت، باید در «معادله‌های موج» صدق کنند

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$$

حل:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad (1)$$
$$-\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \qquad (2)$$
$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial B}{\partial x}$$

از معادله (۲) در آن جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\right) = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{e^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\frac{\partial B}{\partial x}\right) = c^2 \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$$

۱۰۳- (الف) نشان دهید که معادله‌های ۲۹-۱ و ۲۹-۲ در معادله‌های موج بیان شده در مسئلهٔ ۱۰۲ صدق می‌کنند. (ب) نشان دهید که عبارتهایی به شکل

$$E = E_m f(kx - \omega t) \quad , \quad B = B_m f(kx - \omega t)$$

که در آنها $f(kx - \omega t)$ بیانگر یک تابع دلخواه است نیز در این معادله‌های موج صدق می‌کنند. SSM

حل: (الف) از معادله ۲۹-۱ داریم

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}[E_m \sin(kx - \omega t)] = -\omega^2 E_m \sin(kx - \omega t)]$$

و

$$c^2\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}[E_m \sin(kx - \omega t)] = -k^2 c^2 \sin(kx - \omega t)]$$
$$= -\omega^2 E_m \sin(kx - \omega t)$$

در نتیجه

$$\frac{\partial^2 E}{\partial T^2} = c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$$

برقرار است. به روش مشابه می‌توانیم نشان دهیم که معادله ۲۹-۲ در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$$

(ب) از $E = E_m f(kx \pm \omega t)$ داریم

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = E_m \frac{\partial^2 f(kx \pm \omega t)}{\partial t^2} = \omega^2 E_m \frac{d^2 f}{du^2}\bigg|_{u=kx\pm\omega x}$$

و

$$c^2\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 E_m \frac{\partial^2 f(kx \pm \omega t)}{\partial t^2} = c^2 E_m k^2 \frac{d^2 f}{du^2}\bigg|_{u=kx\pm\omega x}$$

چون $\omega = ck$ است، طرف‌های راست دو معادله بالا با هم برابرند و بنابراین داریم

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$$

با تغییر E به B و تکرار مشتق‌گیری بالا می‌توان نشان داد که $B = B_m f(kx \pm \omega t)$ نیز در معادله زیر صدق می‌کند.

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$$

۱۰۴- یک چشمهٔ نقطه‌ای نور با توان ۲۰۰W به طور همسانگرد تابش می‌کند. نیروی وارد بر یک کرهٔ کاملاً جذب کننده به شعاع ۲/۰cm بر اثر نور در فاصلهٔ ۲۰m از چشمه چقدر است؟

حل: چون شدت برابر توان بخش بر مساحت، و مساحت در حالت همسانگرد، کروی است، بنابراین شدت در فاصله $r = 20m$ از چشمه چنین می‌شود

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{200W}{4\pi(2m)^2} = 0.040\ \mathrm{W/m^2}$$

بنابر معادله ۲۹-۳۲، برای یک جذب‌کنندهٔ کامل $F=IA/c$ است که در اینجا سطح در معرض تابش A از کره کوچک، دایره تختی به مساحت $A = \pi(0.020m)^2 = 0.0013\ \mathrm{m^2}$ است.
بنابراین F چنین می‌شود

$$F = \frac{IA}{c} = \frac{(0.040 W/m^2)(0.0013 m^2)}{3\times10^8\ m/s} = 1.7\times10^{-13}\ \mathrm{N}$$

Scanned by CamScanner

طراحیpdf (مظاهری)

پل ارتباطی 09130676392

کانال ارتباطی @T_A_F_gut

آیدی ارتباطی @T_a_fizik_96

ISBN 978-964-388-245-7

برای خرید Online
به آدرس زیر مراجعه کنید
www.saffarpublishing.com

Scanned by CamScanner